XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Existência e unicidade de solução para equações diferenciais com memória dependendo do estado via Teorema da Contração

Viana, Edmara da Silva [1]; Hernández, Eduardo [2]

Resumo: *A teoria de equações diferenciais com memória dependendo do estado ocupa hoje um lugar de destaque na teoria geral de equações diferenciais com memória, com resultados independentes, altamente não triviais e problemas em aberto. Em termos gerais, uma equação com memória dependendo do estado é uma equação diferencial que apresenta termos de memória que podem ser descritos, por exemplo, na forma $u(\sigma(t,u(t)))$. Esta simples característica, estabelece uma diferença fundamental com os outros modelos e as outras teorias sobre equações diferencias com memória.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais com memória, Existência e unicidade de solução, Teorema da Contração.*

1. Introdução

A teoria de equações com memória dependendo do estado teve início numa palestra de Rodney Driver sobre uma equação diferencial funcional do tipo neutra deduzida a partir do estudo de um problema de eletrodinâmica, no Congresso "International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics", em 1963. O problema apresentado por Driver, pode ser representado na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(g(t,x(t))), x'(h(t,x(t)))), t \in [0,a], \\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-p,0] \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $g, h \in C([0,a] \times \mathbb{R}^n; [-p,a])$ e $\phi \in C([-p,a]; \mathbb{R}^n)$. No problema (1) os termos $g(t,x(t))$ e $h(t,x(t))$ são os termos que dão sentido ao conceito de memória dependendo do estado. O objetivo do trabalho foi o estudo e simplificação dos resultados presentes em [2], além de propor o uso do Teorema da Contração para se obter uma única solução do problema (2). Em [2] é estudada uma classe de equações neutras explícitas com memória dependendo do estado que podem ser representadas na forma

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + F\Big(t, u(t), \int_0^t K(t,\tau) u'(\sigma(\tau, u(\tau))) d\tau\Big), \quad t \in [0,a], \\ u_{|_{[-p,0]}} &= \varphi \in C([-p,0]; X), \end{aligned} \tag{2}$$

onde temos que X é um espaço de Banach, $A : X \to X$ é um operador linear limitado e gerador de um C_0-semigrupo compacto de operadores lineares limitados $(e^{At})_{t \geq 0}$ em X, $\{K(t,s) : t, s \in [0,a]\}$ é uma família de operadores lineares limitados de X em X, $F \in C([0,a] \times X \times X; X)$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times X); [-p,a])$.

2. Resultados obtidos

Usando o Teorema do Ponto fixo de Schauder, em [2] é estudada a existência de soluções para o problema (2). Além disso, também é estudada a unicidade de soluções. Especificamente, em [2] é provado o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Assuma que as condições $\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$ e $\mathcal{L}_\alpha$ são satisfeitas, que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$ e que $\varphi \in C^1([-p,0]; X)$. Então existe uma solução $u \in C([-p,b]; X)$ de (2) em $[-p,b]$ para algum $b \in (0,a]$.*

Onde as condições $\mathcal{L}_\alpha$ e $\mathcal{L}_{F,\sigma}$ são:

Condição 1 *$\mathcal{L}_\alpha$: $\alpha \in (0,1]$, $K : \{(t,s) : t, s \in [0,a]\} \to \mathcal{L}(X)$ é uma função tal que $K(t,\cdot) \in L^{\frac{1}{(1-\alpha)}}([0,t], \mathcal{L}(X))$ para todo $t \in [0,a]$ e*

$$\Theta(0,b) = \sup_{s \in [0,b]} \Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \|^{\frac{1}{1-\alpha}} d\tau \Big)^{(1-\alpha)} < \infty, \quad \forall\, b \in [0,a]. \tag{3}$$

Condição 2 *$\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$: $F \in L^q_{Lip}([0,a] \times X \times X; X)$ para algum $q \geq 1$ e vamos ter que $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times X; [-p,a])$ e $\sigma(t,x) \leq t$ para todo $(t,x) \in [0,a] \times X$.*

Notação 1 Sejam $u, v \in C([-p,b]; X)$ com $0 < b \leq a$. Assuma que $u'(\sigma(\cdot, u(\cdot)))$ pertence a $C([0,b]; X)$ e que $\varphi' \in C([-p,0]; X)$. Usaremos os símbolos v^σ, $(u')^\sigma_{K,u}$ e $F^\sigma u$ para as funções v^σ, $(u')^\sigma_{K,u}$ e $F^\sigma u : [0,b] \to X$ dadas por $v^\sigma(t) = v(\sigma(t, v(t)))$,

$$(u')^\sigma_{K,u}(t) = \int_0^t K(t,s) u'(\sigma(s,u(s))) ds \quad \text{e} \quad F^\sigma u(t) = F(t, u(t), (u')^\sigma_{K,u}(t)).$$

Se $\sigma(t,u(t)) < 0$ para todo $t \in [0,b]$ e $u_{|_{[-p,0]}} = \varphi$, usaremos a notação $(\varphi')^\sigma_{K,u}$ em lugar $(u')^\sigma_{K,u}$. Observamos que neste caso $(\varphi')^\sigma_{K,u}(t) = \int_0^t K(t,s)\varphi'(\sigma(s,u(s)))ds$, para todo $t \in [0,b]$

Estudando e simplificando o Teorema 3.1, foi proposto outra maneira de encontrar uma única solução para o problema (2) utilizando o Teorema da Contração e considerando que o operador A é limitado, a seguir enunciamos o resultado obtido e sua demonstração.

Teorema 3.2 *Suponha que as condições $\mathcal{L}_{\boldsymbol{F},\sigma}$ e $\mathcal{L}_\alpha$ são satisfeitas, que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$ e que $\varphi' \in C_{Lip}([-p,0]; X)$. Então existe uma única solução $u \in C^1([-p,b]; X)$ do problema (2) para algum $0 < b < a$.*

Demonstração: Usando que $\sigma(\cdot)$ é uma função contínua e que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$, fixamos $r_1 > 0$ e $0 < b_1 \leq a$ tal que $| \sigma(s,x) - \sigma(0,\varphi(0)) | < \frac{|\sigma(0,\varphi(0))|}{2}$ para todo $s \in [0,b_1]$ e $x \in B_{r_1}(\varphi(0), X)$. Seja $\rho = r_1 + (1 + \Theta(0,a)a^\alpha) \| \varphi \|_{C^1([-p,0];X)}$, onde $\Theta(0,a)$ é definido em Condição 1.

Vamos supor que "b" é tal que

$$C_0 \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho)(1 + [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip}\Theta(0,b)b^\alpha) \| u - v \|_{C([0,b];X)} < 1.$$

Seja $S(b) := \{u \in C([-p,b]; X) : \| u(\cdot) - \varphi(0) \|_{C([0,b];X)} \leq r_1, u_{|_{[-p,0]}} = \varphi\}$ munido com a métrica $d(u,v) = \| u - v \|_{C([0,b];X)}$ e $\Gamma : S(b) \to C([-p,b]; X)$ o operador definido por $\Gamma u(\theta) = \varphi(\theta)$ para $-p \leq \theta \leq 0$ e

$$\Gamma u(t) = e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} F(s, u(s), (\varphi')^\sigma_{K,u}(s)) ds, \quad \text{para } t \in [0,b], \tag{4}$$

onde $(\varphi')^\sigma_{K,u}(s))$ é a função definida em Notação 1.

Procedendo como na prova do Teorema 3.1, vemos que $\Gamma(S(b)) \subset S(b)$. Para provar que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração, para $u, v \in S(b)$ e $t \in [0,b]$, note que

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \| \\
&\leq \Big\| \int_0^t e^{A(t-s)} (F(s, u(s), (\varphi')^\sigma_{K,u}(s)) - F(s, v(s), (\varphi')^\sigma_{K,v}(s))) ds \Big\| \\
&\leq C_0 \Big(\int_0^t \| F(s, u(s), (\varphi')^\sigma_{K,u}(s)) - F(s, v(s), (\varphi')^\sigma_{K,v}(s)) \big) \| ds) \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \| u - v \|_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad + C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \| \| \varphi'(\sigma(\tau, u(\tau))) - \varphi'(\sigma(\tau, v(\tau))) \| d\tau \Big) ds \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \| u - v \|_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)} \Big([\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \| u - v \|_{C([0,b];X)} \int_0^s \| K(s,\tau) \| d\tau \Big) ds \\
&\leq C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \| u - v \|_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)} \Big([\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \| u - v \|_{C([0,b];X)} \Theta(0,b) b^\alpha \Big) ds \\
&\leq C_0 \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho) \| u - v \|_{C([0,b];X)} \\
&\quad + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \| u - v \|_{C([0,b];X)} \Theta(0,b) b^\alpha \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1(0,b)} \\
&\leq C_0 \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho) \big(1 + [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \Theta(0,b) b^\alpha\big) \| u - v \|_{C([0,b];X)} \\
&\leq C_0 \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho) \big(1 + [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \Theta(0,b) b^\alpha\big) \| u - v \|_{C([0,b];X)} .
\end{aligned}$$

Isto prova que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $S(b)$ e que $\Gamma(\cdot)$ possui um único ponto fixo $u \in S(b)$. Como o operador A é limitado e $F(\cdot, u(\cdot), (\varphi')_{K,u}(\cdot))$ é contínua, segue do anterior que $u(\cdot)$ é a única solução de (2) em $[-p,b]$. ■

3. Conclusão

Nossos estudos permitiram entender e simplificar o Teorema 3.1 presente em [2], além de propor outra maneira de encontrar uma única solução para o problema (2), quando consideramos que A é um operador limitado. Em particular, nota-se que em [2] os resultados são provados assumindo que o operador A não necessariamente seja limitado.

4. Agradecimentos

Meus estudos e meu trabalho de dissertação foram financiados pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo n^{o} 2022/04392-0.

Referências

[1] Driver, Rodney D.A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics. **In: International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics. Academi Press**, 1963. p. 474-484.

[2] HERNÁNDEZ, E. **On explicit abstract neutral differential equations with state-dependent delay.** Proc. Amer. Math. Soc., v. 151, n. 03, 2023. p. 1119-1133.

Apoios:

[1] Universidade Federal de São Carlos. Este autor foi apoiado pela FAPESP
[2] Universidade de São Paulo