Solução de EDP via teorema do passo da montanha

Passarin 1, Carlos Eduardo[1]; Presoto, Adilson Eduardo[2]

Resumo: *No século XIX, o Problema de Dirichlet foi abordado pelo Princípio de Dirichlet, mas suas falhas foram identificadas por Weierstrass. A teoria dos espaços de Sobolev e o método de minimização solucionaram essas falhas, levando ao desenvolvimento de ferramentas como o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [2].*

Palavras-chave: *Equações Diferenciais Parciais, Minimização, Passo da Montanha, Problema de Dirichlet.*

1. Introdução

No século XIX, foi apresentado o Princípio de Dirichlet, que introduziu um funcional de energia para solucionar o problema associado. Por volta de 1870, matemáticos como Weierstrass identificaram falhas nesse princípio, atribuídas à falta de rigor matemático da época. A solução veio com a teoria dos espaços de Sobolev e o método de minimização, introduzido por Hilbert. A partir disso, várias ferramentas poderosas foram desenvolvidas para abordar problemas em Equações Diferenciais Parciais (EDP's), incluindo o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz. Este trabalho explora alguns resultados importantes no estudo de EDP's, que surgiram após os questionamentos de Weierstrass sobre o Princípio de Dirichlet.

2. Resultados obtidos

O Teorema do Passo da Montanha é um resultado fundamental do cálculo variacional, o qual fornece condições sob as quais um funcional possui ponto crítico do tipo "minimax". Introduzido por Ambrosetti e Rabinowitz no final da década de 1970, o teorema é particularmente útil no estudo de equações diferenciais parciais elípticas não lineares e problemas variacionais.

Basicamente, dado um funcional $\varphi \in C^1(\Omega)$, a ideia por trás do método "minimax" é encontrar um valor crítico de φ como um valor "minimax" $c \in \mathbb{R}$ de φ sobre uma classe adequada $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, isto é,

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} \varphi(u).$$

Para abordar esse assunto, é necessário definir alguns conceitos e enunciar resultados auxiliares.

Definição 3.1 *Uma autofunção associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, é uma solução não nula do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Definição 3.2 *Um campo pseudo-gradiente para $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $v : V \to \Omega$, onde $V = \{u \in \Omega \mid \varphi'(u) \neq 0\}$, satisfazendo as seguintes condições*

$$\|v(u)\| \leq 2\,\|\varphi'(u)\|, \tag{1}$$
$$\varphi'(u) \cdot v(u) \geq \|\varphi'(u)\|^2, \tag{2}$$

para todo $u \in V$.

Existem diversas versões do Lema da Deformação, sendo que em todas, o funcional φ satisfaz alguma condição de compacidade. Em particular, trataremos das versões estabelecidas para o caso geral de um espaço de Banach X qualquer. Vejamos uma versão para um funcional sem condição do tipo Palais-Smale.

Teorema 3.1 *Seja $\varphi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 em um espaço de Banach X. Considere $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon, \delta > 0$ tais que*

$$\|\varphi'(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}$$

para todo $u \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, onde S_α denota a α-vizinhança fechada de S definida por

$$S_\alpha = \{u \in X \mid \operatorname{dist}(u, S) \leq \alpha\}.$$

Então, existe uma aplicação contínua $\eta : [0,1] \times X \to X$ tal que, para $u \in X$ e $t \in [0,1]$ tem-se

(i) $\eta(0, u) = u$,

(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$,

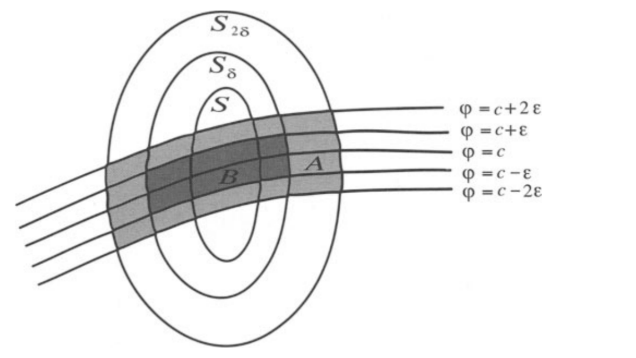
(iii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$,

(iv) $\eta(t, \cdot) : X \to X$ *é um homeomorfismo.*

Observação 3.1 *Denotaremos por φ^c o conjunto de todos os pontos de X no nível c, chamado de conjunto de subnível c de φ, dado por*

$$\varphi^c = \{u \in X \mid \varphi(u) \leq c\}.$$

Figura 2: Representação dos conjuntos $A, B, S, S_\delta, S_{2\delta}$. Fonte: [2].



A partir desse teorema, é possível obter uma versão do Lema da Deformação para funcionais satisfazendo a condição de Palais-Smale, isto é,

"qualquer sequência $(u_n)_{n\geq 1}$ tal que $(\varphi(u_n))_{n\geq 1}$ é limitada e $\varphi'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, possui uma subsequência convergente."

Utilizando o Lema da Deformação, podemos demonstrar o aclamado Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz,

Teorema 3.2 *Sejam X espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale. Se $e \in X$ e $0 < r < \|e\|$ são tais que*

$$a = \max\{\varphi(0), \varphi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) = b,$$

então,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)),$$

é um valor crítico de φ com $c \geq b$.

Demonstração. Note que $\gamma([0,1]) \cap \partial B(0,r) \neq \varnothing$ para todo $\gamma \in \Gamma$, pois $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = e$ e $0 < r < \|e\|$. Portanto,

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \geq b = \inf_{\partial B(0,r)} \varphi \Rightarrow c \geq b.$$

Suponha que c não é valor crítico de φ. Pelo Teorema da Deformação, existe $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

- $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]), t \in [0,1]$, (3)
- $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$. (4)

Pela definição de c, podemos escolher $\gamma \in \Gamma$ tal que

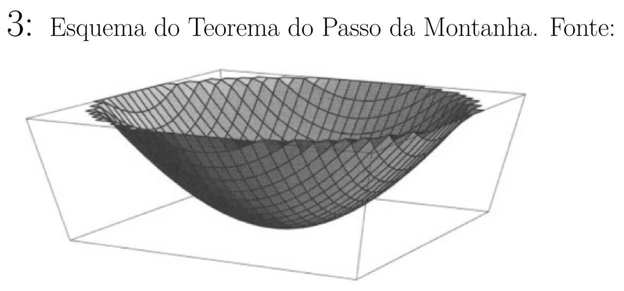
$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon. \tag{5}$$

Defina $\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Por (3) e o fato que $2\varepsilon < b - a$, segue que $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Mas, por (4) e (5), temos

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\hat{\gamma}(t)) = \max_{t\in[0,1]} \varphi(\eta(1, \gamma(t))) \leq c - \varepsilon,$$

pois $\gamma \in \varphi^{c+\varepsilon}$. E isso é uma contradição, pois c é ínfimo.

Figura 3: Esquema do Teorema do Passo da Montanha. Fonte: [2].



Para que se possa compreender como utilizar o teorema acima, veremos um exemplo em que ele pode ser aplicado. Mas antes, precisamos da definição de função Carathéodory e a proposição 2.1 de [2].

Definição 3.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função Carathéodory se valem*

1. $f(\cdot, s)$ é mensurável em Ω para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado.

2. $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $x \in \Omega$

Proposição 3.1 *Sejam $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory satisfazendo a seguinte condição: existem constantes $c, d > 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$, tais que*

$$|f(x, s)| \leq c|s|^\sigma + d.$$

Então, fazendo $F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau)\,d\tau$, o funcional

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x, u)\right] dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

está bem definido e, além disso, $\varphi \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com

$$\varphi'(u) \cdot h = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla h - f(x, u)h]\,dx = 0 \quad \forall u, h \in H_0^1(\Omega).$$

Consideremos agora o seguinte,

Exemplo 3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira suave. Considere o seguinte problema de Dirichlet não linear,*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{sobre } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Então, (6) *possui uma solução clássica não trivial.*

Como $f(x, u) = u^3$ e $3 < \frac{n+2}{n-2} = 5$, o funcional

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{4}u^4\right] dx$$

está bem definido e é de classe C^1 no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, pela proposição anterior. Os pontos críticos de φ são precisamente as soluções fracas de (6). Antes de continuar a demonstração, necessitamos do seguinte lema,

Lema 3.1 *Com relação ao funcional φ definido acima, é válido que*

1. $u = 0$ é um mínimo local estrito de φ;

2. Dado $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$, existe ρ_0 tal que $\varphi(\rho_0 v) \leq 0$.

Assim, podemos provar que

Teorema 3.3 *O problema* (6) *possui uma solução clássica não trivial.*

Demonstração. Já sabemos que $\varphi \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$, então basta mostrar que φ satisfaz Palais-Smale. Seja $(u_m)_{m\geq 1}$ tal que $|\varphi(u_m)| \leq C$, $C > 0$, e $\varphi'(u_m) \to 0$ quando $n \to \infty$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos

$$|\varphi'(u_m) \cdot u_m| = \left|\int_\Omega |\nabla u_m|^2 - u_m^4\,dx\right| \leq \int_\Omega \left||\nabla u_m|^2 - u_m^4\right| dx \leq \|\varphi'(u_m)\| \cdot \|u_m\| \leq \varepsilon_m \|u_m\|.$$

Consequentemente,

$$\varphi(u_m) - \frac{1}{4}\varphi'(u_m)u_m \leq C - \frac{1}{4}\varphi'(u_m)u_m \leq C + \frac{1}{4}\varepsilon_m \|u_m\|$$

e então,

$$\frac{1}{4}\|u_m\|^2 \leq C + \frac{1}{4}\varepsilon_m \|u_m\| \Rightarrow \|u_m\|^2 - \varepsilon_m \|u_m\| - 4C \leq 0.$$

Podemos assumir que $u_m \rightharpoonup \hat{u}$ em $H_0^1(\Omega)$, passando a uma subsequência se necessário. Como $\nabla\varphi(u) = u - Tu$ com T compacto, obtemos

$$u_m = \nabla\varphi(u_m) + Tu_m \to 0 + T\hat{u}.$$

Portanto, $u_m \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Agora, pelo Lema 3.1, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha 3.2, com $e = \rho_0 v$, para concluir que existe u_0 com $\varphi(u_0) = c \geq b > 0 = \varphi(0)$, onde escolhemos $r > 0$ tal que $b = \inf_{\partial B(0,r)} \varphi > 0 = \varphi(0)$.

Logo, u_0 é uma solução fraca não trivial de (6). Para concluir, basta observar que $f(x, u) = u^3$ e $\partial\Omega$ são suaves, e aplicar um argumento de "bootstrap".

3. Conclusão

A abordagem sobre o Teorema do Passo da Montanha, tornou nítido sua importância tanto histórica quanto matemática para a área de Equações Diferenciais Parciais. Além disso, foi possível apreciar seu poder para solução de equações, bem como a belíssima matemática envolvida em sua demonstração, passando por outros resultados bastante conhecidos, como o Lema da Deformação.

4. Agradecimentos

Agradeço às pessoas presentes, aos organizadores do evento pela oportunidade e à FAPESP pelo financiamento do projeto.

Referências

[1] EVANS, L. C.; **Partial differential equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. 749 p. (Graduate Studies in Mathematics; v.19)

[2] COSTA, D. G.; **An Invitation to Variational Methods in Differential Equations**. Boston: Birkhäuser Boston, 2010. (Birkhäuser advanced texts).

Apoios:

[1] Aluno de Mestrado na Universidade Federal de São Carlos
[2] Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos