Teorema fundamental da álgebra via grupo fundamental do círculo

Boni, Bruno G.[1]; Mortari, Fernando de L.[2]

Resumo: *O Teorema Fundamental da Álgebra diz que todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa. Neste trabalho, provamos o teorema de uma forma clássica, mas que foge do escopo do enunciado. Demonstramos via resultados e conceitos topológicos como: continuidade, caminhos, homotopia de caminhos, grupo fundamental e espaços de recobrimento.*

Palavras-chave: *Teorema fundamental da álgebra, homotopia, grupo fundamental, espaços de recobrimento.*

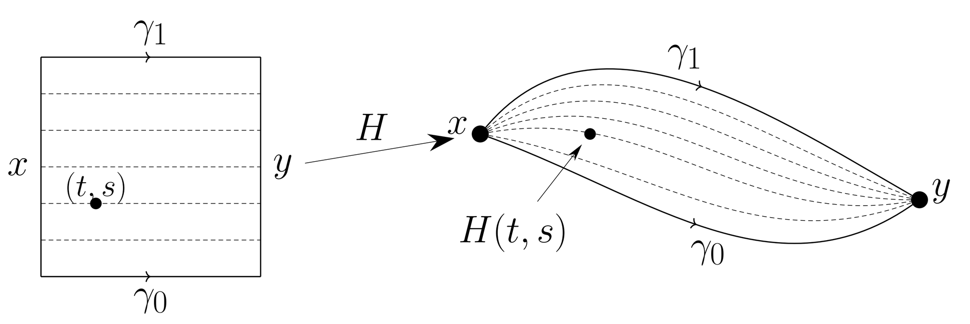
1. Introdução

O Teorema Fundamental da Álgebra diz que todo polinômio não constante com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui uma raiz em $\mathbb{C}$. A primeira menção do teorema foi feita por Peter Roth em 1608. A primeira tentativa de prová-lo foi feita por D'Alembert em 1746. Porém, a prova continha algumas falhas. Sua primeira demonstração plenamente satisfatória foi apresentada na tese de doutorado do matemático Carl Friedrich Gauss em 1797 quando tinha apenas 20 anos ([3]). Todas as demonstrações conhecidas para esse resultado transcendem significativamente a Matemática necessária para enunciá-lo. Uma tradicional prova do teorema é feita em teoria de Variável Complexa via Teorema de Liouville ([2]). O objetivo aqui é demonstrar o teorema com outro método clássico que foge do escopo do enunciado, usando conceitos algébricos como grupos, bem como conceitos topológicos como caminhos, homotopia, espaços conexos por caminhos, espaços simplesmente conexos, grupo fundamental e espaços de recobrimento. Para saber mais sobre esses conceitos ver, por exemplo, [1], [4] e [5].

2. Caminhos, Homotopia e Grupo Fundamental

Um **caminho** sobre um espaço topológico X é uma função contínua $f : I \longrightarrow X$ em que I é o intervalo unitário $[0,1]$. Dois caminhos f e g são ditos **homotópicos** se existe uma **homotopia de caminhos** entre eles, isto é, uma função contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $H(s,0) = f(s)$ para qualquer $s \in I$ e $H(s,1) = g(s)$ para qualquer $s \in I$.
2. O ponto inicial $H(0,t) = x_0$ e o ponto final $H(1,t) = x_1$ são independentes de t;



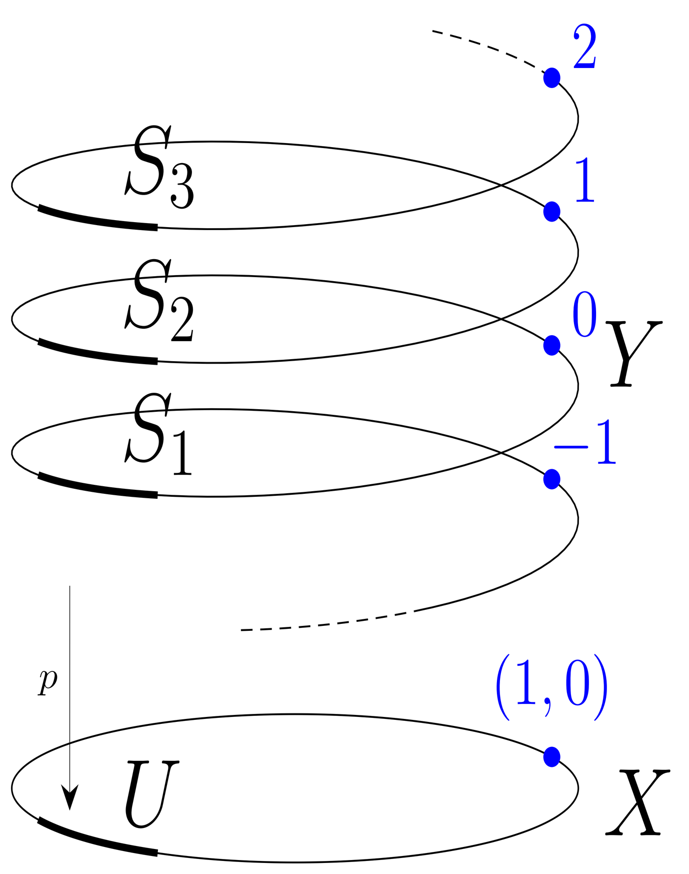
Prova-se que a relação de homotopia de caminhos sobre qualquer espaço topológico é uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos sobre esse espaço. A classe de equivalência de um caminho f sob a relação de homotopia de caminhos é denotada $[f]$ e chamada de **classe de homotopia** de f.

Definimos o produto de caminhos f e g com $f(1) = g(0)$ como sendo o caminho denotado por $f \cdot g$ e dado por

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Definimos também o **produto de** duas **classes de homotopia** por $[f][g] = [f \cdot g]$. Além disso, chamamos de **laços** os caminhos fechados, isto é, que possuem o ponto final igual ao ponto inicial. O conjunto de todas as classes de homotopia $[f]$ dos laços que começam e terminam em um mesmo $x_0 \in X$ é denotado $\pi_1(X, x_0)$.

$\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com respeito ao produto de classes de homotopia. Tal grupo é chamado de **grupo fundamental** de X. O espaço topológico que nos interessa é o círculo unitário ($\mathbb{S}^1$). Denotemos $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ por $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Usando conceitos como **espaços conexos por caminhos**, **espaços simplesmente conexos**, **espaços de recobrimento** e **levantamento de caminhos**, prova-se que o grupo fundamental do círculo é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros ($\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$). O isomorfismo manda um inteiro n na classe de homotopia do laço $w_n(s) = e^{2\pi ins}$, que é um laço que dá $|n|$ voltas no círculo no sentido horário ou anti-horário conforme n seja negativo ou positivo respectivamente. Portanto, compor laços no círculo unitário é, a menos de isomorfismo, a mesma coisa que somar números inteiros.



3. Teorema fundamental da Álgebra

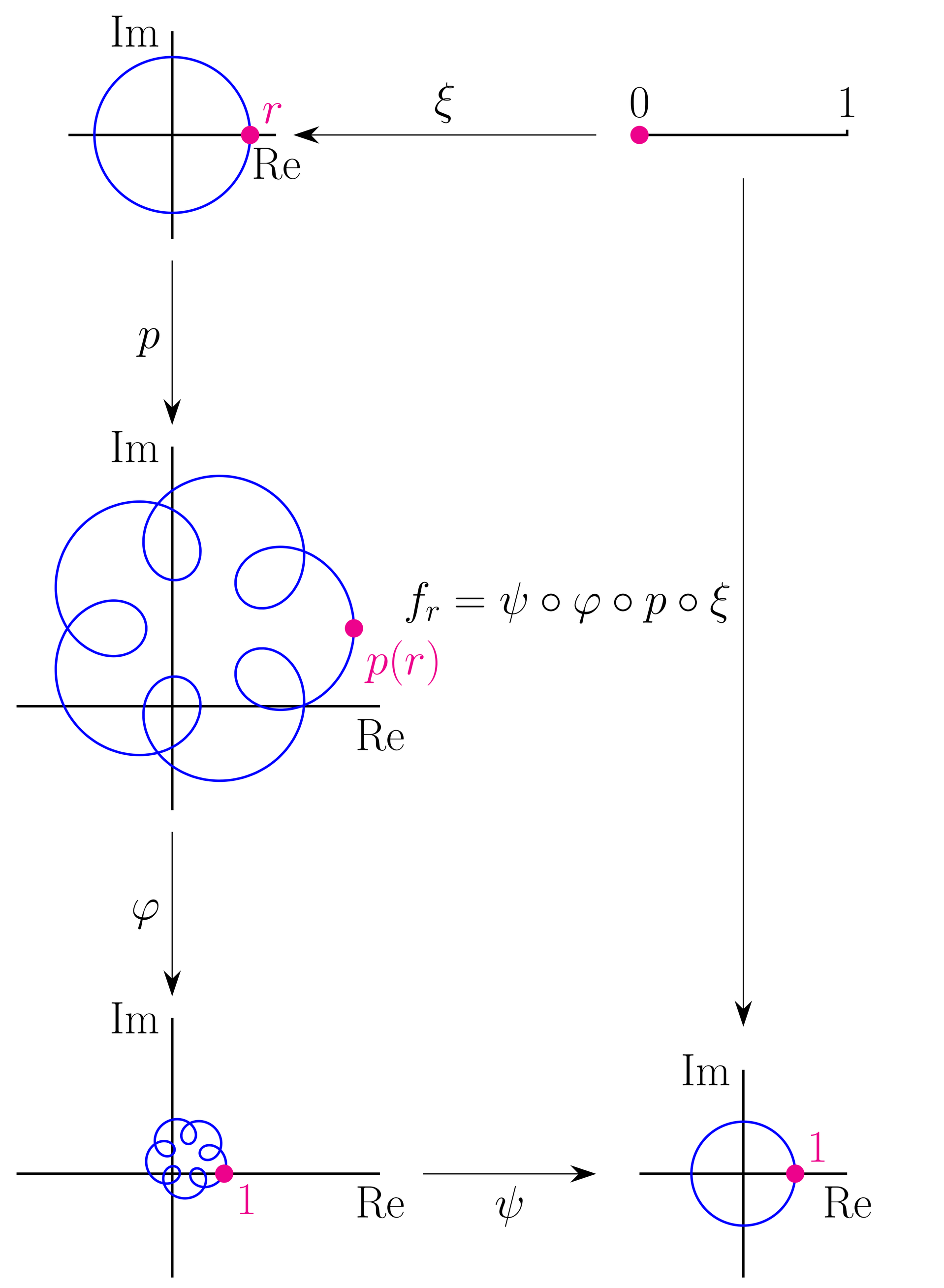
Apesar de Topologia Algébrica ser normalmente "Álgebra servindo a Topologia", as regras se invertem na demonstração do teorema. Ilustraremos uma ideia para a demonstração com um polinômio especifico.

Ideia da demonstração: Considere o polinômio $p(z) = z^5 - 2z^4 + iz^3 + -z^2 + \frac{i}{2}$. Suponha por absurdo que $p(z)$ não possui raízes em $\mathbb{C}$. Para cada r real positivo, considere o laço $\xi_r : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\xi_r(s) = re^{2\pi is}$ que descreve uma volta no sentido anti-horário no círculo com raio r e centro na origem de $\mathbb{C}$. A composição $p \circ \xi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ é um laço sobre $\mathbb{C}$ cuja imagem é a imagem da restrição de p ao círculo com raio r e centro na origem. Esse laço começa e termina em $p(r)$. Para obtermos um novo laço baseado em 1, dividimos a composição por $p(r)$ (podemos fazê-lo pois $p(r) \neq 0$) através da composição de $p \circ \xi$ com a função $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que é tal que $\varphi(z) = \frac{z}{p(r)}$. Para conseguirmos um laço no círculo unitário, normalizamos o nosso laço, dividindo pelo seu módulo através da composição de $p \circ \xi \circ \varphi$ com a função $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que é tal que $\psi(z) = \frac{z}{|z|}$. Assim, obtemos a fórmula

$$\psi \circ \varphi \circ p \circ \xi(s) = f_r(s) = \frac{(p \circ \xi_r)(s)/p(r)}{|(p \circ \xi_r)(s)/p(r)|} = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}$$

que define, de fato, um laço no círculo unitário $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ baseado em 1.

Conforme r varia, f_r é uma homotopia de laços baseados em 1. Uma vez que $f_0(s)$=1 $\forall s \in I$, concluímos, pelo teorema do isomorfismo ($\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1)$), que $[f_r] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ é zero em $\mathbb{Z}$ para todo r, pois o elemento neutro do grupo fundamental é a classe de homotopia dos laços constantes.



Usando que o termo z^5 do polinômio $p(z)$ domina o resto do polinômio quando $|z|$ é muito grande, é possivel mostrar que, para r muito grande, tem-se que f_r é homotópico ao laço w_5.

w_5 é um laço que dá cinco voltas no círculo, enquanto f_r é um laço que dá zero voltas. Pelo teorema do isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ e $\mathbb{Z}$, temos que $0 = [f_r] = [w_5] = 5$, o que é um absurdo de modo que o polinômio $p(z) = z^5 - 2z^4 + iz^3 + -z^2 + \frac{i}{2}$ possui raízes em $\mathbb{C}$. Essa demonstração pode ser generalizada para um polinômio não constante com coeficientes complexos qualquer.

4. Conclusão

Essa pesquisa evidenciou que o Teorema Fundamental da Álgebra ultrapassa, e muito, as fronteiras da Álgebra na forma como se pensava a área na época em que o teorema foi enunciado. Também temos a chance de perceber como duas grandes áreas da Matemática podem estar relacionadas e admirar a beleza disso no processo. Um belo problema com uma bela solução.

Referências

[1] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2001.

[2] NETO, A.L. **Funções de uma variável complexa**. Projeto Euclides, IMPA, 1993.

[3] FINE, B.; ROSENBERGER, G. **The Fundamental Theorem of Algebra**. Springer, 1997.

[4] MARTINS, S.T.; TENGAN, E. **Álgebra Exemplar: um estudo de álgebra através de exemplos**. Projeto Euclides, IMPA, 2020.

[5] KÜHLKAMP, N. **Introdução à Topologia Geral**. Terceira edição, Editora UFSC, 2016.

Apoios:

[1] Afiliação. Este autor foi apoiado por PET Matemática UFSC

[2] Afiliação. Este autor foi apoiado por Departamento de Matemática UFSC