O problema de Cauchy: visualização geométrica e aplicações

LIBARDI, Camilly [1]; FERREIRA, Fabiana[2].

Resumo:*Este trabalho apresenta o Método das Curvas Características, uma ferramenta para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDP) de primeira ordem com condições iniciais (Problemas de Cauchy). O método simplifica uma Equação Diferencial Parcial para uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) ao longo de curvas que cruzam a condição inicial.*

Palavras-chave:*Equações parciais. Curvas características. Problema de Cauchy.*

1. Introdução

O estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) é importante para compreender diversos fenômenos como transferência de calor, geofísica e elasticidade. Matemáticos como Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Joseph Fourier contribuíram significativamente, desde o desenvolvimento do cálculo até a análise de problemas como o comportamento de ondas vibrantes e a propagação do calor. Estudar EDPs é crucial porque fornece ferramentas para resolver problemas reais, permitindo prever, descrever e controlar sistemas físicos complexos. Nesse sentido, observamos a importância dos métodos de resolução para o entendimento desses problemas. Neste trabalho, vamos apresentar um método que aborda a resolução de uma classe de EDPs chamada de Problemas de Cauchy. Tal método é denominado 'Método das Curvas Características', que, conforme [1], consiste em encontrar curvas ao longo das quais a EDP se reduz a uma equação diferencial ordinária, chamadas curvas características. Integramos a equação diferencial ordinária ao longo dessas curvas para obter a solução.

2. Resultados obtidos

Neste trabalho, vamos abordar **Equações Diferenciais Parciais lineares de 1ª ordem** do tipo:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Quando $c(x,y) = 0$, dizemos que a EDP é homogênea. Caso contrário, ela é não homogênea.

Definição 1 *Uma função $u = f(x,y)$ é solução para (1) se:*

i. $f \in C^2(M)$;

ii. f satisfaz a EDP dada.

Já é conhecido da Teoria Equações Diferenciais Ordinárias os chamados PVIs (Problemas de Valor Inicial) e é possível generalizar o conceito de ***condições iniciais*** impondo o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva ou superfície inicial; o problema correspondente é conhecido como *Problema de Cauchy.* Segue abaixo um exemplo que modela uma equação do transporte e é um Problema de Cauchy onde vamos introduzir a ideia do método das características.

Exemplo 1: Considere o seguinte Problema de Cauchy

$$\begin{cases} 2u_x(x,y) + 3u_y(x,y) = 0 \\ u(x,x) = e^{2x} \end{cases} \tag{2}$$

Solução: Reescrevendo a EDP (2) observamos que

$$(2,3)\cdot(u_x,u_y) = 0,$$

ou seja, a derivada direcional de u na direção do vetor $(2,3)$ é nula, daí a função u é constante quando percorre a direção do vetor $(2,3)$. Todas as retas com essa direção formam a familia das curvas características planas da equação (2), conforme figura 1. Logo se conhecermos o valor de u em qualquer ponto de alguma dessas retas, saberemos o valor de u em todos os pontos da reta. Obtemos essa informação por meio dos pontos de interseção entre as curvas características e a curva inicial $y = x$. Veja figura 1.

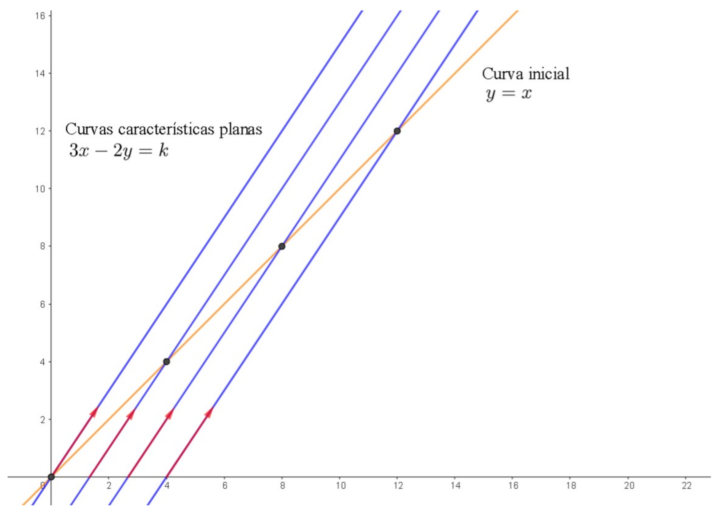

Figura 1: Curvas características e curva inicial da equação (2)
Fonte: Próprio autor

As retas características podem ser descritas por: $3x - 2y = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Como em cada reta u assume valores constantes a solução para (2) será caracterizada por

$$u(x,y) = f(3x - 2y).$$

Além disso, pela curva inicial $y = x$ temos $u(x,x) = f(3x - 2x) = f(x)$, sendo assim pela condição inicial temos que

$$u(x,y) = f(3x - 2y) = e^{6x-4y}.$$

Motivados pelo exemplo acima, segue a definição de curvas características para a equação de transporte para cada ponto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição 2: (Curvas Características): *As retas*

$$x(t) = c(t - t_0) + x_0$$

são chamadas as retas características da equação de transporte $u_t + cu_x = 0$.

Definição 3: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. As curvas características da EDP de primeira ordem linear homogênea*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0,$$

com coeficientes variáveis $a, b \in C^1(\Omega)$, são as curvas $C(t) = (x(t), y(t))$, soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{3}$$

Proposição: *Considere a equação de primeira ordem linear não-homogênea (1) Se u é uma solução para esta equação, então ao longo das curvas características para a correspondente equação homogênea, u satisfaz a equação diferencial ordinária*

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = c(x(t), y(t)).$$

Generalizando a ideia do método das características, segue abaixo um exemplo de um problema de cauchy não-homogêneo:

Exemplo 2: Considere o seguinte Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y = (2y^2 + x)sen(2xy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u\left(x, e^{-2x}\right) = cos^2(xe^{-2x}) \end{cases}$$

Solução: Inicialmente, vamos considerar a equação homogênea associada $2yu_x + u_y = 0$. Temos que as curvas características satisfazem (3):

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) \\ y'(t) = 1 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema de EDO's acima para descobrirmos a família de curvas características.

$$y'(t) = 1 \Rightarrow y(t) = t + k_1 \tag{4}$$

Por (4) temos $x'(t) = 2\cdot(t + k_1)$ logo, $x(t) = t^2 + 2tk_1 + k_2$. Portanto,

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2tk_1 + k_2 = (t + k_1)^2 + k_2 - k_1^2 \\ y(t) = t + k_1 \end{cases}$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e a família de curvas características são parábolas do tipo:

$$x_0 = y_0^2 + k,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e $k = k_2 - k_1^2$, veja Figura 2. Para cada ponto $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ele está na parábola $x = y^2 + x_1 - y_1^2$, que intersecta a curva inicial no ponto (x_0, y_0) onde

$$x_0 = y_0^2 + x_1 - y_1^2, \quad y_0 = e^{-2x_0}.$$

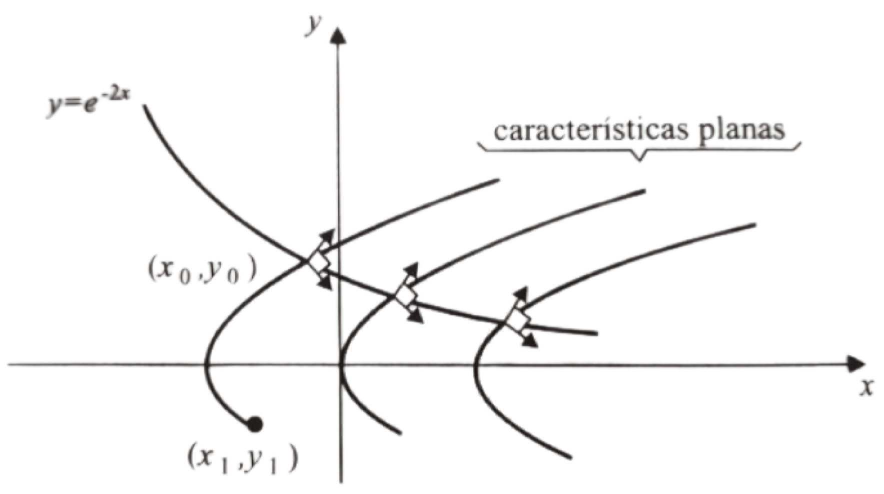

Figura 2: Curvas características e curva inicial da equação
Fonte: IÓRIO, 2018.

Parametrizando a parábola por $s \to (s^2 + x_1 - y_1^2, s)$, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\begin{aligned} u(x_1,y_1) &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{d}{ds}u(s^2 + x_1 - y_1^2, s)\, ds + u(x_0,y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2)\sin(2s^3 + 2s(x_1 - y_1^2))\, ds + u(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Pela condição inicial, temos:

$$\begin{aligned} u(x_1,y_1) &= \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2)\sin(2s^3 + 2s(x_1 - y_1^2))\, ds + \cos^2(x_0y_0) \\ &= \int_{y_0(y_0^2+x_1-y_1^2)}^{y_1(y_1^2+x_1-y_1^2)} 2\sin r \cos r dr + \cos^2(x_0y_0) \\ &= \cos^2(x_1y_1) \end{aligned}$$

Portanto, a solução do problema é $u(x,y) = \cos^2(xy)$.

3. Conclusão

Este estudo ressalta a relevância dos métodos de resolução e de visualização das equações, destacando especialmente o Método das Características.

Referências

[1] BIEZUNER, Rodney Josué. Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II. Minas Gerais: Universidade Federal de Minas Gerais, 2010;

[2] IÓRIO, Valéria. EDP: Um curso de graduação. 4. ed. Rio de Janeiro: 2018 ;

[3] SILVA, Vanessa da Fonseca. Um estudo sobre o método das características para problemas de Cauchy: alguns casos e suas limitações. Campina Grande: Universidade Estadual da Paraíba, 2022;

Apoios:

[1]Universidade Federal do Espírito Santo
[2]Universidade Federal do Espírito Santo