Universidade Federal do Espírito Santo

X Bienal de Matemática 2024

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

29 de julho a 02 de agosto de 2024

O Grupo Fundamental do Círculo

Rodrigues, Anna P. Desideri, Patricia E.

Resumo:*O presente trabalho é uma introdução à Topologia Algébrica, através do estudo de um importante invariante topológico: o Grupo Fundamental. Após a introdução de alguns resultados envolvendo a teoria de recobrimento, será apresentado o cálculo do grupo fundamental do círculo S^1.*

Palavras-chave:*Topologia Algébrica, Homotopia, Grupo Fundamental, Espaços de Recobrimento.*

1. Introdução

Por volta do século XIX, o estudo de uma geometria cujo foco são as propriedades de figuras geométricas que se conservam quando todas as propriedades métricas são eliminadas, deu origem ao que modernamente denominamos Topologia. Assim, a Topologia surgiu no cenário matemático e hoje se situa como uma das áreas de grande importância da Matemática Moderna. Sendo uma área muito ampla, com diversas subáreas, a divisão mais básica é: Topologia Geral, Topologia Algébrica e Topologia Geométrica. Em específico, neste trabalho, será trabalhado um conceito muito importante dentro da Topologia Algébrica: o Grupo Fundamental.

A noção de grupo fundamental, conhecida e utilizada atualmente, deve-se ao matemático francês Henri Poincaré (1854-1912). Em Topologia, uma questão basilar é determinar quando dois espaços topológicos são, ou não, homeomorfos. Todavia, não existem métodos específicos para solucionar tal questão, exceto algumas técnicas que podem ser aplicadas em casos particulares. O grupo fundamental surge, então, como uma dessas técnicas, por se tratar de um invariante topológico: se dois espaços topológicos são homeomorfos, então eles possuem o mesmo grupo fundamental. Assumiremos como conhecidas as definições de homotopia de caminhos e do grupo fundamental. E, após a apresentação de alguns resultados envolvendo Espaços de Recobrimento, mostraremos que o grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros.

2. Resultados importantes

Definição 1: Seja $p : E \to B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Um conjunto aberto U de B é dito **uniformemente coberto** por p, se sua imagem inversa $p^{-1}(U)$ puder ser escrita como uma união de abertos disjuntos V_α de E, tais que para cada α, a restrição de p a V_α é um homeomorfismo de V_α em U. A coleção $\{V_\alpha\}$ é denominada uma partição de $p^{-1}(U)$ em **fibras**.

Se um conjunto aberto U de B está uniformemente coberto por p, costuma-se ilustrar o conjunto $p^{-1}(U)$ como uma pilha de fatias, todas com a mesma forma e tamanho que U, flutuando no ar sobre U, em que a aplicação p as comprime sobre U (Figura 1).

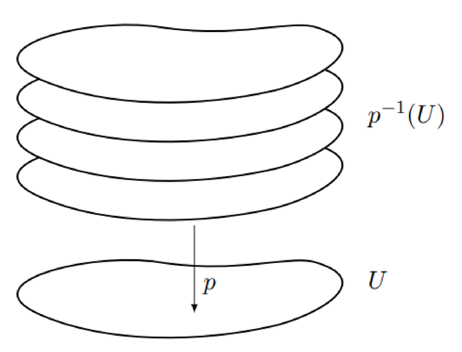

Figura 1: Aberto U uniformemente coberto por p.

Definição 2: Seja $p : E \to B$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se todo ponto b de B tem uma vizinhança U_b que está uniformemente coberta por p, então dizemos que p é uma **aplicação de recobrimento** (ou, simplesmente, um recobrimento) e E é um **espaço de recobrimento** de B.

Definição 3: Seja $p : E \to B$ uma aplicação. Se f é uma aplicação contínua de algum espaço X em B, um **levantamento** de f é uma aplicação $\tilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Proposição: Seja $p : E \to B$ um recobrimento com $p(e_0) = b_0$. Qualquer caminho $f : [0,1] \to B$ iniciando em b_0 tem um único levantamento $\tilde{f}$ em E começando em e_0.

Definição 4: Sejam $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ um recobrimento, $[f]$ um elemento do $\pi_1(B, b_0)$ e $\tilde{f}$ o levantamento de f que inicia em e_0. Definimos a aplicação $\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ por

$$\phi([f]) = \tilde{f}(1).$$

3. O Grupo Fundamental de S^1

Teorema: O Grupo Fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros.

Demonstração: Considere a aplicação $p : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$, $e_0 = 0$ e $p(e_0) = b_0 = (1, 0)$. Primeiramente mostremos que $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$.

(i) $p^{-1}(b_0) \subseteq \mathbb{Z}$. De fato, se $n \in p^{-1}(b_0)$, tem-se $p(n) = b_0$. Assim, $p(n) = (\cos 2\pi n, \operatorname{sen} 2\pi n) = b_0 = (1, 0)$. Logo, $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\mathbb{Z} \subseteq p^{-1}(b_0)$. De fato, se $n \in \mathbb{Z}$, segue que $p(n) = (\cos 2\pi n, \operatorname{sen} 2\pi n) = (1, 0) = b_0$. Ou seja, $p(n) = b_0$. Consequentemente, $p^{-1}(b_0) = n$. Logo, $n \in p^{-1}(b_0)$. Portanto, $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$.

Sendo p um recobrimento de S^1, considere a aplicação

$$\phi : \pi_1(S^1, b_0) \to \mathbb{Z},$$

dada pela definição 4. Mostraremos que ϕ é um isomorfismo de grupos, o que conclui a nossa demonstração.

(iii) Sobrejetividade. Seja $n \in \mathbb{Z}$, o que implica em $n \in p^{-1}(b_0)$. Considere o caminho $f : I = [0, 1] \to S^1$ definido por:

$$f(x) = (\cos 2\pi n x, \operatorname{sen} 2\pi n x).$$

Segue que o caminho $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ dado por $\tilde{f}(x) = nx$ é um levantamento de f, já que a composição $p \circ \tilde{f}$ é:

$$p(\tilde{f}(x)) = p(nx) = (\cos 2\pi n x, \operatorname{sen} 2\pi n x).$$

Note que,

$$\begin{cases} (p \circ \tilde{f})(0) = p(\tilde{f}(0)) = p(n \cdot 0) = p(0) = b_0 \\ (p \circ \tilde{f})(1) = p(\tilde{f}(1)) = p(n \cdot 1) = p(n) = b_0 \end{cases}$$

Logo, $p \circ \tilde{f}$ é um laço em S^1 com base em b_0. Isso implica em

$$[f] = [p \circ \tilde{f}] \in \pi_1(S^1, b_0).$$

E, dessa forma, temos:

$$\phi([p \circ \tilde{f}]) = \phi([f]) = \tilde{f}(1) = n.$$

Portanto, ϕ é sobrejetora.

(iv) Injetividade. Tome $n \in \mathbb{Z}$ e as classes $[f]$ e $[h]$ tais que $\phi([f]) = \phi([h]) = n$. Sejam $\tilde{f}, \tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ os levantamentos de $f, h : I \to S^1$, respectivamente.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{h}"] \arrow[r, "h"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Segue, pela Proposição, que $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(0) = e_0 = 0$. Além disso, pela definição de ϕ temos que $\tilde{f}(1) = \phi([f]) = n$ e $\tilde{h}(1) = \phi([h]) = n$. Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo e $\tilde{f}$ e $\tilde{h}$ têm o mesmo ponto inicial e final, então $\tilde{f}$ e $\tilde{h}$ são homotópicos por caminhos, ou seja, existe uma função contínua $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \tilde{H}(s, 0) = 0 & \text{e} \quad \tilde{H}(s, 1) = n, \\ \tilde{H}(0, t) = \tilde{f}(t) & \text{e} \quad \tilde{H}(1, t) = \tilde{h}(t), \quad \forall s, t \in I. \end{cases}$$

Defina a função $H : I \times I \to S^1$ por $H = p \circ \tilde{H}$. Como p e $\tilde{H}$ são contínuas, H também é contínua por ser uma composição delas. Além disso, tem-se

$$\begin{cases} H(s, 0) = (p \circ \tilde{H})(s, 0) = p(\tilde{H}(s, 0)) = p(0) = b_0, \\ H(s, 1) = (p \circ \tilde{H})(s, 1) = p(\tilde{H}(s, 1)) = p(n) = b_0, \\ H(0, t) = (p \circ \tilde{H})(0, t) = p(\tilde{H}(0, t)) = p(\tilde{f}(t)) = (p \circ \tilde{f})(t) = f(t), \\ H(1, t) = (p \circ \tilde{H})(1, t) = p(\tilde{H}(1, t)) = p(\tilde{h}(t)) = (p \circ \tilde{h})(t) = h(t). \end{cases}$$

Portanto, pelas verificações acima, H é uma homotopia de caminhos entre f e h, ou seja, $[f] = [h]$. Logo, ϕ é injetora. Dessa forma, provamos que ϕ é bijetora.

(v) Homomorfismo. Tomando $[f]$ e $[g]$ em $\pi_1(S^1, b_0)$, sejam $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, respectivamente, os levantamentos de f e g, tais que $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 0$. Vamos supor que $n = \tilde{f}(1)$ e $m = \tilde{g}(1)$. Segue, pela definição de ϕ, que $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = n$ e $\phi([g]) = \tilde{g}(1) = m$. Definamos o caminho $\tilde{\tilde{g}}$ por

$$\tilde{\tilde{g}}(s) = n + \tilde{g}(s).$$

Observe que $p(n + x) = p(x)$, então, tem-se:

$$\begin{aligned} (p \circ \tilde{\tilde{g}})(s) &= p(\tilde{\tilde{g}}(s)) = p(n + \tilde{g}(s)) = p(\tilde{g}(s)) \\ &= (p \circ \tilde{g})(s) = g(s). \end{aligned}$$

Como $(p \circ \tilde{\tilde{g}})(s) = g(s)$, concluímos que $\tilde{\tilde{g}}$ é um levantamento de g que inicia em n (basta tomar $s = 0$ para verificar). Então, o produto $\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}$ está bem definido, pois $\tilde{f}(1) = n = n + \tilde{g}(0) = \tilde{\tilde{g}}(0)$ e é um levantamento de $f * g$, já que $p \circ (\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}}) = (p \circ \tilde{f}) * (p \circ \tilde{\tilde{g}}) = f * g$, o qual inicia em 0. Além disso, $\tilde{\tilde{g}}(1) = n + \tilde{g}(1) = n + m$. Mas,

$$(\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}})(s) = \begin{cases} \tilde{f}(2s), & \text{para } s \in [0, 1/2], \\ \tilde{\tilde{g}}(2s - 1), & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Assim, $(\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}})(1) = \tilde{\tilde{g}}(1) = n + m$. E portanto,

$$\begin{aligned} \phi([f] * [g]) &= \phi([f * g]) = (\tilde{f} * \tilde{\tilde{g}})(1) = n + m \\ &= \phi([f]) + \phi([g]). \end{aligned}$$

Logo, ϕ é um homomorfismo bijetor. Portanto, a aplicação ϕ é um isomorfismo de grupos. ∎

Referências

[1] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[2] HATCHER, A. **Algebraic topology**. Cambridge University Press, 2005.

[3] LIMA, E. L. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 5ª edição, Rio de Janeiro, 2018.

[4] MUNKRES, J. **Topology**. Pretince Hall, 2000.

[5] STOCCO, R. Z.; EIDAM, J. C. C. **Um Estudo de Espaços Topológicos através de seus Grupos Fundamentais**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2010.

[6] MARQUES, J. D. de O. **O Teorema Fundamental da Álgebra via Teoria de Homotopia**. Rio Claro: [s.n.], 2016.

Apoios: