XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

O Teorema da Aplicação Inversa

Adriano da Silva Castro [1], Gelson Conceição G. dos Santos [2]

Resumo: *Neste trabalho, apresentamos o Teorema da Aplicação Inversa. Iniciamos explicando o teorema, sua finalidade e seu surgimento, prosseguimos com alguns resultados preliminares, e então, enunciamos e demonstramos o teorema desejado.*

Palavras-chave: *teorema, aplicação inversa, difeomorfismo.*

1. Introdução

O Teorema da Aplicação Inversa é um importante resultado no estudo das funções de múltiplas variáveis, sendo uma generalização deste mesmo resultado para funções de uma variável, ele permite que uma função diferenciável f seja localmente invertível.

A história deste teorema remonta ao século XVII, com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por matemáticos como Issac Newton e Gottfried Leibniz, ali, usava-se o conceito de invertibilidade nas funções de uma variável, sendo somente a partir do século XIX, quando matemáticos como Augustin-Louis Cauchy e Karl Weierstrass discutiram a formalização de conceitos como continuidade e diferenciabilidade, que o teorema foi melhor desenvolvido, no entanto, a versão atual do Teorema da Aplicação Inversa só foi enunciada e demonstrada no século XX, sendo apresentada por René Thom, em sua tese de doutorado de 1954.

Em suma, o teorema afirma que dada uma função f diferenciável e definida num aberto, se em um ponto de seu domínio, a derivada f' é invertível, então na vizinhança deste ponto, f é invertível e sua inversa f^{-1} é diferenciável.

2. Resultados Preliminares

Apresentaremos alguns resultados preliminares com o objetivo de melhor compreensão do teorema desejado.

Definição 1. *Sejam E e F espaços vetoriais. Chamamos de isomorfismo entre E e F a transformação linear $T : E \to F$ que é bijetora.*

Definição 2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Chamamos de homeomorfismo a aplicação bijetora e contínua $f : U \to V$ definida de modo que a sua inversa $f^{-1} : V \to U$ é também bijetora.*

Definição 3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Chamamos de difeomorfismo a aplicação bijetora e diferenciável $f : U \to V$ definida de modo que a sua inversa $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável.*

Definição 4. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Chamamos de difeomorfismo local a aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida de modo que, para $a \in U$, existe $B(a;\delta) \subset U$ tal que $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Teorema 1. *Sejam o conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$. Se para algum $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $B = B(a;\delta) \subset U$ e, para quaisquer $x, y \in B$ tem-se $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$.*

Teorema 2. *Seja $f : U \to V$ um homeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se para algum $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível, então o homeomorfismo inverso $g = f^{-1} : V \to U$ é diferenciável no ponto $f(a)$, com $g'(f(a)) = [f'(a)]^{-1}$.*

Lema. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $g : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $a \in U$, com $g'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sendo sobrejetora. Se a é um ponto de mínimo local de $\|g(x)\|$, $x \in U$, então $g(a) = 0$.*

3. Teorema da Aplicação Inversa

Teorema da Aplicação Inversa: *Sejam o conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe $B = B(a;\delta) \subset U$ de modo que $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Demonstração. Diminuindo δ suficientemente, podemos admitir que $\overline{B} = B[a;\delta] \subset U$ e que f é injetora em $\overline{B}$, então f é um homeomorfismo de B sobre $f(B)$. Além disso, podemos supor que, para todo $x \in B$, $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Então, pelo Teorema 2, é suficiente mostrarmos que $f(B) = V \subset \mathbb{R}^m$ é aberto.

Sejam $q = f(p)$, $p \in B$ e $S = S[a;\delta]$ a fronteira de $\overline{B}$, a injetividade de $f|_{\overline{B}}$ garante que $q \notin f(S)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $\|f(x) - q\| \geq 2\epsilon$, $\forall x \in S$, pois S é compacto. Agora basta mostrarmos que $B(q;\epsilon) \subset V$.

Tomemos $y \in B(q;\epsilon)$, definindo $g(x) = \|f(x) - y\|$, o Teorema de Weierstrass garante que g possui máximos e mínimos. Como $f|_{\overline{B}}$ é injetora, para $x \in \overline{B}$, não se tem $\min\{g(x)\}$ para nenhum $x \in S$, pois $x \in S \Rightarrow \|f(x) - y\| \geq \epsilon$, enquanto que $\|q - y\| < \epsilon$, concluímos então que $\min\{g(x)\}$ ocorre em um ponto $x_0 \in B$. Pelo Lema anterior, $\min\{g(x)\} = 0$, então $f(x_0) = y$, onde $f(x_0) \in V$, portanto $y \in V$.

Logo, $B(q;\epsilon) \subset V$, então V é aberto e pelo Teorema 2, $f|_B$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V \ni f(a)$. O que demonstra o teorema. □

4. Agradecimentos

Ao Prof.Dr.Gelson Conceição G. dos Santos pela dedicação em sua orientação, ao PPGME-UFPA e a CAPES pelo apoio necessário, e a XI Bienal pela oportunidade de apresentação deste trabalho.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. **Análise Real Vol.2, Funções de N Variáveis**. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

Apoios: CAPES, CNPq, FAPESP, INCTMat

[1] Filiação: Universidade Federal do Pará
[2] Filiação: Universidade Federal do Pará