Resolução de equações diofantinas lineares via determinantes e frações contínuas

Bonfim, Delfim Dias; Lima, Laura Maria Ferreira e Pimentel, Ryan Rosa [1]

Resumo: *O presente trabalho objetiva a apresentação de um método de resolução de equações diofantinas lineares, utilizando, para tal finalidade, os conceitos de determinantes e frações contínuas. Apresentaremos a definição de frações contínuas simples finita, convergente e alguns teoremas essenciais ao nosso propósito. Em seguida, mostraremos a relação entre determinantes e as frações contínuas. Por fim, abordaremos sobre as equações diofantinas lineares e o método para resolução utilizando frações contínuas e determinantes bem como uma aplicação na resolução de um problema.*

Palavras-chave: *Equações diofantinas lineares, Determinantes, Frações contínuas.*

1. Introdução

Em geral, para resolver equações diofantinas lineares, utilizamos o algoritmo de Euclides estendido (de "trás para frente"). Neste trabalho, apresentaremos um método diferente para resolução de tais equações utilizando frações contínuas e determinantes. Para esse intuito, apresentaremos as definições de frações contínuas simples finita, determinantes e equações diofantinas lineares bem como os resultados fundamentais. Mostraremos como obter soluções particulares e gerais para equações diofantinas lineares utilizando frações contínuas e determinantes, ilustrando a estreita relação entre esses conceitos. Finalmente, vamos resolver uma situação-problema utilizando o método.

2. Resultados obtidos

As demonstrações dos resultados podem ser obtidas em [1], [2] e [3].

Definição 1 *Uma fração contínua simples finita é uma expressão da forma*

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}, \tag{1}$$

sendo $a_2, \dots, a_n$ números inteiros positivos e a_1 um número inteiro qualquer. Os termos $a_1, a_2, \dots, a_n$ são denominados quocientes parciais. Denotaremos (1) por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Teorema 1 *Qualquer fração contínua simples e finita $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Definição 2 *Denominamos convergente de ordem i da fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ o número*

$$c_i = \frac{p_i}{q_i} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i}}}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Teorema 2 *O numerador p_i e o denominador q_i do i-ésimo convergente $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ da fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ satisfazem as equações*

$$\begin{cases} p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

com as condições iniciais $p_{-1} = 0$, $q_{-1} = 1$, $q_{-1} = 1$ e $q_0 = 0$.

Definição 3 *O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n, denotado por $det(A)$, é um número real a ela associado por meio de operações que envolvem todos os elementos da matriz.*

Para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada A de ordem n, podemos usar o conhecido *desenvolvimento de Laplace*, como segue: escolhemos convenientemente uma fila (linha i ou coluna j) de A, de modo que

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}) \text{ ou } det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}),$$

sendo A_{ij} a matriz obtida de A por supressão da sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna.

Teorema 3 (Fórmula do Determinante) *A relação*

$$\begin{vmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{vmatrix} = p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i \tag{2}$$

é verdadeira para todo $i \ge 0$, sendo p_i e q_i o numerador e o denominador, respectivamente, do i-ésimo convergente (c_i).

Teorema 4 *Dada uma fração contínua simples finita $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, o seu n-ésimo convergente é dado por*

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}.$$

Definição 4 *Uma equação da forma $ax + by = c$ ou $ax - by = c$, sendo a, b e c números inteiros não nulos, é denominada equação diofantina linear. Um par ordenado (x_0, y_0) de números inteiros que satisfazem a equação é chamada solução particular da equação diofantina linear.*

Teorema 5 *Sejam a e b inteiros positivos tais que $d = mdc(a, b)$. A equação $ax + by = c$ admite soluções inteiras se e somente se d divide c.*

Se $ax + by = c$ possui solução, é imediato verificar que essa equação é equivalente à $a_1x + b_1y = c_1$, em que $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$ e $c_1 = \frac{c}{d}$ tal que $mdc(a_1, b_1) = 1$. Assim, podemos nos concentrar apenas em $ax + by = c$, tais que $d = mdc(a, b) = 1$.

Teorema 6 *Se a e b são números inteiros positivos, tais que $d = mdc(a, b) = 1$, então a equação*

$$ax - by = 1 \tag{3}$$

possui infinitas soluções inteiras.

Demonstração. Pelo Teorema 1, podemos representar o número racional $\frac{a}{b}$ como uma fração contínua simples e finita

$$\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \dots, a_n]. \tag{4}$$

Os dois últimos convergentes $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$ constituem a "chave" para a solução da equação $ax - by = 1$, pois eles satisfazem as relações do Teorema 3, ou seja, $p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$, e, substituindo $p_n = a$ e $q_n = b$, obtemos

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot p_{n-1} = (-1)^n. \tag{5}$$

Se n é par, segue que $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$ é uma *solução particular* da equação $ax - by = 1$. Se n é ímpar, temos que $(-1)^n = -1$. Neste caso, podemos modificar o último termo a_n da expansão da fração contínua obtida em (4), substituindo

$$\begin{cases} \text{se } a_n > 1, \ \dfrac{1}{a_n} \text{ por } \dfrac{1}{a_n - 1 + \frac{1}{1}} \\ \text{se } a_n = 1, \ \dfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} \text{ por } \dfrac{1}{a_{n-1} + 1} \end{cases} \tag{6}$$

Uma vez que obtivemos a solução particular (x_0, y_0) da equação (3), decorre facilmente a sua *solução geral*. Para isso, consideremos (x, y) outra solução de (3). Logo,

$$ax - by = ax_0 - by_0 = 1 \Rightarrow a(x - x_0) = b(y - y_0). \tag{7}$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue que b divide $x - x_0$. Logo, existe um número inteiro t tal que

$$x - x_0 = bt \iff x = x_0 + bt. \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7), obtemos

$$b(at) = b(y - y_0) \iff y - y_0 = at \iff y = y_0 + at. \tag{9}$$

Portanto, qualquer solução (x, y) da equação $ax - by = 1$ é da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 + at \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Por outro lado, se (x_0, y_0) é uma solução particular de $ax - by = 1$, é fácil ver que as relações dadas em (10) satisfazem a equação. $\square$

As soluções da equação $ax + by = c$ decorrem do Teorema 6. A demonstração pode ser obtida em [1] e [3].

Teorema 7 *Se a e b são números inteiros positivos, tais que $d = mdc(a, b) = 1$ e $(x_0 = q_{n-1}, y_0 = p_{n-1})$ é uma solução de $ax + by = c$, então todas as soluções são dadas por*

$$\begin{cases} x = c \cdot q_{n-1} + bt \\ y = c \cdot (-p_{n-1}) - at \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Problema 1 (OBMEP/2012/N3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

A) 2 B) 5 C) 10 D) 13 E) 23

Seja x o número de laços e y o número de botões, temos $0,07x + 0,04y = 2,99 \iff 7x + 4y = 299$. Utilizando o algoritmo de Euclides e utilizando (6) temos $\frac{7}{4} = [1, 1, 3] = [1, 1, 2, 1] = [a_1, a_2, a_3, a_4]$. Como $n = 4$, segue que $x_0 = q_{n-1} = q_3$ e $y_0 = p_{n-1} = p_3$ são soluções da equação $7x + 4(-y) = 1$. Usando o Teorema 4 e calculando os determinantes, obtemos

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{a_2} & -1 \\ 0 & 1 & \mathbf{a_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a_2} & -1 \\ 1 & \mathbf{a_3} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}} = \frac{5}{3}.$$ Logo, $(x_0, y_0) = (3, 5)$.

Os números x e y devem ser positivos e usando 11) segue que

$$\begin{cases} x = 897 + 4t \\ y = -1495 - 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 897 + 4t > 0 \\ -1495 - 7t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -224,25 \\ t < -213,57 \end{cases}, \ t \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Assim, $t = [-224, -223, \cdots, -213]$. Como as blusas são iguais, gastou a mesma quantidade de laços e botões em cada, segue que o número de blusas é um divisor de 299. Logo, os possíveis valores de t que interessam são $t = -224$ e $t = -221$, isto é,

$$\begin{cases} x = 897 + 4 \cdot (-224) & = 1 \\ y = -1495 - 7 \cdot (-224) & = 73 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 897 + 4 \cdot (-221) & = 13 \\ y = -1495 - 7 \cdot (-221) & = 52 \end{cases}$$

Para atender as exigências do problema, temos que ela usou 52 botões e 13 laços. Portanto, a costureira fez 13 blusas.

3. Conclusão

Diante o exposto, para valores em que a representação da fração contínua não seja muito grande este método torna-se muito mais elegante e interessante que a abordagem usando o algoritmo de Euclides estendido. Portanto, a utilização de determinantes e frações contínuas constitui-se em uma abordagem alternativa para a resolução de equações diofantinas lineares.

Referências

[1] BONFIM, D. D. **Frações contínuas com aplicações**. UFT, Palmas/TO, 2014. Disponível em `https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=920&id2=372`. Acesso em 04.mar.2024.

[2] MOORE, C. G. **An introduction to continued fractions**. Washington: The National Council of Teachers of Mathematics, 1964.

[3] OLDS, C.D. **Continued fractions**. New York: Handom House The L. W. Singer Company, 1963.

Apoios:

[1] Todos os autores são do Instituto Federal do Tocantins (IFTO)-*Campus* Dianópolis. Este trabalho contou com apoio financeiro do Instituto Federal do Tocantins.