

Henstock Kurzweil Integral and Applications

Araújo, Aryel

Resumo: Nesse trabalho, investigaremos o desenvolvimento de determinados tipos de integrais, como a de Henstock-Kurzweil:

Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita Henstock-Kurzweil Integrável em I se existir um vetor $B \in \mathbb{R}^n$ de modo que para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre γ_ϵ em I que nos garante que se $\dot{P} := (I_i, t_i)_{i=1}^n$ for qualquer partição marcada de I tal que $l(I_i) < \gamma_\epsilon(t_i)$ for $i = 1, \dots, n$, então

$$\|S(f; \dot{P}) - B\| \leq \epsilon$$

O modelo proposto por Henstock teve início a partir da investigação de um processo de integração com o objetivo de reconstruir uma função derivada, e é responsável por abranger uma classe mais ampla de funções do que aquelas presentes nos modelos de Riemann e Lebesgue, sem a necessidade de trabalhar com teoria da medida, como para funções Lebesgue Integráveis. Ao mesmo tempo, mas completamente independente, Jaroslav Kurzweil introduziu em 1957 um conceito equivalente de integração para investigar resultados de dependência contínua.

Esse tipo de integração naturalmente presta mais atenção às marcações do que o conceito de integração mais tradicional, então, a definição é construída permitindo que o $\gamma_\epsilon > 0$, usado na definição da integral de Riemann, seja qualquer função positiva, o que permite uma classe mais ampla de funções ser integrável.

Usando esse tipo de integral, é possível estudar muitos problemas importantes em física com comportamento altamente oscilante, como o pêndulo de Kapitza.

Palavras-chave: Funções Calibre; Integral de Riemann; Integral de Henstock-Kurzweil; Integral de Riemann Generalizada.

1. Introdução

O conceito de integral surge da tentativa de calcular áreas e volumes de figuras e uma das técnicas empregadas é justamente aproximação por figuras conhecidas. Depois, com o passar dos anos, percebe-se que o processo de integração também possui forte ligação com a derivada.

Seu desenvolvimento passa por Riemann, na década de 1850, que separa tais conceitos novamente utilizando limites e somatórios, e equivale ao conceito apresentado por Darboux, quando estamos trabalhando com funções limitadas, que utiliza o conceito sobre integrais superiores e inferiores de uma função limitada em um intervalo.

2. Integral de Riemann

Ao considerar todas as funções em um intervalo onde o processo de integração poderia ser definido, temos que:

Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Riemann-Integrável em I se existir um número $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\gamma_\epsilon > 0$, de modo que se $\dot{P} := (I_i, t_i)_{i=1}^n$ é toda partição rotulada de I , onde $l(I_i) < \gamma_\epsilon(t_i)$, com $i = 1, \dots, n$, então temos

$$|S(f; \dot{P}) - A| \leq \epsilon.$$

Podemos chamar o número A de limite da Soma de Riemann $S(f, \dot{P})$ quando a norma da partição tende a zero, ou seja, $\|\dot{P}\| \rightarrow 0$, e se $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$, então A é dito integral de Riemann de f sobre $[a, b]$, e escrevemos:

$$L = \int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x) dx.$$

3. Integral de Lebesgue

No começo do século XX, Lebesgue propõe um novo conceito de integral, mais geral e que podia integrar uma quantidade maior de funções, o qual resolve vários problemas relativos às integrais, como o problema da validade do Teorema Fundamental do Cálculo, uma vez que segundo Lebesgue, para que o teorema fundamental seja válido, é necessário que a função possua derivada limitada.

Teorema: Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável à Lebesgue se, e somente se, é absolutamente integrável.

Exemplo 1: Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & t \in (0, 1]; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Calculando f' :

$$f'(t) = \begin{cases} 2t \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) + \frac{2\pi}{t} \sin\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & t \in (0, 1]; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

A função f' não é Lebesgue integrável por não ser absolutamente integrável.

4. Conceitos básicos

A integral de Henstock-Kurzweil naturalmente se atenta mais às marcações do que os modelos mais tradicionais de integração, assim, tal conceito é construído permitindo que o $\gamma_\epsilon > 0$ utilizado na definição de Riemann seja qualquer função positiva. Isso permite que uma classe mais ampla de funções seja integrável. Tal $\gamma_\epsilon > 0$ é chamado Calibre, e temos as seguintes definições que podem ser encontradas em [1]:

Se $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$, a função $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ é calibre em I_δ e $\delta(t) > 0$, para todo $t \in I$. O intervalo ao redor de $t \in I$ é controlado pelo calibre δ no intervalo

$$B[t, \delta(t)] := [t - \delta(t), t + \delta(t)].$$

Se $I \subset [a, b]$ é um intervalo e $\dot{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ uma subpartição marcada. Se δ for calibre em I , \dot{P} é δ -fino; então

$$I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)], \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Teorema de Cousin: Se $I := [a, b]$ é intervalo compacto não degenerado em \mathbb{R} e δ é calibre em I , então existe partição de I que é δ -fina.

5. Integral de Henstock-Kurzweil

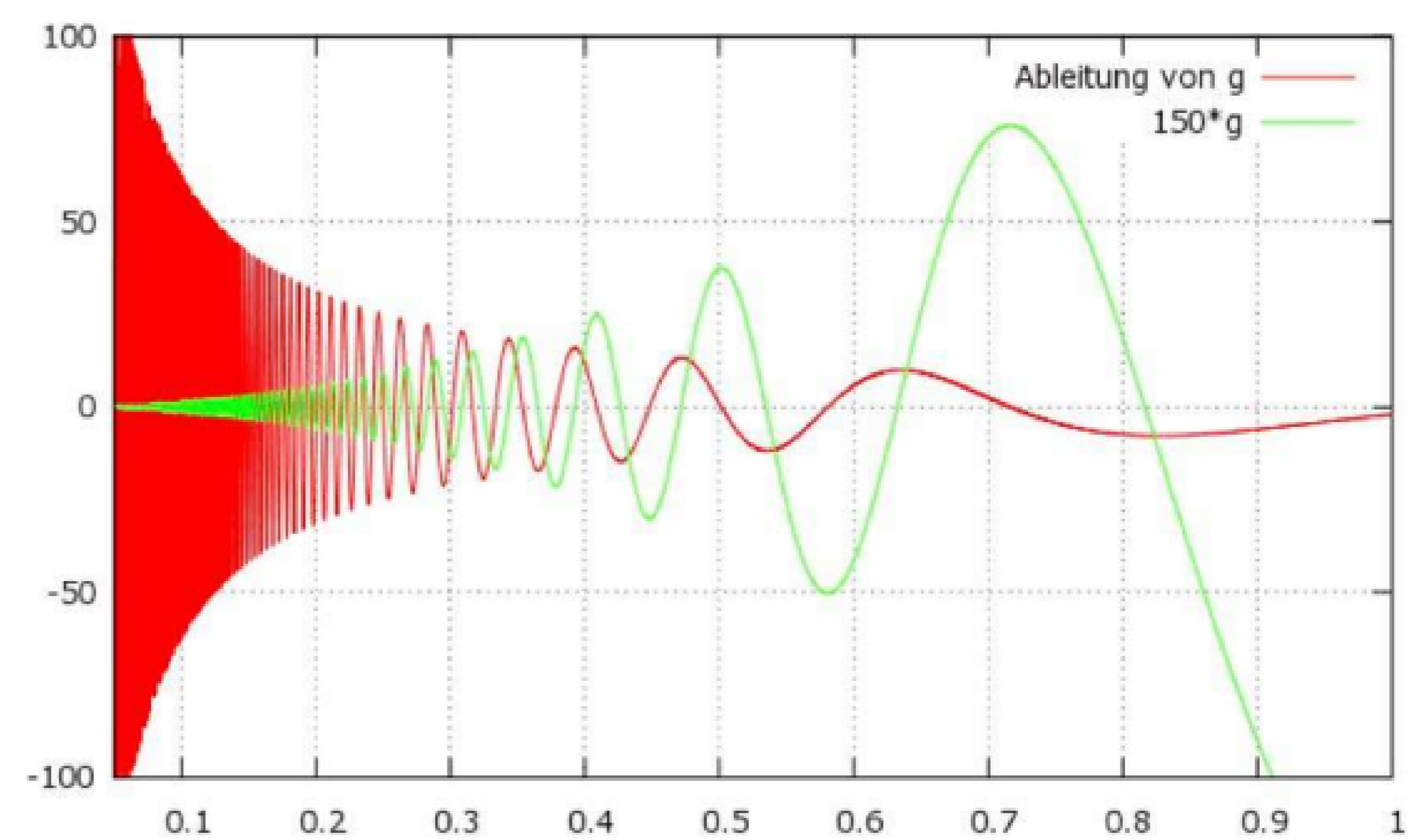
Ao considerar as definições, temos que a Integral de Henstock-Kurzweil é dada pela definição a seguir:

Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Henstock-Kurzweil-Integrável em I se existir um número $B \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe uma função calibre γ_ϵ de I , de modo que se $\dot{P} := (I_i, t_i)_{i=1}^n$ é toda partição marcada de I , onde $l(I_i) < \gamma_\epsilon(t_i)$, com $i = 1, \dots, n$, então temos

$$|S(f; \dot{P}) - B| \leq \epsilon.$$

A existência da função calibre na definição da integral de Henstock-Kurzweil motiva sua generalidade, e é a principal diferença em relação à integral de Riemann.

Exemplo 2: A função f' definida no exemplo 1 é integrável no sentido de Henstock-Kurzweil. Isso segue do Teorema Fundamental do Cálculo. Como f é uma primitiva de f' , então $\int_0^1 f' = f(1) - f(0) = -1$.



6. Conclusão

Os avanços realizados na teoria da integração se deram às tentativas de generalizar o conceito de integral abordado por Riemann e Lebesgue, a construção da Integral de Henstock-Kurzweil partiu da investigação de um processo de integração com o objetivo de reconstruir a função utilizando a derivada, utilizando os conceitos de Riemann e Darboux, e é responsável por abranger uma classe de funções mais amplas que as de Riemann e Lebesgue, sem a necessidade de se trabalhar com teoria de medida, como se faz necessário nas funções Lebesgue-Integráveis.

Referências

- [1] Bartle, R. G.; **A Modern Theory of Integration**. American Mathematical Society, 2001.