Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

OFICINA

Fractais, desenhe seus próprios!

Um convite para experimentar e criar a complexidade do nosso mundo através das lentes dos fractais.

Figliaggi, Bella [1] e Bian, Zheng[2]

Resumo: *Fractais, caracterizados por sua geometria complexa e apelo artístico, serão apresentados de forma acessível, via Sistema de Funções Iteradas de contrações lineares e translações na reta e no plano. Com softwares os estudantes poderão desenhar e gerar suas próprias imagens fractais.*

Palavras-chave: *fractais, sistemas de funções iteradas, contrações, álgebra linear.*

1 INTRODUÇÃO

As nuvens, as montanhas e os vasos sanguíneos são exemplos de elementos presentes no cotidiano os quais não são facilmente descritos pela geometria clássica. Figuras geométricas caracterizada por suas rugosidades e por terem auto-similaridade, isto é, mudanças de escalas não alteram a figura, foram denominadas de Fractais, termo criado pelo matemático Benoît Mandelbrot em 1975.

Os fractais de interesse da oficina são aqueles gerados por Sistemas de Funções Iteradas (SFI), isto é, uma coleção de funções que podem ser infinitamente compostas umas com as outras. Contrações lineares e afins atuando na reta e no plano são fontes ricas de exemplos de fractais. Desse modo, o entendimento entre a relação da lei da transformação com as mudanças geométricas feitas pela mesma em uma determinada região do espaço, por exemplo, se expande, contraí, translada e entre outras é importante para a visualização do fractal que essa está construindo.

[1]ICMC-USP. Esta autora foi apoiada pela FAPESP 2023/06566-8.
[2]ICMC-USP. Este autor foi apoiado pela FAPESP 2018/26107-0.

2 OBJETIVO

Apresentar os conceitos básicos para o desenvolvimento da teoria de Sistema de Função Iteradas com o objetivo de geração de fractais. Para isso, serão apresentados exemplos, propostas de atividades e por fim a utilização de softwares.

3 METODOLOGIA

3.1 Imagens e intuição

Nessa oficina, os Fractais abordados serão aqueles gerados por um sistema de funções iteradas. Alguns das figuras possíveis de construir com essa abordagem são: Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch e Samambaia de Barnsley. Desse modo, essa abordagem é uma importante ferramente na construção e entendimento de fractais.

3.2 Um simples sistema de funções iteradas de contrações

Um sistema de funções iteradas consiste em uma coleção de funções que podem ser compostas uma com as outras infinitamente. Para definir um sistema de funções iteradas é necessário um espaço métrico e uma coleção de funções definidos nesse espaço.

O estudo do SFI exige a compreensão das mudanças geométricas feitas por uma transformação em algum espaço. Desse modo, o conceito de expansão, contração, translação e rotação é de interesse do estudo. As transformações afins apresentam uma importante classe de funções que permitem a investigação desses conceitos e a geração de fractais.

Exemplo 3.1 (Um simples sistema de funções iteradas) *Considere na reta real o conjunto* $[0,1]$*, ou seja,* $[0,1]$ *é o espaço de interesse. Sejam* $f_i : [0,1] \to [0,1]$ *com* $i = 1, 2$ *definidas por* $f_1(x) = \dfrac{x}{3}$ *e* $f_2(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$.

As mudanças que esse sistema faz no intervalo $[0,1]$ podem ser vista na Figura 1.

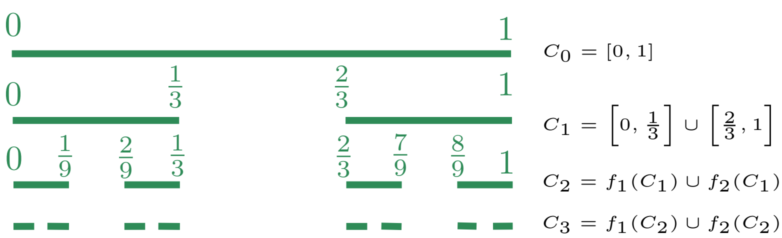

Fig. 1: Fonte: Autoria própria

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $C_n = f_1(C_{n-1}) \cup f_2(C_{n-1})$, conforme ilustrado na Figura 1. O objetivo é entender o que ocorre quando tomado n tendendo para infinito. O resultado desse processo é o Fractal chamado Conjunto de Cantor.

Contração. Tanto f_1 e f_2 possuem uma importante característica: diminuem as distâncias entre os pontos em uma proporção menor que um. Considere por exemplo f_1 e dois pontos quaisquer $x, y \in [0,1]$, f_1 diminuí a distância desses pontos em $\frac{1}{3}$

$$|f_1(x) - f_1(y)| = \left|\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right| = \frac{1}{3}|x - y|.$$

Com esse comportamento, é possível prever a órbita, ou seja, a trajetória de qualquer ponto sobre várias composições de f_1. Assim, seja $x \in [0,1]$, temos

$$0 \leq f_1(x) \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq f_1^2(x) \leq \frac{1}{9}, \quad 0 \leq f_1^3(x) \leq \frac{1}{27}, \quad 0 \leq f_1^4(x) \leq \frac{1}{81},$$

então $0 \leq f_1^n(x) \leq \frac{1}{3^n}$.

Convergência. Considerando n cada vez maior, obtemos que $f_1^n(x)$ se aproxima de zero e denotamos $f_1^n(x) \to 0$.

Ponto fixo e atrator. O ponto zero possuí a propriedade de ser um ponto fixo para f_1, isto é, $f_1(0) = 0$. Com a conta $f_1^n(x) \to 0$ conseguimos que o ponto zero está atraindo as trajetórias de todos os pontos $x \in [0,1]$ para próximo dele.

Todas as funções que diminuem distâncias possuem ponto fixo? O ponto fixo dessas funções é único? São alguns dos questionamentos que o Exemplo 3.1 deixa. Essas perguntas são respondidas no Teorema de ponto fixo de Banach. Para isso, é necessário alguns formalizações vista no Exemplo 3.1.

Definição 3.1 *Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função. Se existir uma constante $\lambda \in [0,1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$ então f é uma contração.*

No Exemplo 3.1 a distância em $[0,1]$ é a função módulo, ou seja, $d(x,y) = |x - y|$ e foi visto que $|f_1(x) - f_1(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$, ou seja, f_1 é uma contração.

Teorema 3.1 (Teorema de ponto fixo de Banach) *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então existe um único ponto fixo $p \in M$.*

Com isso, o Teorema estabelece o resultado que foi visto acontecer com a função f_1 no Exemplo 3.1. O termo completo no Teorema exige que toda sequência do espaço em questão que seus termos se aproximam convirja para algum ponto. Como será trabalhado principalmente com o espaço $\mathbb{R}^n$ ou compactos desse espaço, essa condição sempre estará satisfeita.

Considerando (M, d) um espaço métrico e N contrações $f_i : M \to M$, defina-se $B(A) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$, em que A é um conjunto compacto de M. O fractal é obtido a partir do limite $B^n(A)$ quando tomado n tendendo para infinito, sendo A um conjunto compacto qualquer de M. Observe-se que B será uma contração e com isso é possível aplicar o Teorema anterior, garantindo que esse limite exista.

No Exemplo 3.1 como f_1 e f_2 são contrações, o operador B visualiza como as funções f_1 e f_2 agem no conjunto todo, ao invés de atuar nos pontos, ele age no que é chamado de espaço das figuras contraindo as distâncias entre esses e pelo resultado anterior é atraído para um ponto fixo, que nesse caso é o Conjunto de Cantor.

3.3 Vetores no plano, transformações lineares e afins

Considere dois vetores $v = (a, b)$ e $u = (x, y)$ no plano e um número real α, defina-se as operações:

- **Multiplicação por escalar**: $\alpha v = (\alpha a, \alpha b)$. Ou seja, o vetor v é aumentado ou diminuído em uma proporção α, podendo também mudar o sentido caso $\alpha < 0$.
- **Adição de vetores**: $v + u = (a + x, b + y)$.

Uma **transformação linear** definida em algum espaço Euclidiano são as funções $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que $L(\alpha x + y) = \alpha L(x) + L(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Toda transformação linear no espaço euclidiano pode ser vista como multiplicação de uma matriz quadrada de dimensão igual ao do espaço por uma matriz coluna que representa o vetor que a transformação está atuando. Em particular, no plano uma transformação linear é dada na forma $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, ou ainda,

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Observe que qualquer transformação linear possuí o zero como ponto fixo, visto que $L(0) = L(0x) = 0L(x) = 0$.

A **translação** é uma operação que move uma figura de um ponto a outro, mantendo sua forma, orientação e tamanho. Dado vetor v de translação, todo vetor u é transformado do mesmo jeito $u \mapsto v + u$.

Por fim, uma **transformação afim** no plano é a composição de uma transformação linear com uma translação, ou seja, T é uma transformação afim se $T(x, y) = L(x, y) + (e, f)$, onde $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ é uma transformação linear, assim

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Transformação Linear}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{\text{Translação}} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix},$$

ou seja, uma transformação afim é a aplicação de uma transformação linear com uma translação no plano.

Desse modo, trabalhar com SFI no plano considerando transformação afins é equivalente a trabalhar com matrizes, sendo assim, é necessário o estudo de multiplicação de matrizes afim de compreender as interadas de T.

Exemplo 3.2 *Considere as transformações afins em $\mathbb{R}^2$ dadas por*

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Observe que cada f_i diminuem os vetores pela metade, com respeita a distância usual em $\mathbb{R}^2$ definida por $d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$.

Considere o triângulo A com vértices $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, 0)$, com isso $f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$ resulta na união dos triângulos representado na Figura 2.

Por fim, considere $B(A) = \bigcup_{i=1}^{3} f_i(A)$, sobre um processo iterativo de aplicações de B temos que $B^n(A)$ converge para o Triangulo de Sierpinski.

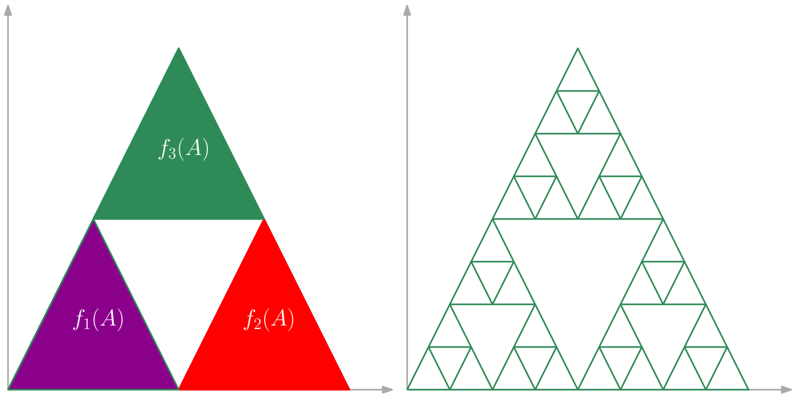

Fig. 2: Autoria própria

3.4 Proposta das Atividades

A oficina será separada em dois momentos. Inicialmente serão apresentados os principais conceitos matemáticos a serem abordados durante a oficina; juntos iremos investigar dois exemplos de sistemas de funções iteradas. No segundo momento, os participantes poderão utilizar softwares, e.g. `https://github.com/gongzhang/ifs-fractal-playground.git`, para gerar os fractais de acordo com seus próprios designs, utilizando o conhecimento e as técnicas do primeiro momento.

4 CONCLUSÕES

Fractal desperta o interesse tanto pelo seu aparecimento em objetos do cotidiano, quanto pelo seu caráter artísticos. A utilização do Sistema de Funções Iteradas para geração dessas geometrias é uma forma dinâmica e acessível ao público, desde alunos do ensino superior a do ensino médio.

Bibliografia

[1] BARNSLEY, M.; **Fractal everywhere**. Academic Press, 1988.

[2] GHARAEI, M.; **Iterated Function Systems of Interval Maps**. [Thesis, fully internal Universiteit van Amsterdam], 2017.

[3] MANDELBROT, B.; **The fractal geometry of nature**. W.H Freeman and Company, 1982.