X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Sobre os Completamentos de $\mathbb{Q}$:

Os Números p-ádicos e o Teorema de Ostrowski

Kaneko, Carolina[1]; Lelis, Jean[2].

Resumo: *Este trabalho apresenta o Teorema de Ostrowski, que caracteriza, a menos de isomorfismo, todos os completamentos de $\mathbb{Q}$. Para isso, apresentamos as definições de norma, sequências de Cauchy, e introduzimos o conjunto dos números reais como um exemplo de completamento dos racionais. Em seguida, são introduzidas as definições de valoração p-ádica e do valor absoluto p-ádico. Apresentamos a construção do Corpo dos Números p-ádicos como outro completamento de $\mathbb{Q}$. Segue então o Teorema principal, que caracteriza todas as normas possíveis nos racionais como equivalentes ou ao valor absoluto p-ádico ou ao valor absoluto usual. Concluímos então que todos os completamentos do corpo dos racionais resultam ou em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{Q}_p$, para algum primo p.*

Palavras-chave: *Teorema de Ostrowski, Números p-ádicos, Completamentos dos Racionais.*

1. Introdução

Ao estudar a distância entre números racionais dada pelo valor absoluto usual, percebemos haver "lacunas" entre esses números, ou seja, os racionais não são *completos*. Um dos modos de contornar esse problema é construir o *Corpo dos Números Reais* $\mathbb{R}$, que é o completamento de $\mathbb{Q}$ com respeito ao valor absoluto usual. No entanto, existem outras maneiras de mensurar distâncias entre racionais. Um exemplo é o *valor absoluto p-ádico*, que permite construir, para cada primo p, o *Corpo dos Números p-ádicos* $\mathbb{Q}_p$, o qual é o *completamento* de $\mathbb{Q}$ a partir do valor absoluto p-ádico. Tais corpos são de extrema importância, em especial na Teoria dos Números. Neste trabalho, além de entender melhor sobre o que são os completamentos de $\mathbb{Q}$, apresentaremos o resultado que permite caracterizá-los:

Teorema 2.1 (Teorema de Ostrowski) *Toda norma não trivial em $\mathbb{Q}$ é equivalente ou ao valor absoluto usual, ou ao valor absoluto p-ádico.*

2. Completamento e os p-ádicos

Definição 3.1 *Uma função $||\cdot|| : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ é dita uma norma sobre $\mathbb{Q}$ se satisfaz as seguintes condições:*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$;
2. $||xy|| = ||x||||y||$, *para todo* $x, y \in \mathbb{Q}$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, *para todo* $x, y \in \mathbb{Q}$ *(desigualdade triangular).*

A partir de uma norma $|||\cdot||$, definimos a distância entre dois racionais x, y como sendo $d(x, y) = ||x - y||$. Então, a cada nova norma, temos uma nova distância.

Lembremos que uma sequência de racionais $\{r_n\}_{n\geq 0}$ é de Cauchy, se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que para quaisquer inteiros $n, m > N$ implica que $||r_n - r_m|| < \epsilon$. Dizemos que $\mathbb{Q}$ é completo com respeito a uma norma $||\cdot||$, se toda sequência de Cauchy de $(\mathbb{Q}, ||\cdot||)$ possui limite em $\mathbb{Q}$. Caso $(\mathbb{Q}, ||\cdot||)$ não seja completo, sabemos que é sempre possível construir seu completamento, ou seja, um corpo $\mathbb{K}$ tal que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$, onde $(\mathbb{K}, ||\cdot||)$ é completo. Segue então a construção do valor absoluto p-ádico:

Fixado um número primo p, definimos a valoração p-ádica em $\mathbb{Q} - \{0\}$ como a função $v_p : \mathbb{Q} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$; tal que para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ com $r \neq 0$, $v_p(r)$ é o único inteiro tal que $r = p^{v_p(r)}\frac{a}{b}$, onde $p \nmid ab$. Usando a valoração p-ádica, definimos o valor absoluto p-ádico de $x \in \mathbb{Q}^*$, dado por

$$|r|_p = p^{-v_p(r)},$$

e para estender a definição para todo racional, consideramos que $|0|_p = 0$. De fato, o valor absoluto p-ádico como definido é uma norma.

Os racionais não são completos com respeito à $|\cdot|_p$. Desse modo, ao realizar o completamento, obtemos $\mathbb{Q}_p$, que possui propriedades diferentes de $\mathbb{R}$. O valor absoluto p-ádico é uma norma *não Arquimediana*, pois possui a propriedade da *desigualdade triangular forte*

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

para todo $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Lembramos que o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é Arquimediano, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|n| > 1$.

Além disso, é possível escrever qualquer $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ como uma série de potência em p, o que chamaremos de *expansão p-ádica de* α:

$$\alpha = a_{-N}p^{-N} + ... + a_0 + a_1p + a_2p^2 + ... = \sum_{i=-N}^{\infty} a_ip^i;$$

Para todo elemento de $\mathbb{Q}_p$, esta expansão existe e é única. Um dos Corpos p-ádicos bastante estudado é o $\mathbb{Q}_2$, e vale notar que a expansão 2-ádica de um número racional coincide com a expansão binária. Como exemplo, o número 23 é escrito como 10111 em binário, e sua expansão 2-ádica é $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$.

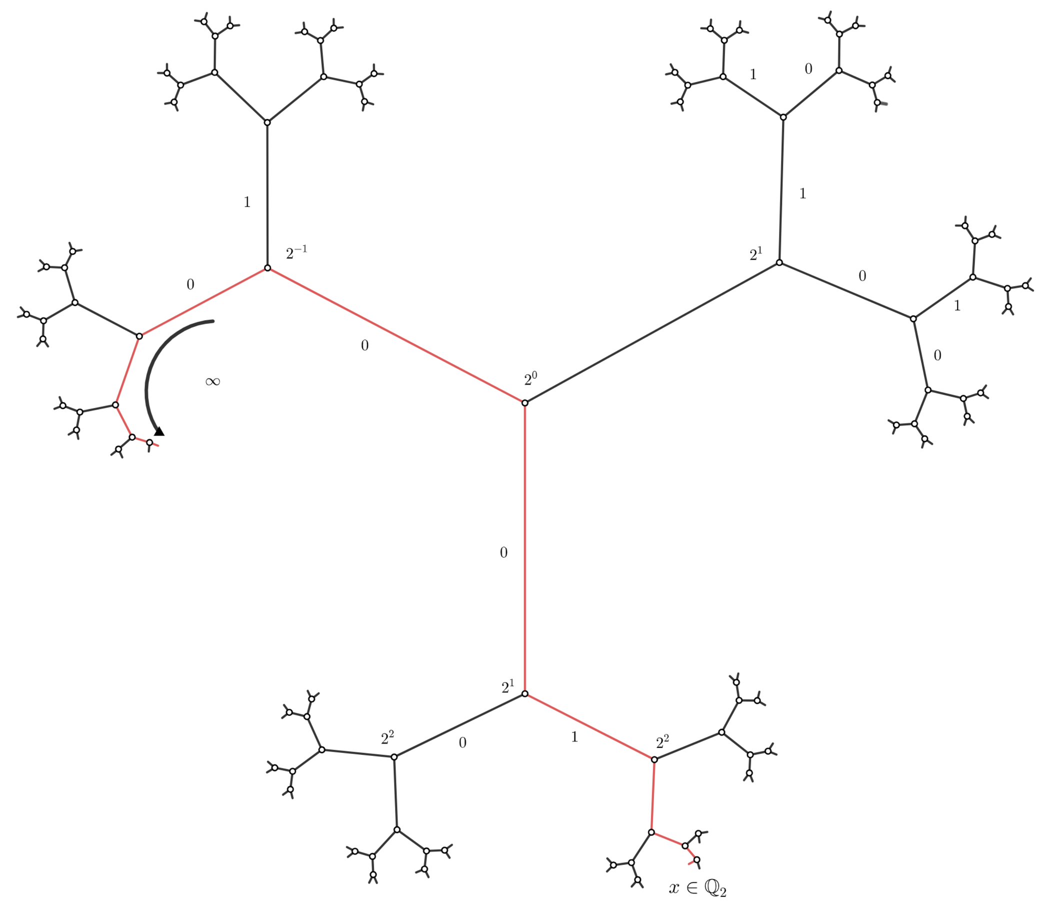

Figure 1: *Árvore de Bruhat-Tits representando $\mathbb{Q}_2$*

Na figura, geodésicas representam números 2-ádicos. Note que o ponto no infinito e o centro são arbitrários, pois a árvore é homogênea.

3. Demonstração do Teorema de Ostrowski

4.0.1 Resultados preliminares

(1) Duas normas $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ em $\mathbb{Q}$ são equivalentes se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|x|_1 = |x|_2^{\alpha}$;

(2) Se $||\cdot||$ é não Arquimediana e não trivial, então existe um inteiro positivo n tal que $||n|| < 1$;

(3) Se $||\cdot||$ é Arquimediana e não trivial, então existe um inteiro positivo n tal que $||n|| > 1$;

4.0.2 Caso não Arquimediano

Considere uma norma $||\cdot||$ não Arquimediana e não trivial. Seja p o menor número que satisfaz (2). Este p é primo, de fato, suponha que p é composto, portando, produto de inteiros positivos a e b menores que p. Assim,

$$1 > ||p|| = ||ab|| = ||a|| \cdot ||b|| = 1;$$

Contudo, isto gera um absurdo: $1 > 1$; ou seja p só pode ser primo.

Seja $q \neq p$ um número primo. Suponha, por absurdo, que $||q|| < 1$. Daí, para α, β grandes o suficiente, temos que $||p^{\alpha}|| < \frac{1}{2}$, e $||q^{\beta}|| < \frac{1}{2}$. Deste modo,

$$1 = ||xp^{\alpha} + yq^{\beta}|| \leq ||xp^{\alpha}|| + ||yq^{\beta}|| < ||x||\frac{1}{2} + ||y||\frac{1}{2} \leq 1.$$

Isto é um absurdo, pois conclui-se que $1 < 1$. Então, para todo q primo diferente de p, $||q|| = 1$.

Considere um número m inteiro, não divisível por p. Então, $m = pa + b$, sendo a, b inteiros e $b < p$. Por construção, $||b|| = 1$; e $||pa|| < 1$, pois $||p|| < 1$ e $||a|| \leq 1$. Pela desigualdade triangular forte, $||pa + b|| \leq max\{||pa||, ||b||\}$. Daí, $||m|| = 1$.

Então, iremos escrever um m inteiro qualquer como $m = p^{v_p(m)} \cdot m'$, tal que $p \nmid m'$. Desse modo,

$$||m|| = ||p^{v_p(m)}|| \cdot ||m'|| = ||p^{v_p(m)}|| = c^{-v_p(m)},$$

com $c = ||p||^{-1} > 1$. De fato, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$, tal que $c = p^{\alpha}$. Assim,

$$c^{-v_p(m)} = (p^{\alpha})^{-v_p(m)} = |m|_p^{\alpha}.$$

Então, $||m|| = |m|_p^{\alpha}$, e por (1), concluímos que $||\cdot||$ é equivalente a $|\cdot|_p^{\alpha}$, para algum primo p.

4.0.3 Caso Arquimediano

Em paralelo, tomemos $||\cdot||$ Arquimediana e não trivial. Chamemos o menor n que satisfaz (3) de n_0, e $||n_0|| = n_0^{\alpha}$, com α real positivo. Assim, é possível escrever n como uma expansão de n_0:

$$||n|| = ||\sum_{i=0}^{S} a_in_o^i||; \text{com } 0 \leq a_i < n_0.$$

Pela desigualdade triangular,

$$||\sum_{i=0}^{S} a_in_o^i|| \leq \sum_{i=0}^{S} ||a_in_o^i|| = \sum_{i=0}^{S} ||a_i||n_o^{\alpha i}.$$

Como $a_i < n_0$, sabemos que $||a_i|| \leq 1$. Além disso, $n_0^{\alpha s} \leq n^{\alpha}$, pois $n_0^s \leq n$. Daí,

$$\sum_{i=0}^{S} ||a_i||n_o^{\alpha i} \leq \sum_{i=0}^{S} n_o^{\alpha s}\left(\frac{1}{n_0^{\alpha(s-i)}}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} n_o^{\alpha}\left(\frac{1}{n_0^{\alpha i}}\right).$$

Chamemos $\Sigma_{i\geq 0}\frac{1}{n_0^{\alpha i}} = C$, sendo C uma constante. Então, temos $||n|| \leq n^{\alpha}C$. Realizando a mesma construção para n^N, teremos $||n^N|| \leq n^{\alpha N}C$. Quando $N \to \infty$, para n fixo, $||n|| \leq n^{\alpha}$. Observe que $n_o^{s+1} > n \geq n_o^s$. Ademais, pela construção feita,

$$n_o^{(s+1)\alpha} \leq ||n|| + ||n_o^{(s+1)} - n|| \implies ||n|| \geq n_o^{(s+1)\alpha} - (n_o^{(s+1)} - n)^{\alpha}.$$

Como $n \geq n_o^s$, e $n_o^{s+1} \geq n$

$$||n|| \geq n_0^{(s+1)\alpha}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^{\alpha}\right] = n_0^{(s+1)\alpha}C' \geq n^{\alpha}C',$$

sendo C' uma constante. Então, temos $||n|| \geq n^{\alpha}C'$. Repetindo o desenvolvimento para n^N, obtemos $||n^N|| \geq n^{\alpha N}C'$. Quando $N \to \infty$, para n fixo, $||n|| \geq n^{\alpha}$.

Para que ambas as desigualdades obtidas sejam verdadeiras, resta que $||n|| = n^{\alpha}$, logo, $||\cdot|| = |\cdot|^{\alpha}$, como queríamos concluir.

□

Referências

[1] KATOK, S. **p-adic Analysis Compared with Real**. Providence: American Mathematical Society, 2007.

[2] GOUVÊA, F. **p-adic Numbers**. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2020.

[3] TAO, T. **Analysis 1**. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2009.

[4] SHOKRANIAN, S., SOARES, M., GODINHO, H. **Teoria dos Números**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1994.

[5] MURTY, M. **Introduction to p-adic Analytic Number Theory**. Providence: American Mathematical Society, 2002.

Apoios: CAPES CNPq FAPESP

[1] Faculdade de Matemática, ICEN-UFPA
[2] Faculdade de Matemática, ICEN-UFPA