# O espectro do Operador tipo Grushin sob a Esfera Grushin

Gomes, Clenilton[1]; Marrocos, Marcus[2]

***Resumo:*** *Estamos interessados em estudar o operador $\mathcal{L} := div_\mu \circ \nabla_{sR} = -X_1^*X_1 - X_2^*X_2$ definido em uma Estrutura-Quase-Riemanniana com certas propriedades especiais que irão tornar tal operador semelhante ao operador sub-Laplaciano $\mathcal{G} := \partial_x^2 + x^2\partial_y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ conhecido como Laplaciano-Grushin. O Operador $\mathcal{L}$ é uma generalização de $\mathcal{G}$. Definiremos o conceito de uma estrutura-quase-riemanniana e consequentemente iremos munir a esfera $\mathbb{S}^2$ com tal estrutura, cujo nome será conhecido por Esfera Grushin. Estudaremos o espectro do operador $\mathcal{L}$ definido em coordenadas esféricas que será obtido via parametrização(carta) da esfera para o plano euclidiano.*

***Palavras-chave:*** *Operador Grushin, Laplaciano, Teoria espectral, Estrutura-quase-riemanniana.*

## 1. A Esfera Grushin

**Definição 1** *Dizemos que o par de campos vetoriais $(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)$ é um gerador do colchete de Lie (ou satisfaz a condição de Hormander) se para todo $p \in M$ ocorre:*

$$span\{X(p), Y(p), [X,Y](p), [X,[X,Y]](p), ...\} = T_pM$$

Sejam $X, Y$ campos vetoriais em uma variedade $M$. Se $X$ e $Y$ são linearmente independentes em toda a variedade riemanniana, então eles definem uma métrica riemanniana clássica em $M$ (a métrica para o qual eles sejam ortonormal) e dão a $M$ uma estrutura de espaço métrico.
Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são linearmente dependentes em alguma parte de $M$, então as métricas correspondentes possuem singularidades, no entanto, sob condições genéricas, a estrutura métrica continua bem definida.

Sob hipóteses genéricas definiremos o conjunto $\mathcal{Z}$ como o conjunto das singularidades locais dos pontos de $M$ em que $X, Y$ são paralelos. Este conjunto é uma subvariedade unidimensional de $M$ (possivelmente desconexo). Seja $\mathfrak{D}(q) = span$ de dois campos vetoriais no ponto $q \in M$. Se $dim\mathfrak{D}(q) = 1$ a métrica riemanniana não é bem definida, ou seja, o conjunto Z é singular se $dim\mathfrak{D}(q) = 1$. Uma estrutura-quase-riemanniana é uma estrutura riemanniana se, e somente se, $Z = \emptyset$.

**Definição 2** *Uma $2D$-variedade trivializável quase-riemanniana é um par $(M, \{X_1, X_2\})$ onde $dimM = 2$ e $X_1, X_2 \subset \mathfrak{X}(M)$ é uma família geradora do colche de Lie. Estruturas quase-riemannianas trivializáveis são sempre orientáveis.*

**Definição 3** *Sejam $M, N$ variedades riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}\ \ \forall p \in M\ \ u, v \in T_pM.$$

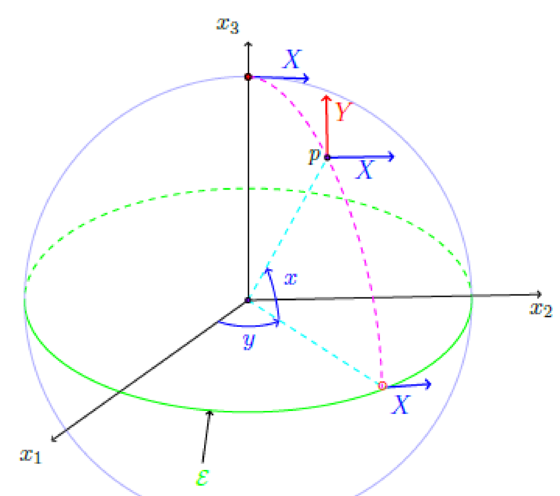
**Definição 4** *Sejam $M$ uma variedade riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Considere $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de $p$ e $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \to \varphi(t,q)$ é a trajetória de $X$ passando por $q$ em $t = 0$. O campo vetorial $X$ é denominado campo de Killing(ou isometria infinitesimal) se, para todo $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ a aplicação $\varphi(t_0) : U \subset M \longrightarrow M$ é uma isometria.*

Considere $M = \mathbb{S}^2$. Definimos o *fluxo* de um campo vetorial $X$ como a aplicação $\phi_t : p \in M \longmapsto \phi_t(p)\ t \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(p) = X(\phi_t(p))$ , $\phi_0(p) = p$ , $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\Big|_{t=0}(p) = X(p)$ , $\forall p \in M$.

Dado $t \in \mathbb{R}$, defina a aplicação $\phi_t : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $\phi_t(p) = (x_1,\ x_2cost - x_3sent, x_2sent + x_3cost)$ $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$. Temos então que $\phi_t(p)$ é a rotação no sentido anti-horário do ângulo $t$ de $p \in \mathbb{S}^2$ em torno do eixo $x_1$. Como $\phi_t$ é linear com respeito a $p$, temos que para todo $u = (u_1, u_2, u_3)\ T_p\mathbb{S}^2$ vale $d\phi_t(u) = (u_1, u_2cost - u_3sent, u_2sent + u_3cost)$. Considere então o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$, logo teremos:
$\langle d\phi_t(u), d\phi_t(v)\rangle = \langle u, v\rangle \Rightarrow d\phi_t : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é uma isometria e vale

$$X_1(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t(p) = -x_3\partial_{x2} + x_2\partial_{x_3},\ \ p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$$

definem campos vetoriais Killing em $\mathbb{S}^2$ que geram as rotações no sentido anti-horário através do eixo $x_1$. Analogamente construímos campos vetoriais de Killing $X_2$ e $X_3$ que também irão gerar as rotações no mesmo sentido de $X_1$, mas sobre os eixos $x_2$ e $x_3$ respectivamente $X_2 = -x_3\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_3},\ X_3 = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}$.
Esses campos vetoriais de Killing tem a propriedade de gerarem o espaço tangente $T_p\mathbb{S}^2$ em cada $p \in \mathbb{S}^2$. Note que $\{X_1, X_2\}$ são linearmente independentes fora do equador $\varepsilon := (x_3 = 0)$. Portanto $[X_1, X_2] = X_3$, então $\{X_1, X_2\}$ é um gerador para o colchete de Lie e portanto determina uma 2D-Estrutura-quase-riemanniana em $\mathbb{S}^2$. Chamaremos esta estrutura de **Esfera Grushin**.




**Observação 1** *A Esfera Grushin: Os campos vetoriais $X$ e $Y$ são os geradores dessa estrutura em coordenas latitude-longitude $(x,y)$. O conjunto de degenerescência coincide com o equador $\varepsilon$. O círculo vermelho no equador significa que o campo vetorial $Y$ é singular nesse local.*

## 2. O Operador sub-Laplaciano associado

Seja $\mu$ a forma volume riemanniana padrão em $\mathbb{S}^2$ induzido pela medida lebesgue euclidiana. Estamos interessados em estudar o espectro do operador definido por

$$\mathcal{L} := div_\mu \circ \nabla_{sR} = -X_1^*X_1 - X_2^*X_2,\ \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$$

onde $\nabla_{sR}$ é o gradiente sub-riemanniano definido por $\nabla_{sR}(\phi) = (X_1\phi)X_1 + (X_2\phi)X_2$ para alguma $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, enquanto o divergente com respeito a $\mu$ satisfaz a seguinte propriedade:
Dado um campo vetorial $W \in$ span $\{X_1, X_2\}$,digamos $W = \alpha X_1 + \beta X_2,\ \alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ então $div_\mu$ é a única aplicação em $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ que irá satisfazer

$$\int_{\mathbb{S}^2} div_\mu(W)\phi d_\mu = -\int_{\mathbb{S}^2} d\phi(W)d_\mu,\ \forall \phi \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$$

onde $d\phi(W)$ é a diferencial de $\phi$ na direção de $W$. Além disso, $X_1^* := -X_1 - div_\mu(X_1)$ e $X_2^* := -X_2 - div_\mu(X_2)$ são as formas adjuntas dos campos vetoriais $X_1$ e $X_2$ respectivamente.
O operador acima é uma generalização do operador **Grushin** definido no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ conhecido por $\mathcal{G} := \partial_x^2 + x^2\partial_y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nosso objtivo agora é mostrar que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{G}$ possuem comportamentos idênticos quando definirmos $\mathcal{L}$ via coordenadas esféricas. Neste caso, o operador tomará a seguinte forma:

$$\Delta_{\mathcal{G}} := \frac{1}{cos\ x}\partial_x(cos\ x\partial_x) + tan^2x\partial_y^2,\ (x,y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi]$$

## 3. Propriedade Espectral

O operador $\mathcal{G}$ pode ser considerado como um 'modelo local'do operador $\Delta_{\mathcal{G}}$ em cada ponto do equador, ou seja, $\Delta_{\mathcal{G}}$ se comporta como o operador $\mathcal{G}$ numa vizinhança do conjunto de degenerescência. Como consequência disso, estudar as propriedades espectrais de $\Delta_{\mathcal{G}}$ é semelhante a estudar as propriedades espectrais de $\mathcal{G}$. Com isso temos o principal resultado a ser enunciado:

**Proposição 4.1** *Seja $\{v_{l,n}\}_{l \in \mathbb{N}}$ uma família de esféricos harmônicos definido por*

$$v_{n,l}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-n)!}{(l+n)!}}P_l^n(senx)$$

*onde $P_l^n$ são as funções de Legendre de primeiro tipo associada. Então o espectro de $\Delta_{\mathcal{G}}$ é dado por:*

$$-\Delta_{\mathcal{G}}v_{n,l} = \lambda_{n,l}v_{n,l}$$

*tal que $\lambda_{n,l} = l(l+1) - n^2,\ \forall |n| \le l \in \mathbb{N}$*

## Referências

[1] Tamekue, Cyprien.; **Null controllability of the parabolic spherical Grushin equation**. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2022.

[2] Tamekue, Cyprien.; **Controllability, Visual Illusions and Perception. Optimization and Control**. Université Paris-Saclay, 2023.

[3] Boscain, Ugo; Laurent, Camille; **The Laplace-Beltrami operator in almost-Riemannian Geometry**. Annales de l'Institut Fourier, 2013.

**Apoios:**

[1]Aluno de Mestrado do PPGM-UFAM. Este autor foi apoiado pela Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(CAPES)
[2]Professor Titular em Universidade Federal do Amazonas.