XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E SUAS APLICAÇÕES: O MODELO DE GOMPERTZ E O CRESCIMENTO DE TUMORES

Macedo Lima, Davi[1]; de Vasconcelos Feio Messias, Maria Alice[2]

Resumo: *Esse trabalho tem como objetivo introduzir ao seu público o conceito de Equações Diferenciais Ordinárias, bem como algumas de suas aplicações na ciência, com ênfase no chamado Modelo De Gompertz, modelo matemático desenvolvido por Benjamin Gompertz com a finalidade de analisar o desenvolvimento de tumores com o passar do tempo, tema de grande relevância na área da biomedicina.*

Palavras-chave: *Equações Diferenciais Ordinárias, Modelo de Gompertz, Tumores.*

1. Introdução

Denomina-se Equação Diferencial Ordinária (EDO) uma equação cuja a incógnita é uma função (variável dependente) de uma variável (independente), e que envolve derivadas da variável dependente em relação a variável independente. Vejamos a seguir um exemplo de uma EDO:

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

A Equação Diferencial Ordinária exemplificada tem como finalidade encontrar uma função y = y(x) tal que, ao derivarmos, encontremos x^2 como resultado. Nesse caso, a função

$$y = \frac{x^3}{3} + 1$$

por exemplo, é uma solução para esta equação.

As EDOs podem ser classificadas pela sua ordem, grau e linearidade, e modelam diversos fenômenos em várias áreas da ciência, sendo estes, na maioria das vezes, relacionados ao tempo.

Na área da farmacologia, por exemplo, é possível descrever, ao longo do tempo, o comportamento da concentração de uma droga no organismo após a sua ingestão com o uso dessas equações. Na arqueologia, esse tipo de equação é utilizado para esboçar o volume de substâncias radioativas em fósseis no decorrer do tempo, facilitando a datação dos mesmos. Dentre essas e outras inúmeras aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias, destaca-se aquela que é objeto de estudo deste trabalho, isto é, o chamado Modelo De Gompertz, o qual será descrito na seção subsequente.

2. O Modelo de Gompertz

Chama-se tumor qualquer crescimento anormal de um tecido do corpo causado pela proliferação exagerada de células, podendo ser benigno, quando não possui capacidade de se espalhar pelo resto do organismo, ou maligno, quando pode se espalhar e danificar outros tecidos e órgãos, desencadeando, então, o que é identificado como câncer. São diversas as causas que podem provocar o surgimento de tumores, dentre elas, estão os fatores genéticos, a obesidade, a prática do fumo e a ingestão exagerada de bebidas alcoólicas. O tratamento destes tumores pode ser realizado de diferentes formas, dentre as quais, destacam-se a radioterapia, a quimioterapia e o transplante de células-tronco.

Em 1838, com o objetivo de estudar e modelar o desenvolvimento de tumores de forma que mais se aproximasse dos dados médicos de sua época, o matemático inglês Benjamin Gompertz (1779-1865) propôs que o volume de células tumorais se desenvolve ao longo do tempo satisfazendo a seguinte EDO:

$$\frac{dN}{dt} = rNln\left(\frac{K}{N}\right)$$

Onde:

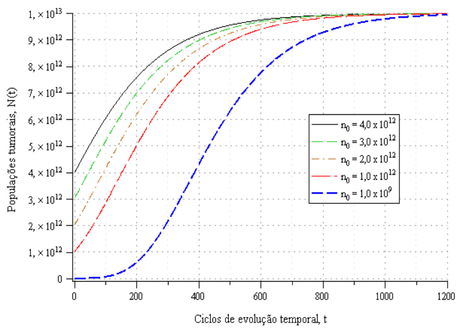
- $N = N(t)$ é a população de células tumorais no instante t;
- r é a constante de crescimento das células;
- K é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis.

A equação, então proposta, ficou conhecida como Modelo de Gompertz, cuja a solução, considerando uma população no instante inicial, ou seja, N(0) = n_0 , é dada pela função

$$N(t) = Ke^{-e^{rt}ln\left(\frac{n_0}{K}\right)}$$

Apropriando-se dos parâmetros utilizados por uma das referências deste trabalho, pode-se construir o gráfico dessa solução, considerando $r = 6.10^{-3}$, $K = 10^{13}$ células, e diferentes valores para a população inicial (n_0):

GRÁFICO DA FUNÇÃO $N(t)$ PARA VÁRIOS VALORES DE n_0



Os gráficos dessas soluções descrevem um crescimento exponencial inicial do volume de células tumorais que desacelera com o tempo. Esse decaimento da taxa de crescimento pode ser justificado pela limitação de nutrientes, aumento da pressão interna ou pela resposta do sistema imunológico do organismo á esse distúrbio.

Observa-se também que seja qual for o valor tomado para n_0, tem-se:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K$$

Ou seja, a população de células tumorais tende a crescer em direção a K na medida que o tempo passa e, mesmo que se por algum motivo a função ultrapasse esse valor, a função continuará tendendo a ele, concluindo-se então que K é a solução de equilíbrio estável do Modelo de Gompertz.

Além disso, verifica-se de maneira relativamente simples que o único ponto crítico, que é ponto de máximo global para a Equação de Gompertz é

$$N = \frac{K}{e}$$

e que seu valor máximo é alcançado em

$$V_{max} = \frac{rK}{e}$$

Nesse trabalho o crescimento do tecido tumoral foi analisado sem considerar o efeito da administração de tratamentos contra esse tumor. Sendo assim, é de se esperar que com a consideração de técnicas de tratamento mencionados anteriormente, o equilíbrio populacional das células tumorais seja alcançado bem antes da capacidade de carga, K, do tumor ou então, que a taxa de crescimento dessa população diminua drasticamente devido à ação dessas técnicas.

3. Conclusão

O trabalho apresentando cumpriu com seu objetivo de inserir, ainda que brevemente, o conceito de Equações Diferenciais Ordinárias e algumas de suas aplicações na ciência. O Modelo de Gompertz, exposto nessa elaboração, é um dos modelos matemáticos mais usados no ramo da biologia para o estudo de populações, sendo desenvolvido aqui não só com a explanação de sua solução geral, mas também de algumas de suas soluções particulares considerando diferentes valores para a população inicial de células tumorais.

Nesse trabalho, observou-se o quanto as modelagens matemáticas estão presentes no cotidiano e podem ser essenciais em avanços de vários âmbitos na sociedade, nesse caso em especial, na área da saúde, podendo ser indispensável em estudos envolvendo os tratamentos de câncer.

Referências

1 Vilhena, M.L.M; **Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias**. 2014.

2 Domingues, J.S; **Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento**. 2011.

Apoios:

[1]Discente do curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Federal do Pará (Campus Salinópolis)
[2]Docente do curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Federal do Pará (Campus Salinópolis)