



# Mosaicos de Escher

Um encontro entre a  
arte e a matemática

Andréia Araújo de Farias Aquino ■

Luciana Yoshie Tsuchiya ■

Thiago Vieira da Silva ■

# Quem foi Escher?



Escher, M. C., "Autorretrato",  
1943, giz litográfico

Maurits Cornelis Escher, Leeuwarden, 17 de Junho de 1898 — Hilversum, 27 de Março de 1972, dedicou sua existência e trabalho às artes gráficas.

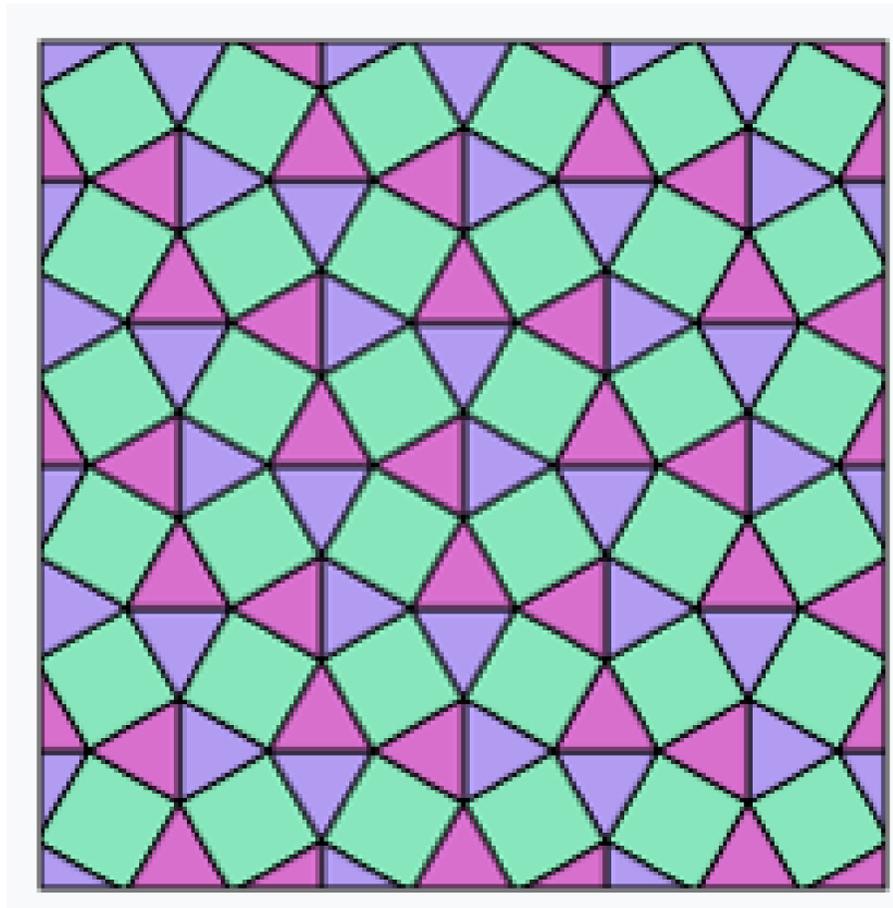
Não foi aluno excepcional: suas notas eram boas em desenho, mas medianas em matemática.

No entanto ele sabia aplicar intuitivamente teorias geométricas, que desconhecia completamente, nos seus desenhos.

*Por que a arte de Escher é tão especial ?*

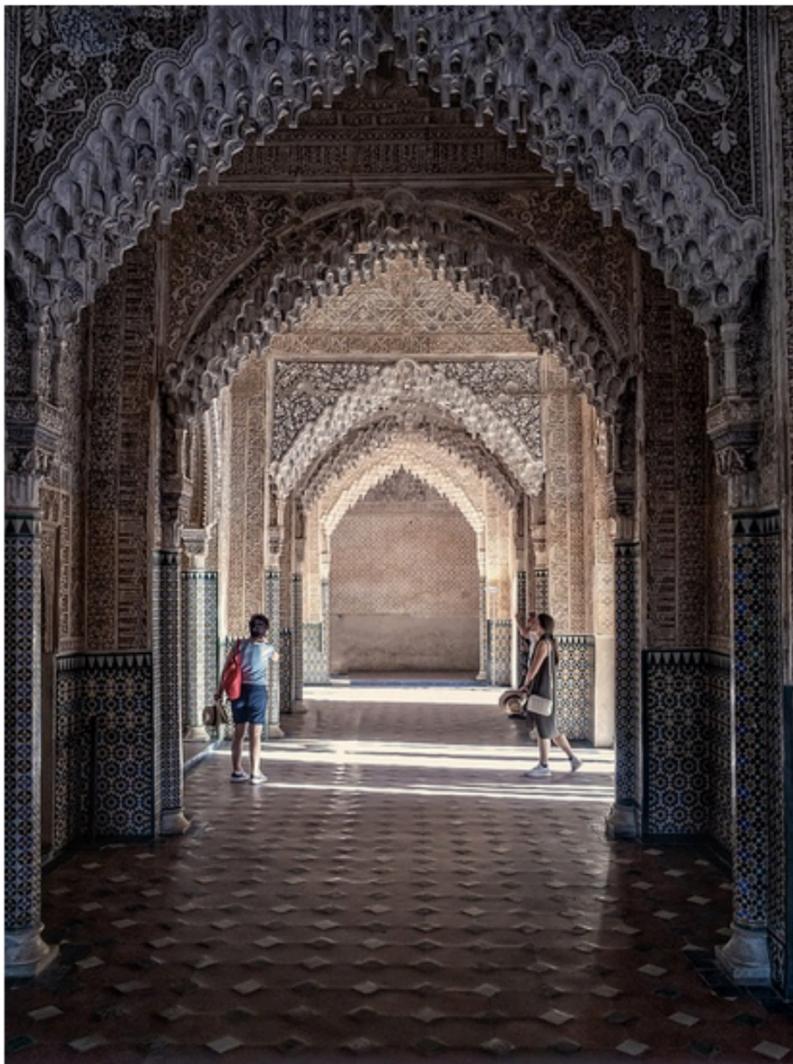
# | Tesselações

Escher praticava a técnica da tesselação, que consiste em recobrir uma superfície bidimensional (um plano), tendo, como unidades básicas, polígonos congruentes ou não, sem que existam espaços entre eles.

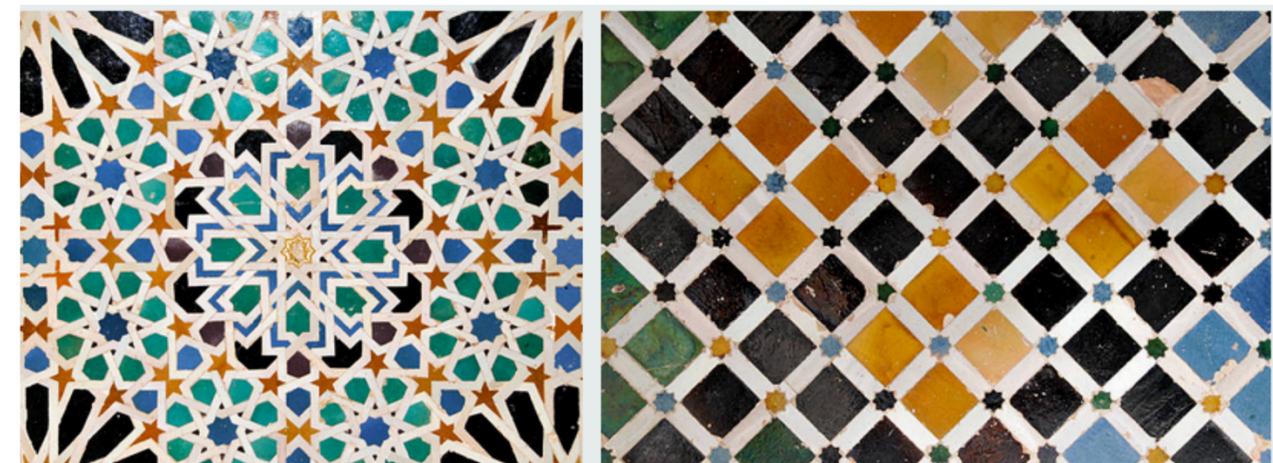


# Influências sobre Escher

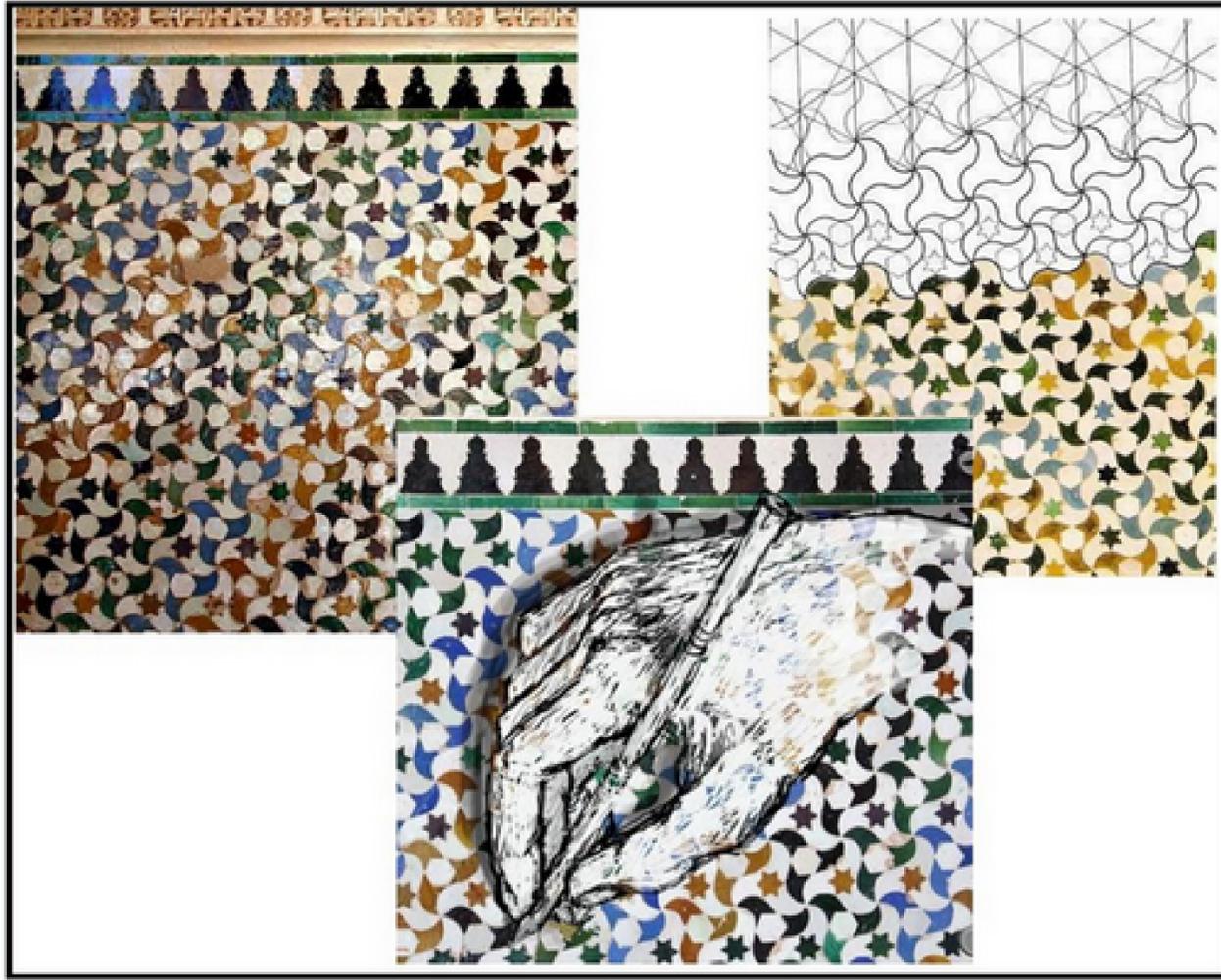
*Escher viajou para o Mediterrâneo no início dos anos 20 e foi profundamente influenciado pelas maravilhas do Palácio Alhambra, projetado por mouros, em Granada, Espanha*



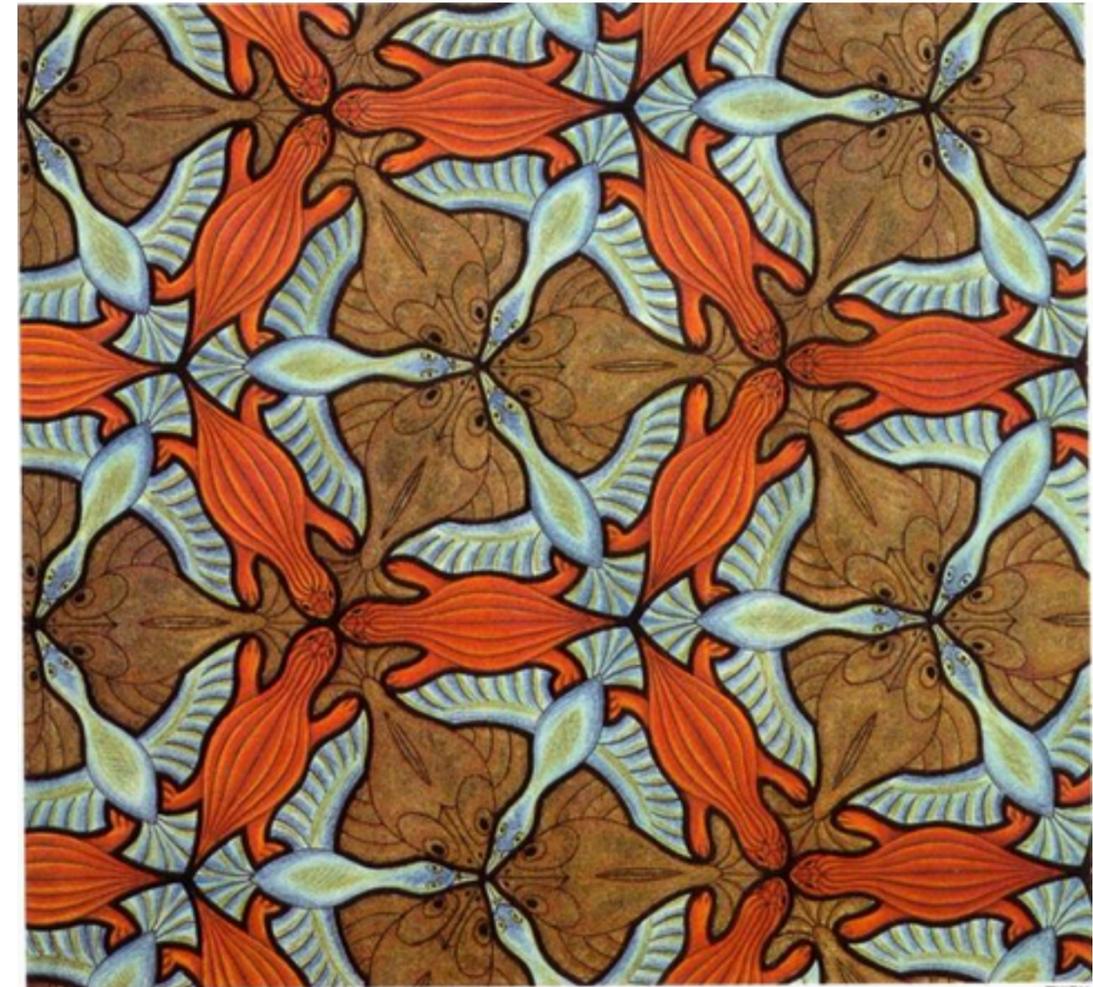
Palácio Mourisco de Alhambra, Granada.



Fotografias de mosaicos de Alhambra

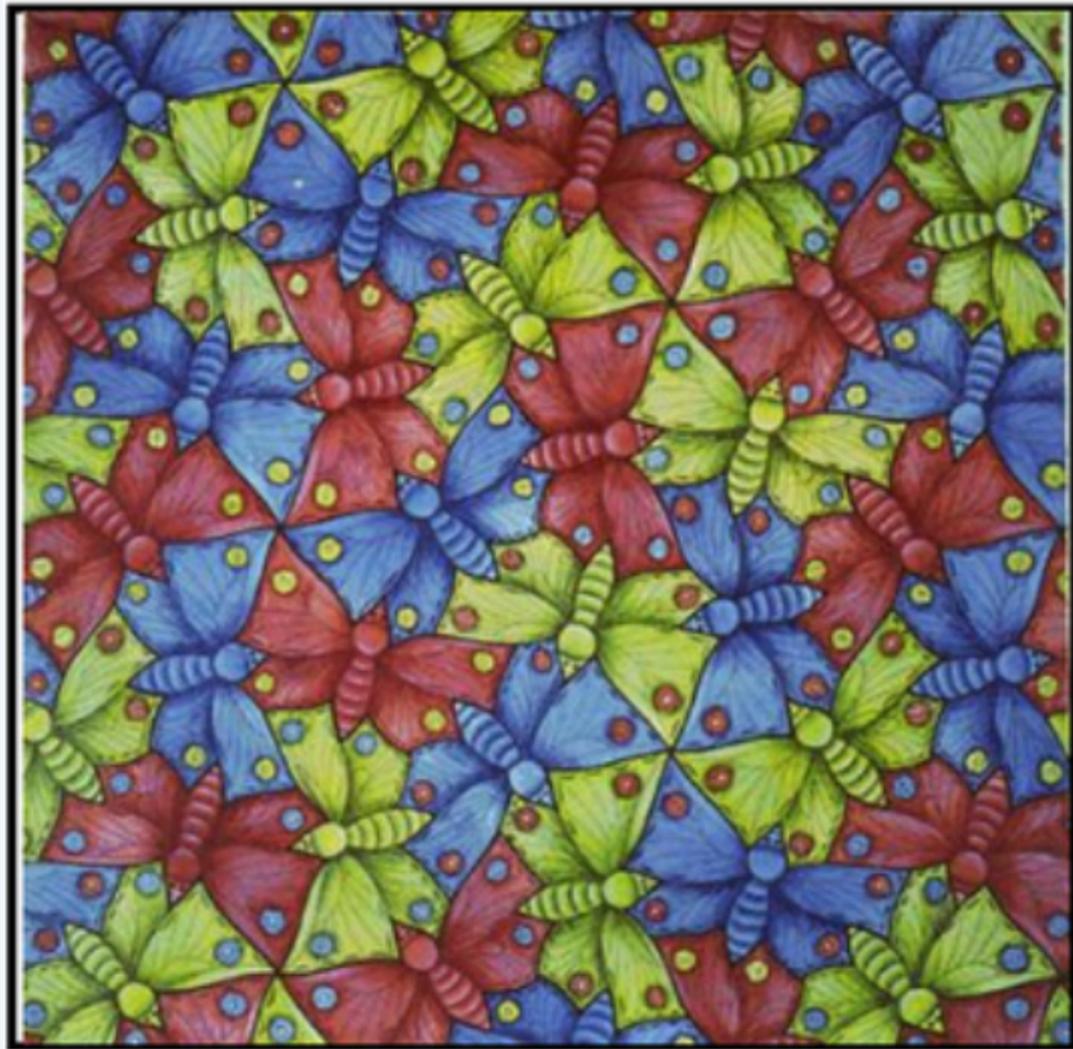


Tesselação em Alhambra



Mosaico de Escher

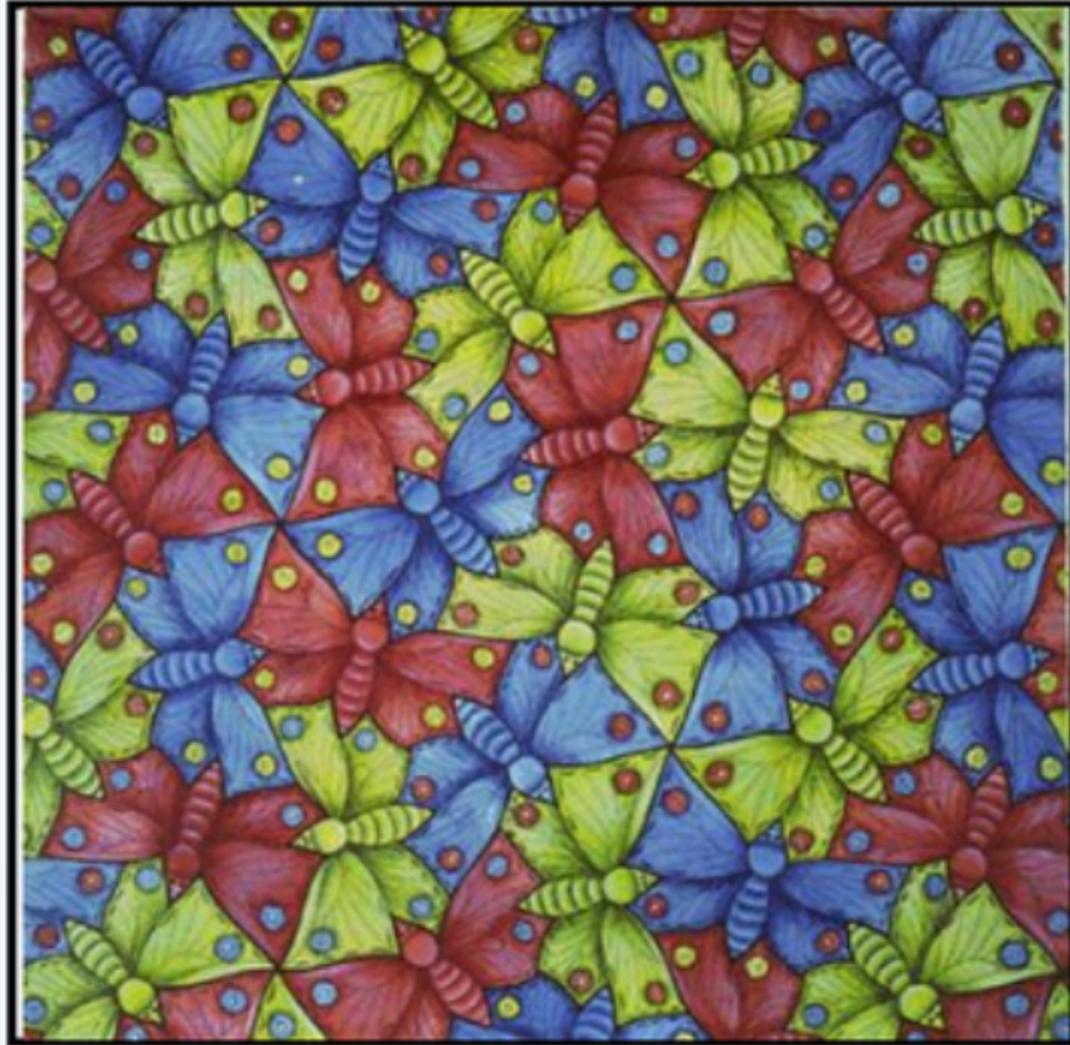
Escher foi além dos polígonos regulares utilizados pelos mouros substituindo-os por figuras que representam coisas existentes na natureza – pessoas, pássaros, peixes, répteis, etc. – criando imagens envolventes.



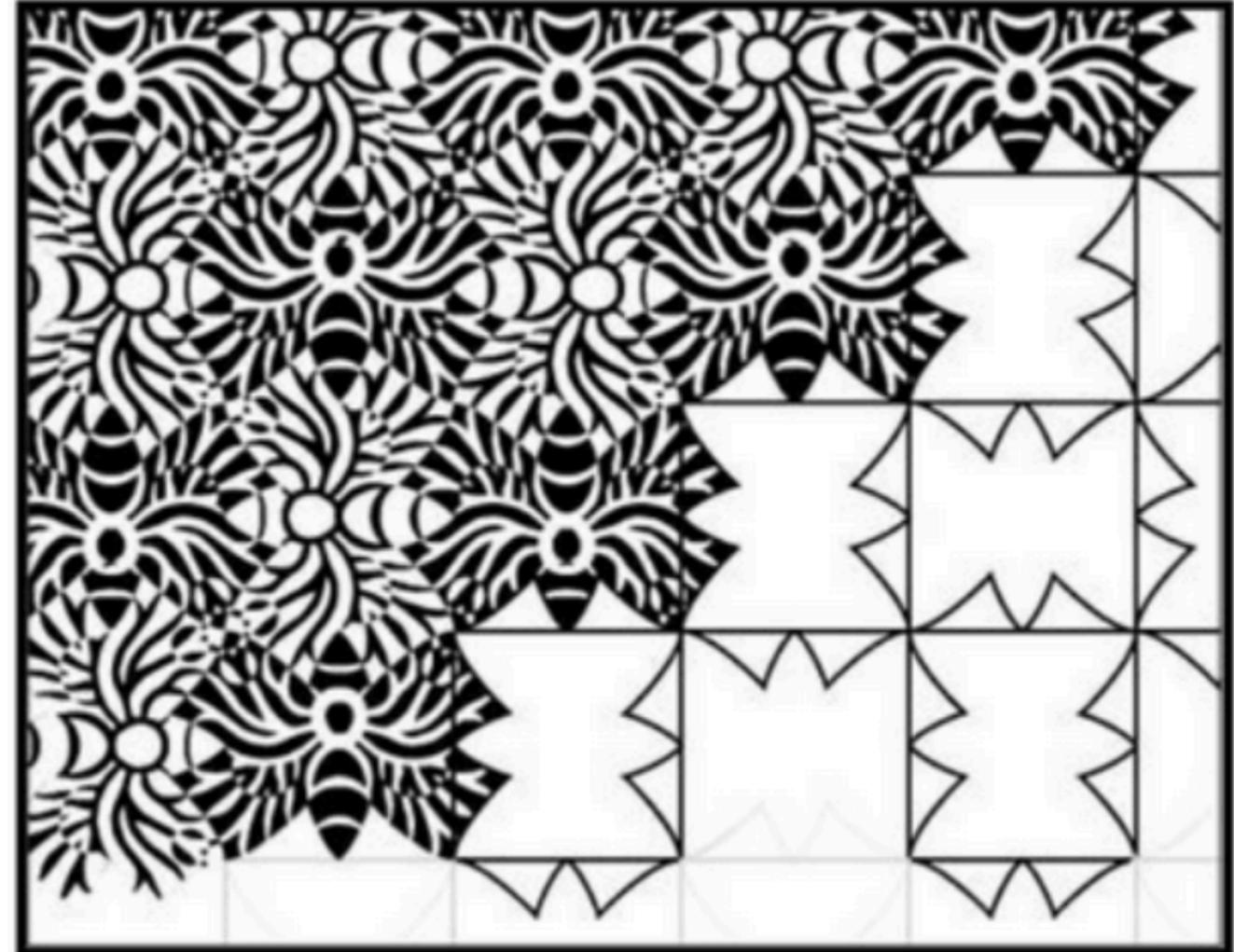
“Borboletas”, 1948, Tinta, Aquarela.

“ A fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respectivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem áreas livres.”

Escher, 1959



“Borboletas”, 1948, Tinta, Aquarela.



Tranformação do quadrado em borboletas.



PEGASUS (Nº. 105)  
M.C. Escher - 1946



“Metamorfoses III”, 1967-1968 Xilogravura, segundo estado, em vermelho, verde e marrom-avermelhada. Impresso de 33 blocos em 6 folhas juntas. Montada sobre tela, em parte colorida à mão.

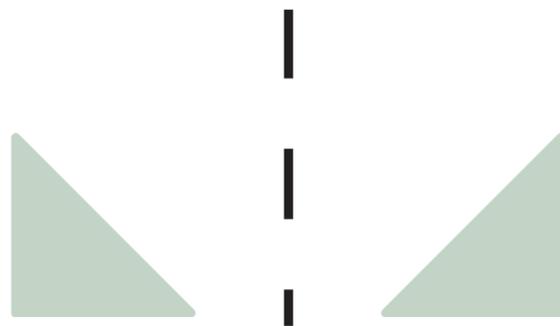
# | A matemática por trás das obras de Escher

Observando as obras de Escher podemos encontrar uma rica variedade de elementos geométricos como ângulos, vetor, rotação, simetria, reflexão e translação.

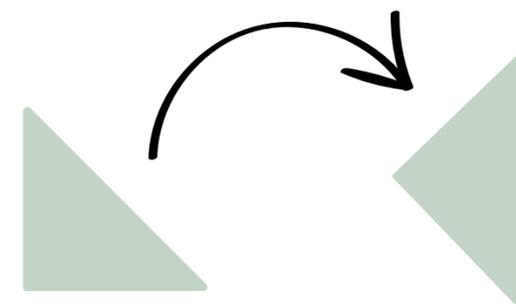
# | Isometrias



Translação



Reflexão

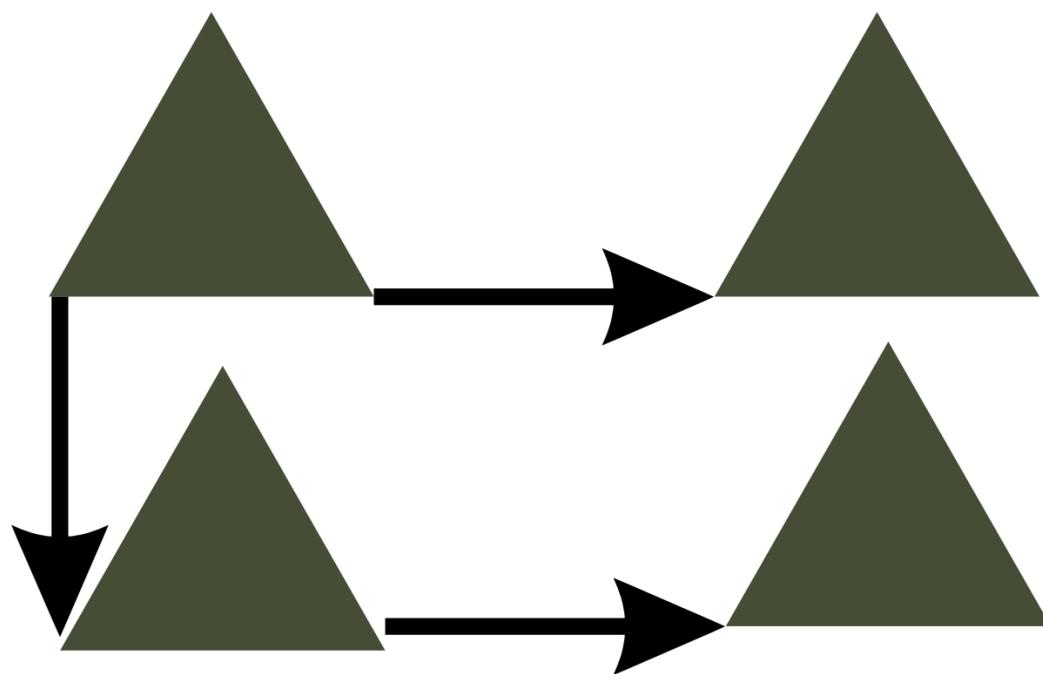


Rotação

Esses são os únicos movimentos possíveis de serem aplicados sobre um padrão plano de modo que o resultado obtido seja exatamente a figura original. São as únicas isometrias do plano.

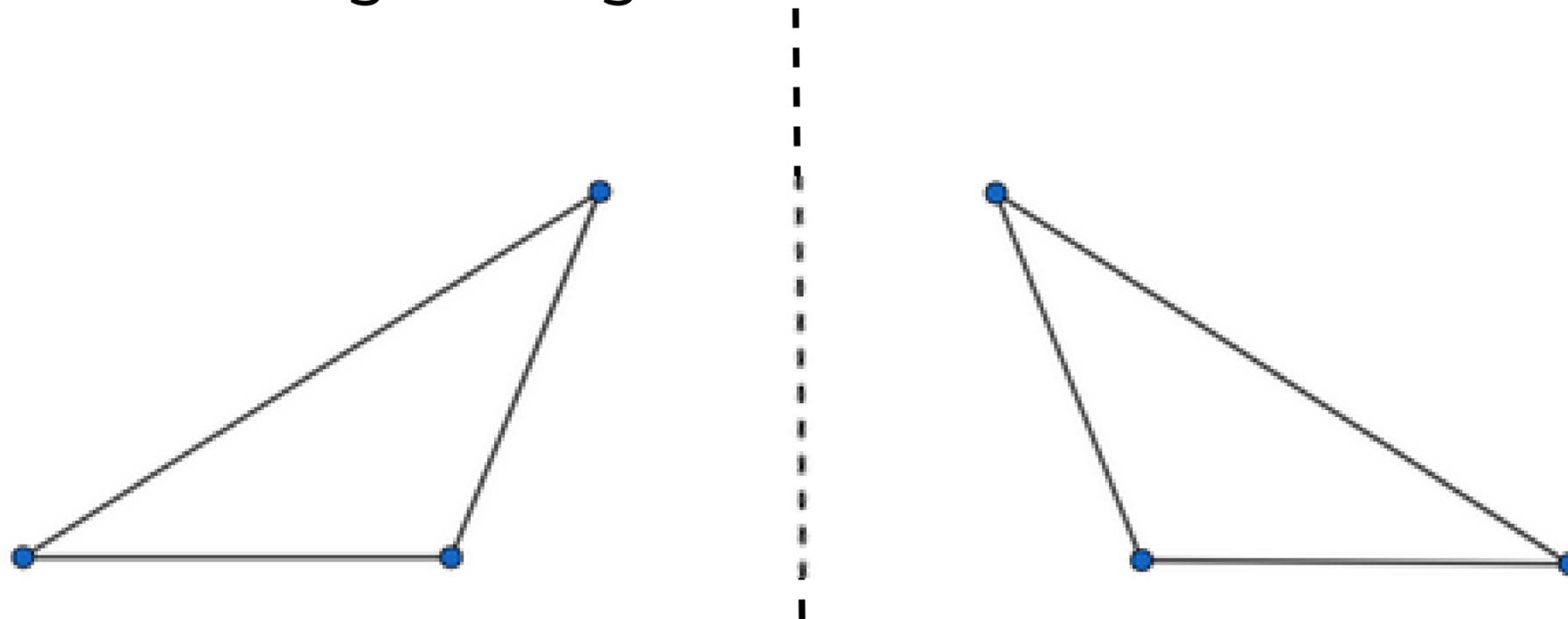
# Translação

Translação, na geometria, é o movimento de simetria no qual um figura desliza sobre um determinada vetor mantendo a mesma forma e medidas da figura inicial (isometria).



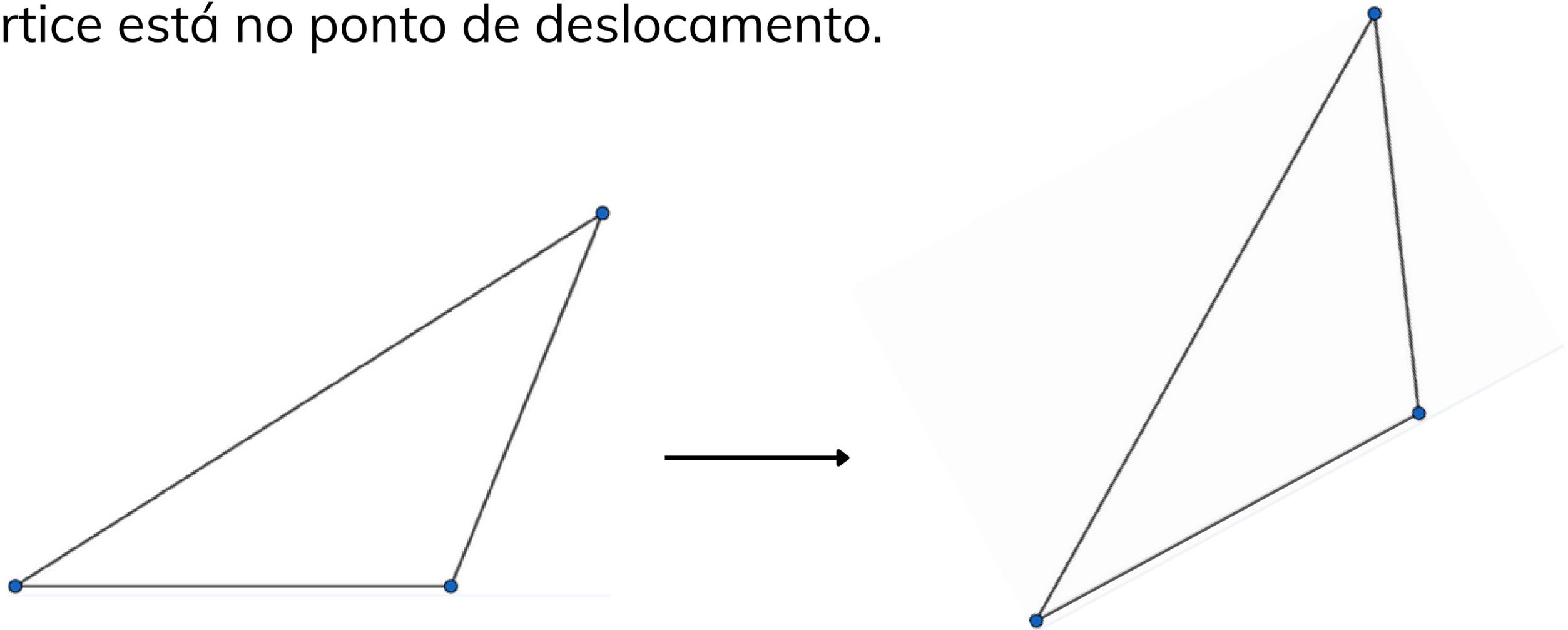
# Reflexão

A reflexão pode ser observada ao olharmos o ambiente que nos cerca. Pode-se citar, por exemplo, a borboleta como exemplo de simetria. Em tal isometria um objeto ou imagem pode ser refletido em relação a um eixo linear dito eixo de simetria, de modo que é possível fazer se corresponder ponto a ponto com a imagem original.

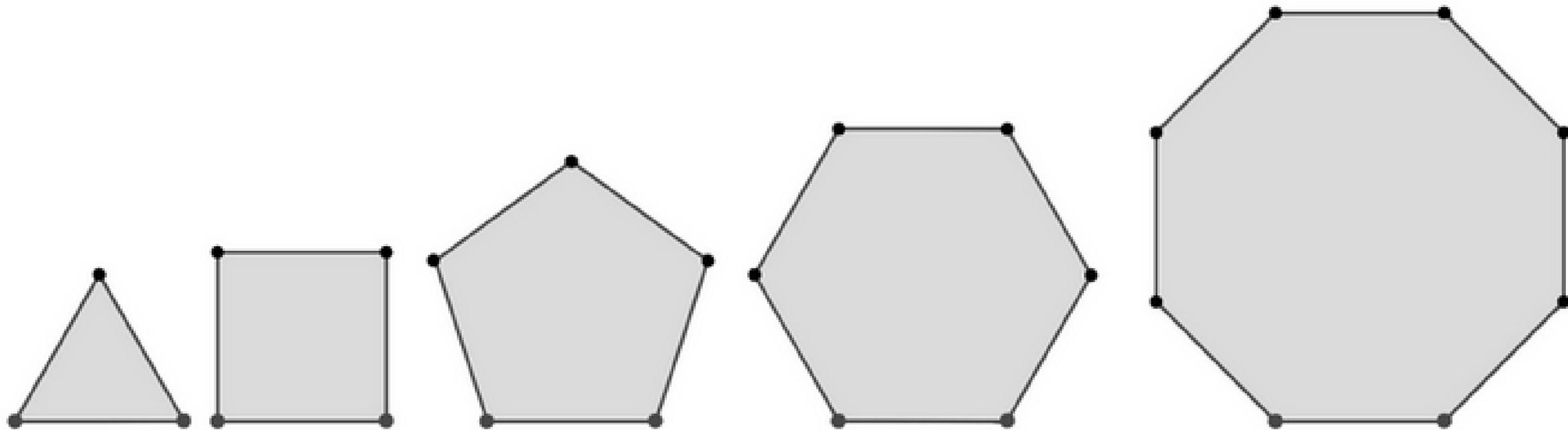


# Rotação

Na simetria de rotação o movimento acontece em torno de um ponto, que poderá estar na figura ou fora dela. Este movimento percorre um ângulo, cujo vértice está no ponto de deslocamento.

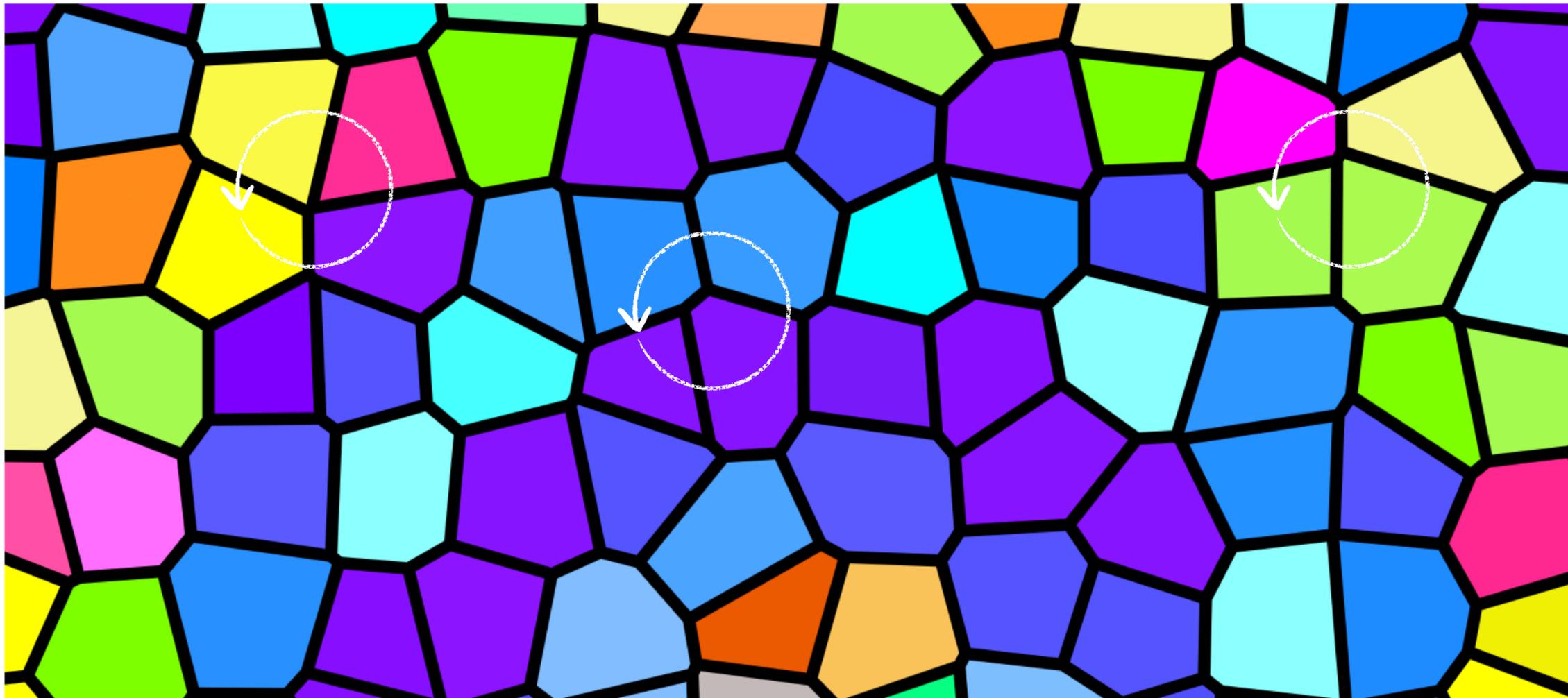


Com quais polígonos regulares é possível realizar uma tecelagem do plano?



Com quais polígonos regulares é possível realizar uma tesselação do plano?

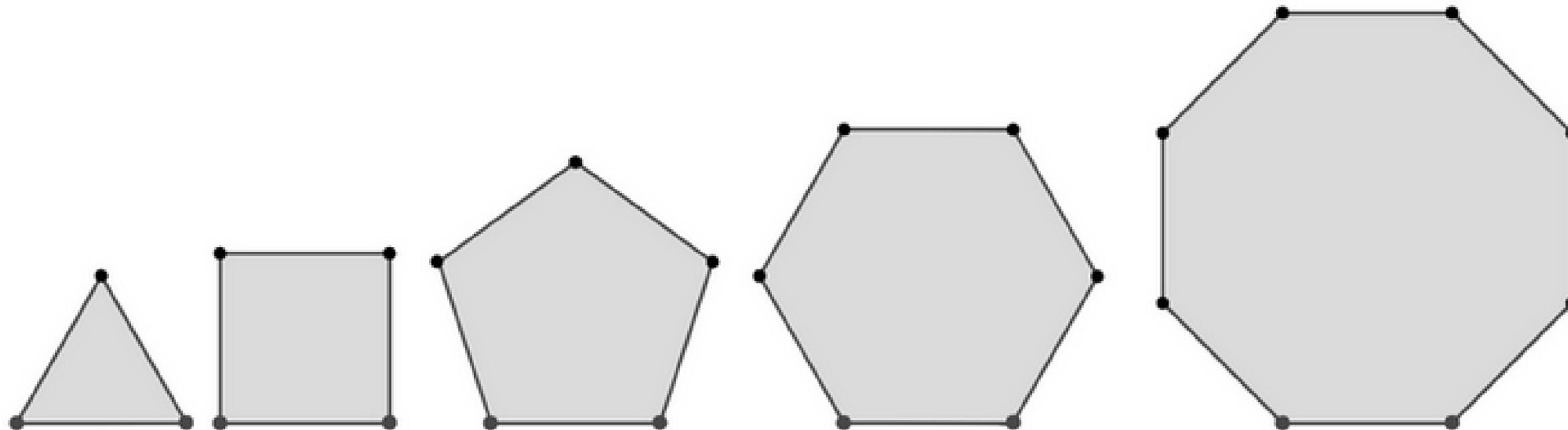
Ao realizar uma tesselação do plano, a soma dos ângulos ao redor de cada vértice deve ser  $360^\circ$ .



# Com quais polígonos regulares é possível realizar uma tesselação do plano?

Ao construir uma tesselação do plano, a soma dos ângulos ao redor de cada vértice deve ser  $360^\circ$ .

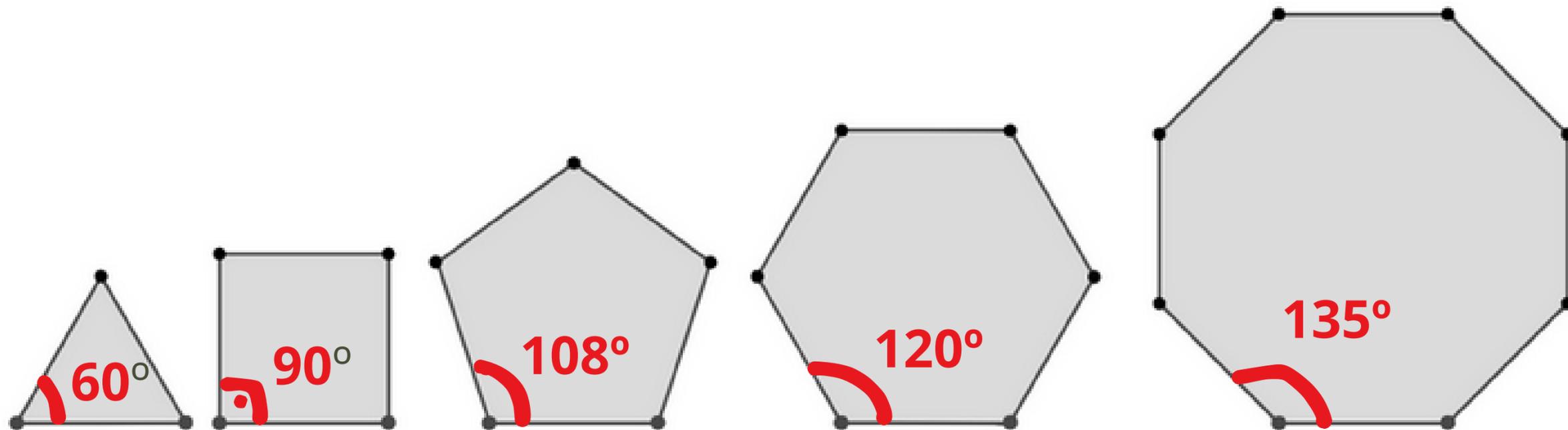
Se pretendemos construir uma tesselação utilizando apenas um tipo de polígono regular, é preciso que o ângulo interno do polígono seja divisor de  $360^\circ$ .



Com quais polígonos regulares é possível realizar uma tesselação do plano?

Ao realizar uma tesselação do plano, a soma dos ângulos ao redor de cada vértice deve ser  $360^\circ$ .

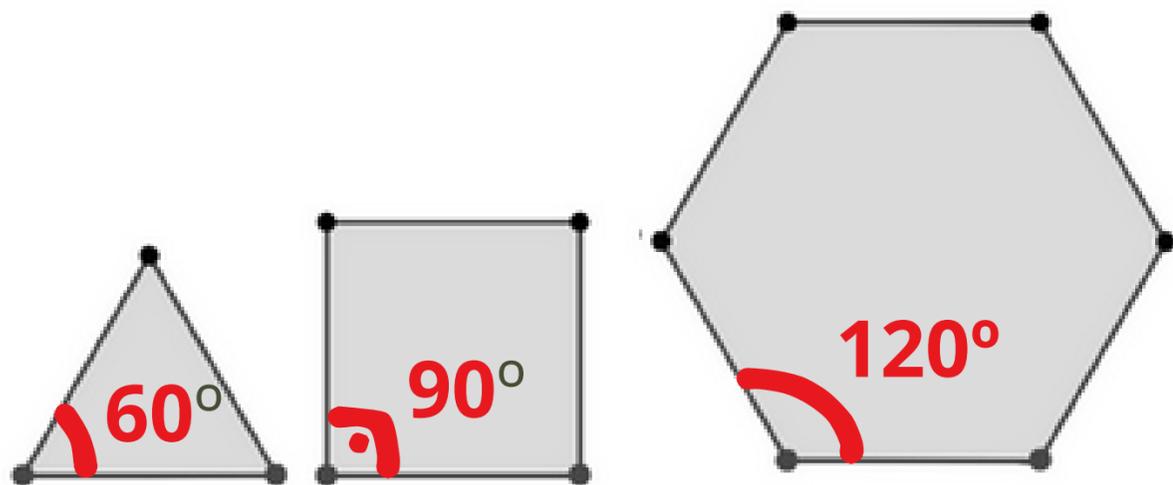
Se pretendemos construir uma tesselação utilizando apenas um tipo de polígono regular, é preciso que o ângulo interno do polígono seja divisor de  $360^\circ$ .



# Com quais polígonos regulares é possível realizar uma tesselação do plano?

Ao realizar uma tesselação do plano, a soma dos ângulos ao redor de cada vértice deve ser  $360^\circ$ .

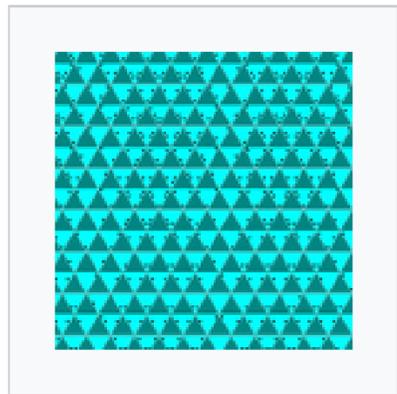
Se pretendemos construir uma tesselação utilizando apenas um tipo de polígono regular, é preciso que o ângulo interno do polígono seja divisor de  $360^\circ$ .



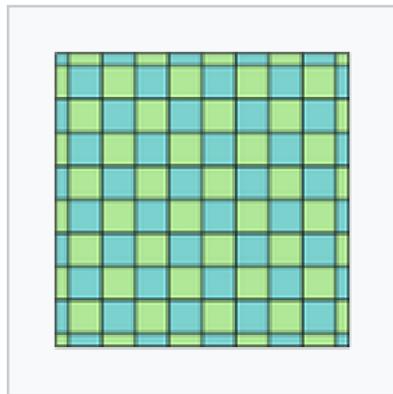
Assim, só podemos utilizar o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular para preencher o plano utilizando apenas um tipo de polígono regular.

# Tipos de tesselações

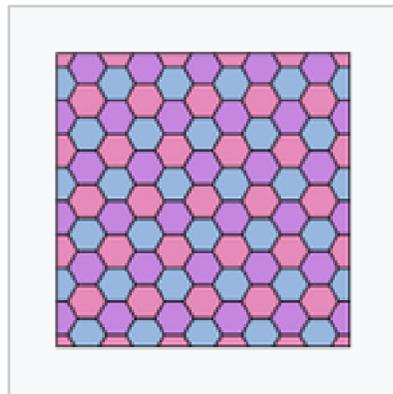
## Tesselações Regulares



Triângulos

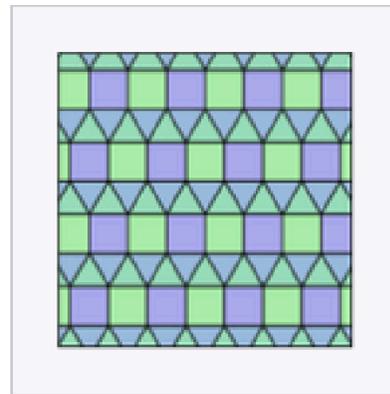


Quadrados

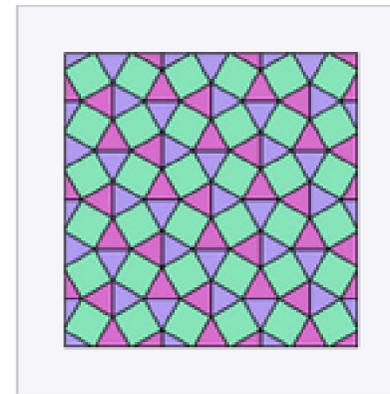


Hexágonos

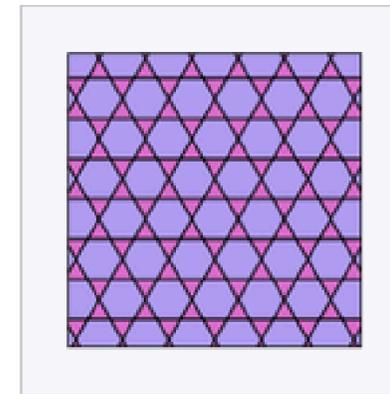
## Tesselações Semi regulares



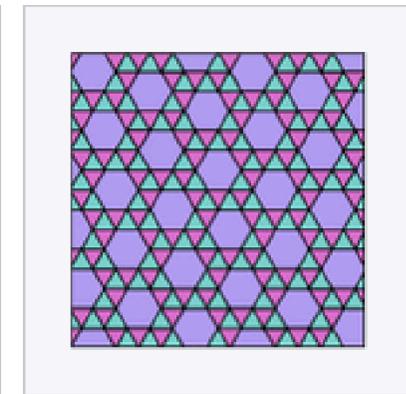
3-3-3-4-4



3-3-4-3-4

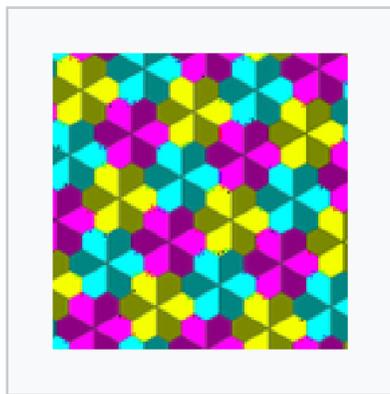


3-6-3-6

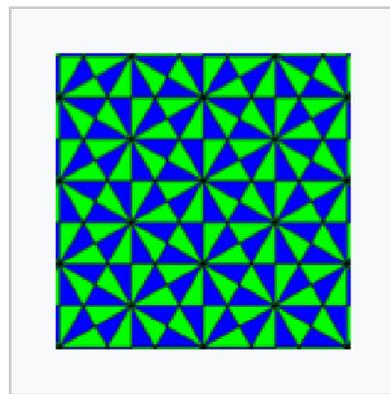


3-3-3-3-6

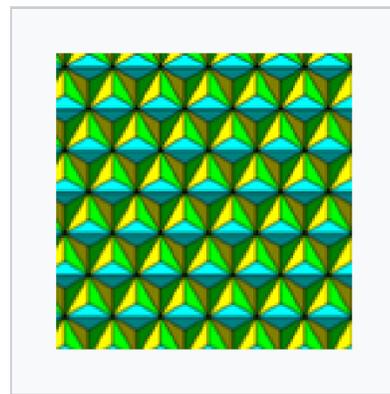
## Tesselações Demiregulares



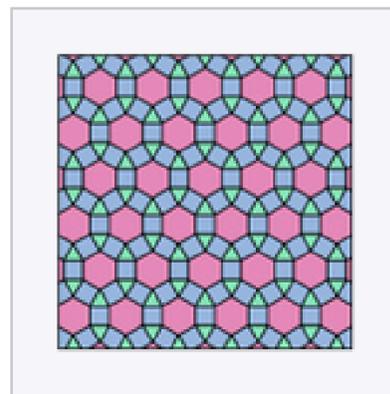
Pentágonos



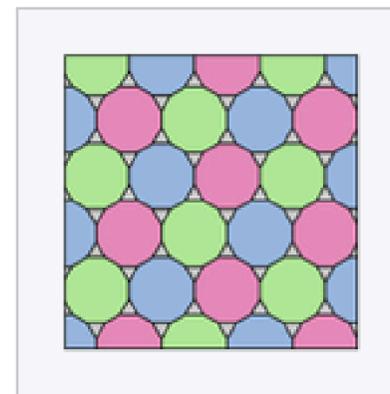
Triângulos



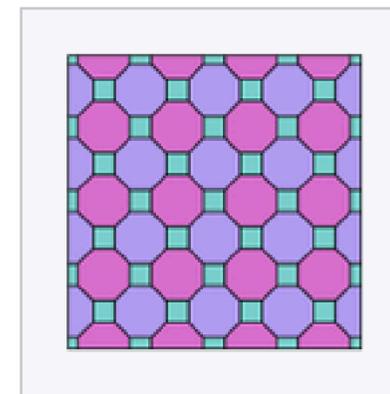
Triângulos



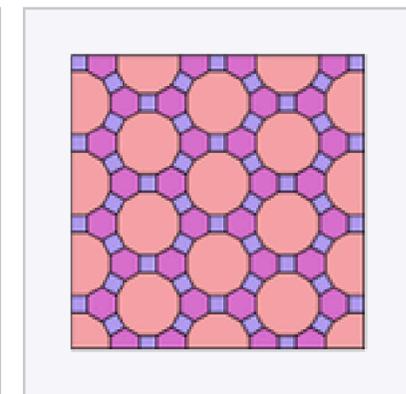
3-4-6-4



3-12-12



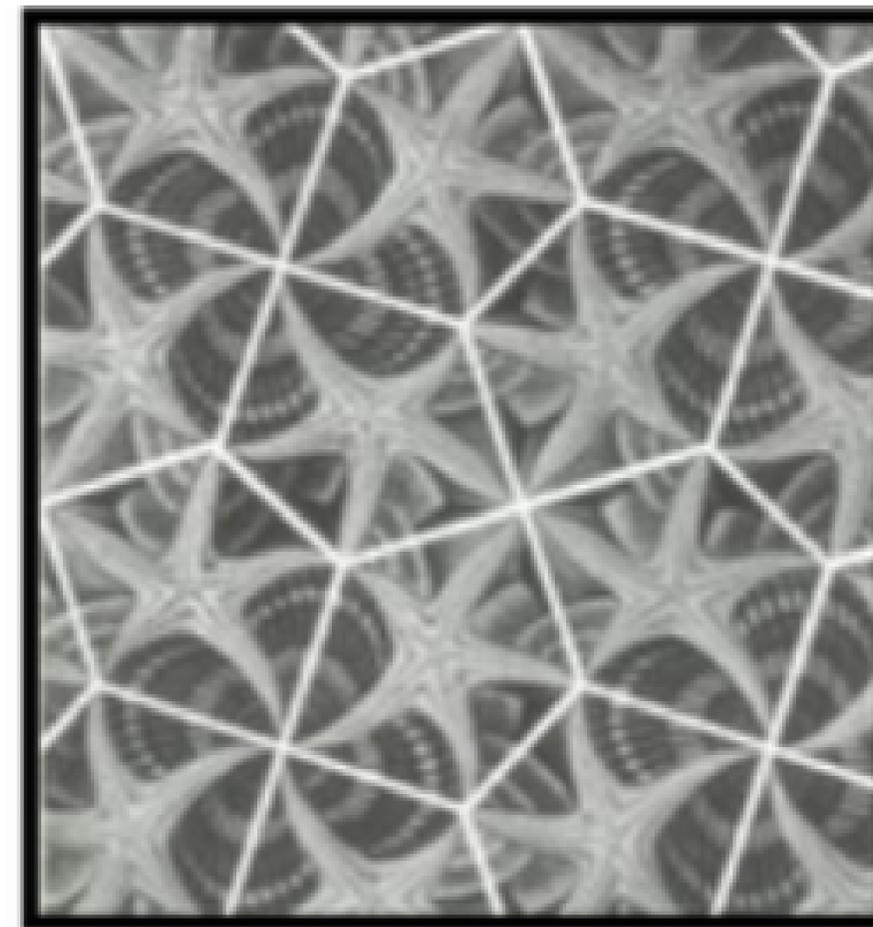
4-8-8



4-6-12



“Conchas e estrelas-do-mar”, 1941,  
nanquim, lápis de cor, aquarela.



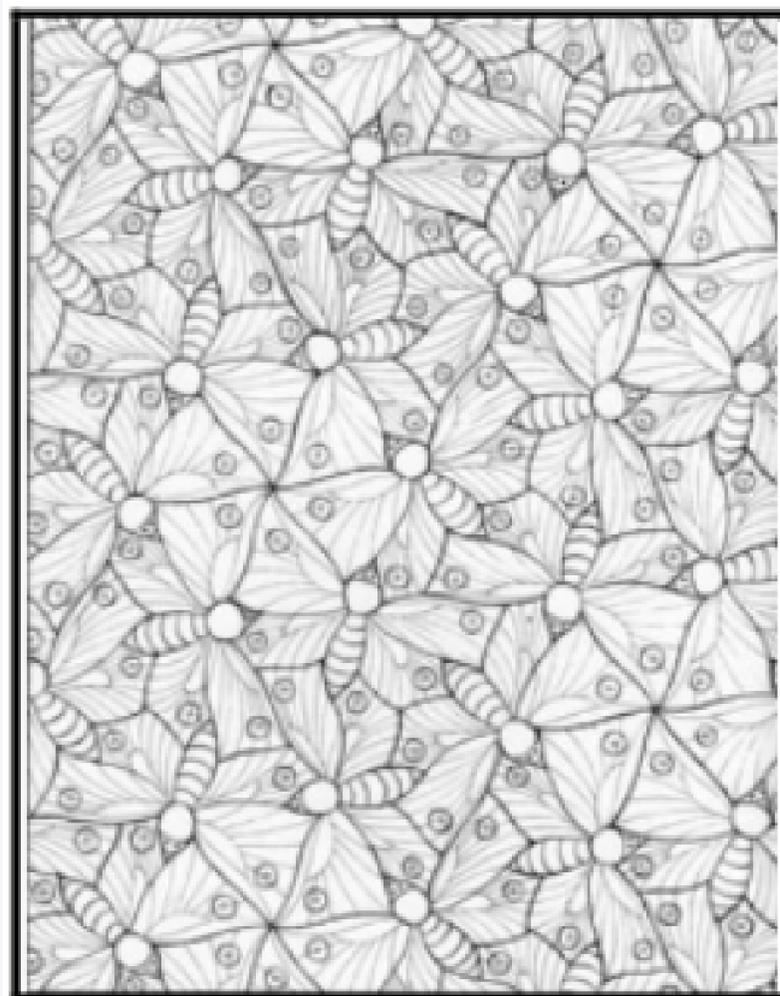
Fonte: O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS  
DA ARTE DE MAURITS CORNELIS ESCHER

Divisão demiregular onde os pentágonos irregulares são preenchidos por estrelas do mar e as conchas são o seu centro de simetria rotacional.

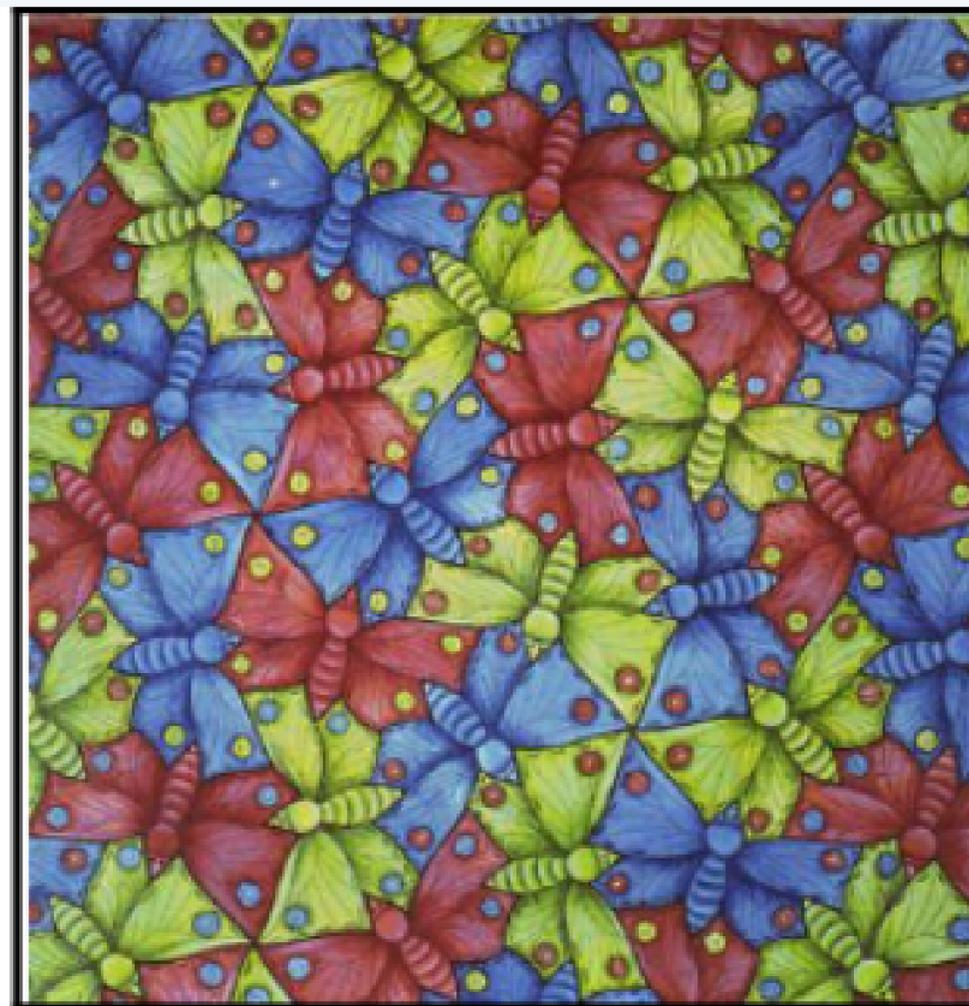
# As cores nas tesselações

As cores podem influenciar na percepção, na estética, no destaque e impacto visual das formas geométricas repetitivas

# As cores nas tesselações



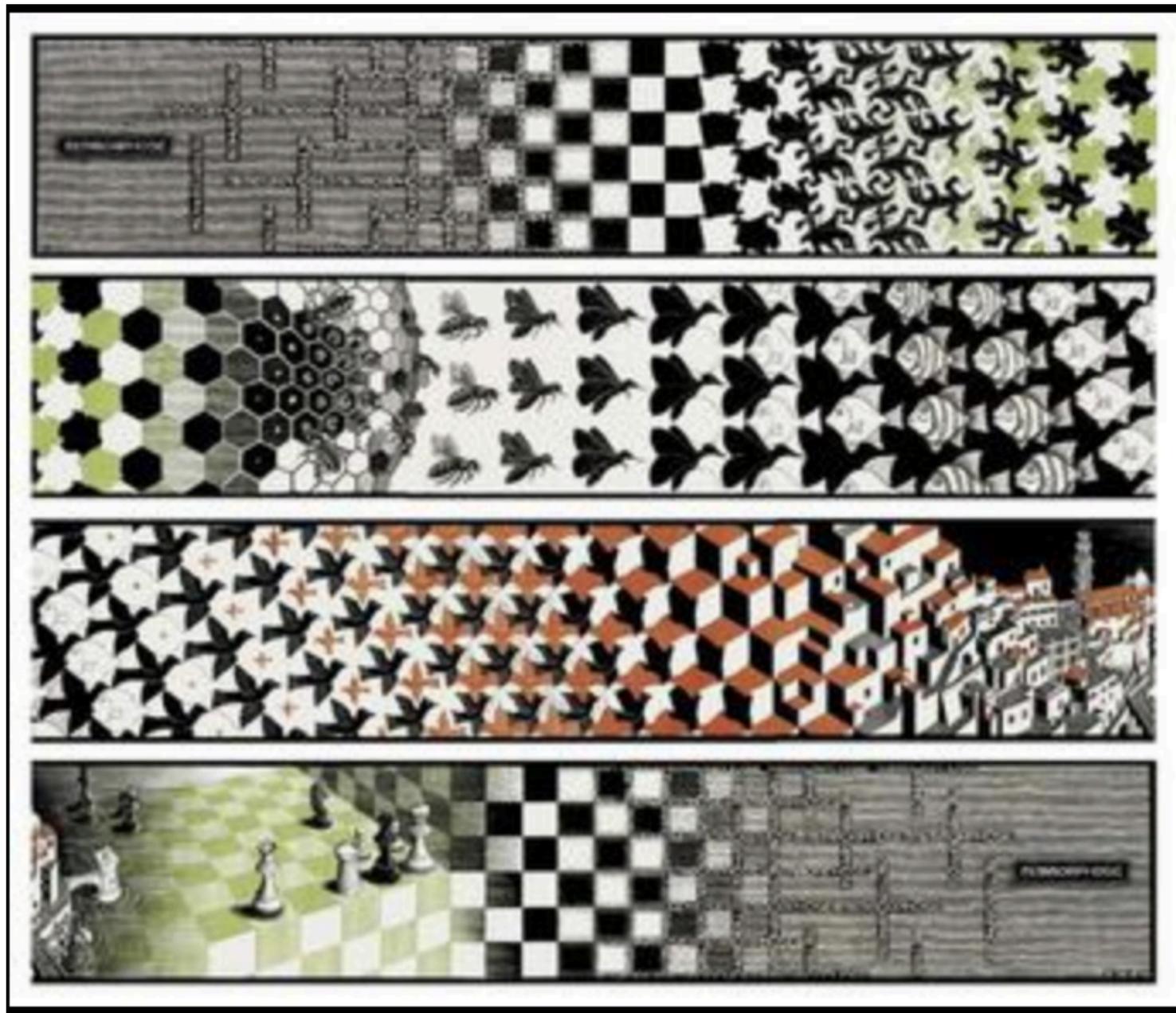
Fonte: O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE  
DE MAURITS CORNELIS ESCHER



Escher, M. C., "Borboletas", 1948,  
Tinta, aquarela.

As cores diferentes para cada forma ajudam o observador a distinguir as formas individuais mais facilmente.

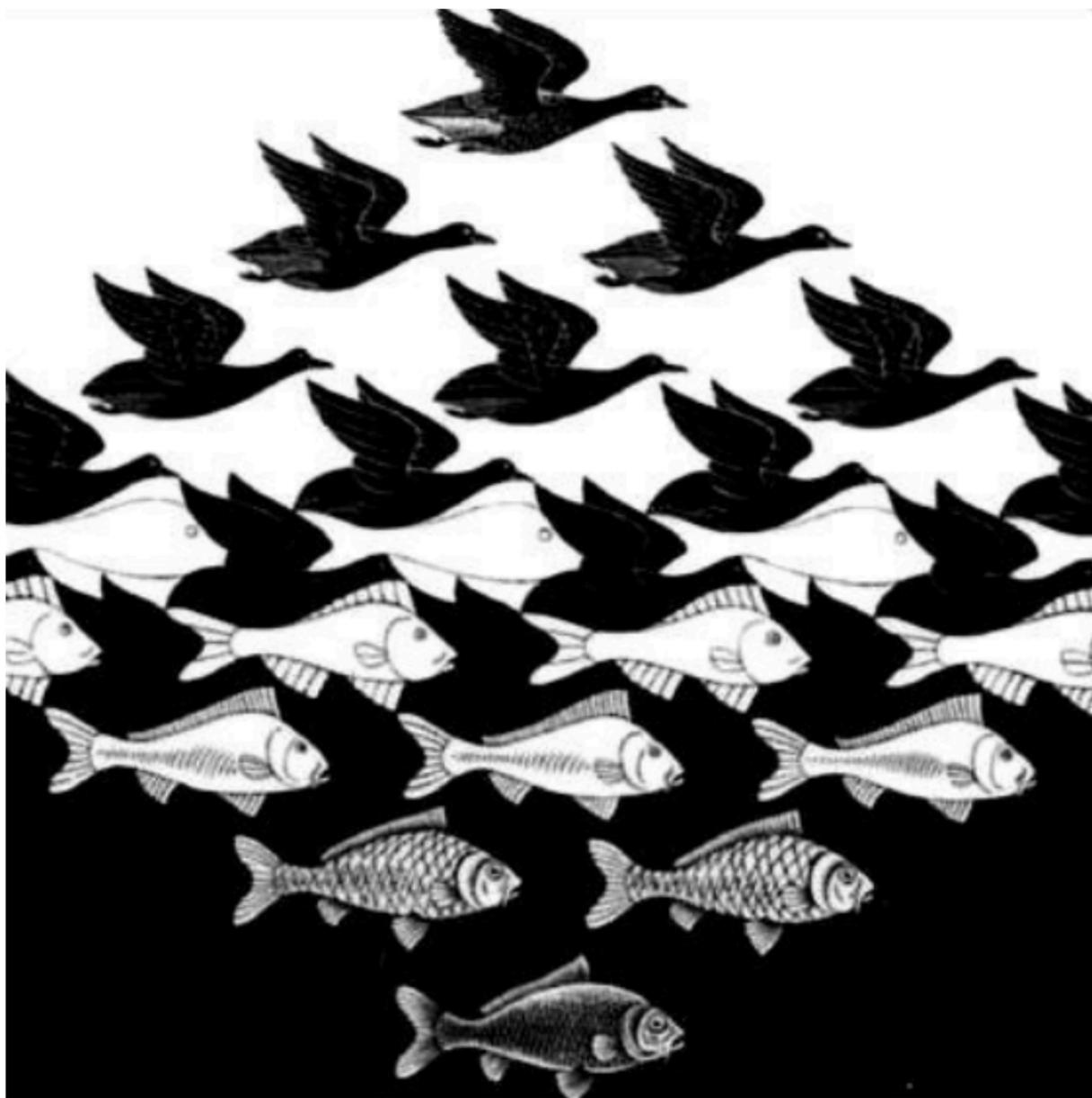
# As cores nas tesselações



A profundidade e o movimento podem ser criados com gradientes e sombreamento.

Em "Metamorphosis II", Escher, usa mudanças de cor para criar uma transição fluida e dinâmica entre diferentes formas.

# As cores nas tesselações



Escher, "Sky and Water I", 1938

Contrastes de cores fortes são usados para criar ênfase e guiar o olhar do observador.

Na obra "Sky and Water I" de Escher, ele usa o contraste entre preto e branco para transformar peixes em pássaros.

# Teoria das Cores



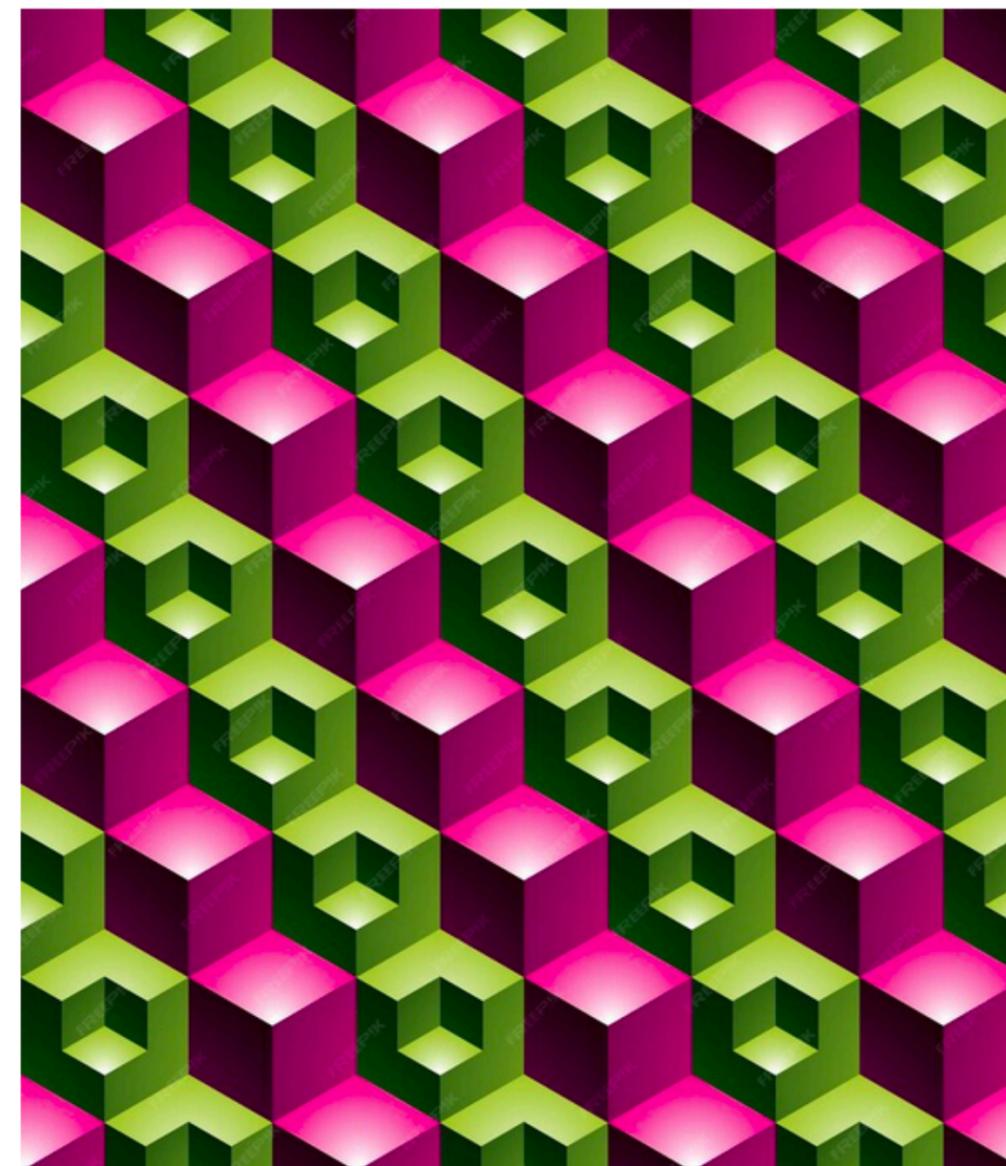
Círculo Cromático

## Cores complementares

- Oferecem contraste entre si.
- Estão dipostas de maneira oposta uma da outra.
- Podem ser usadas quando se quer criar constraste, destaque e impacto visual.

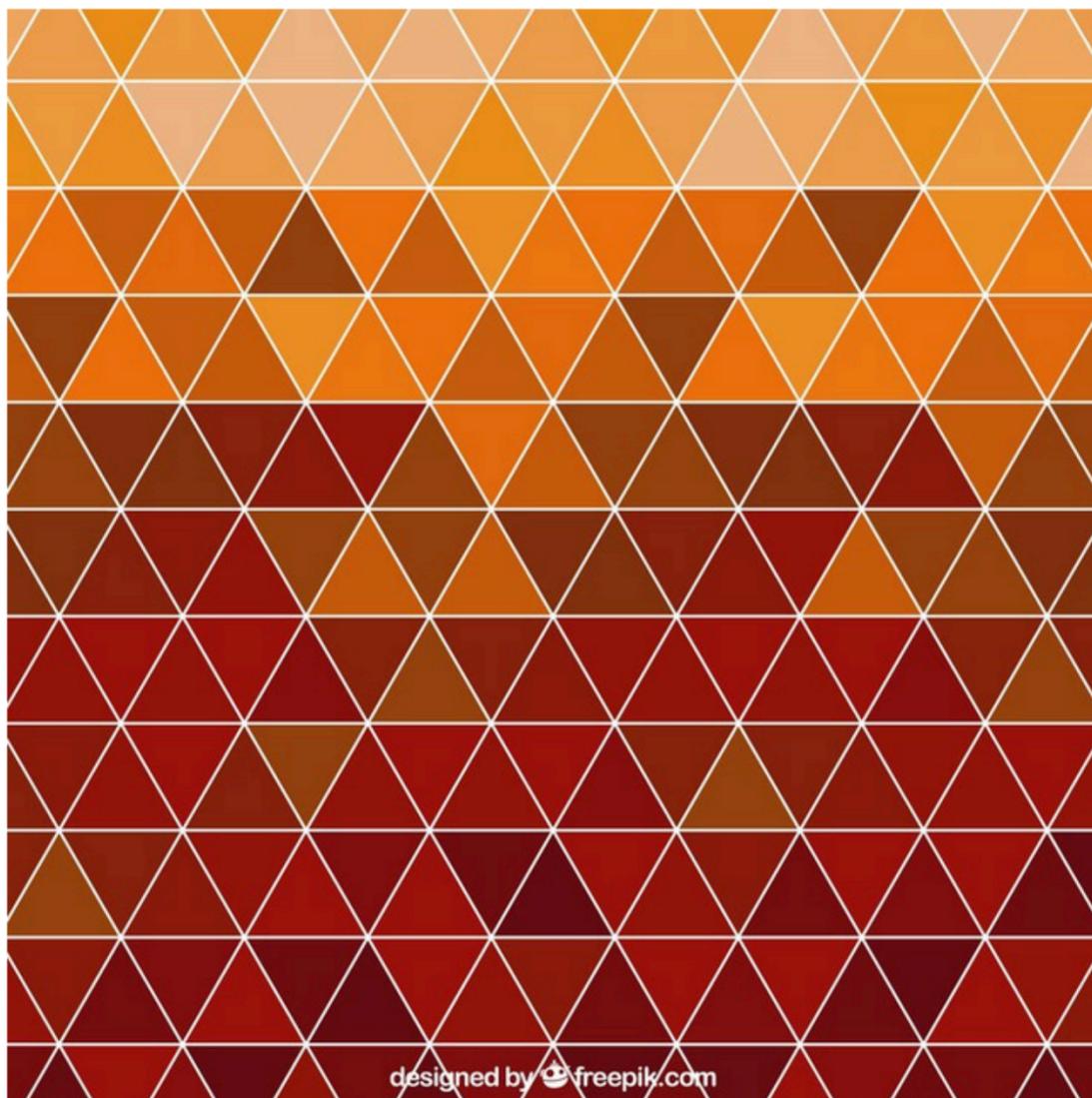
## Cores análogas

- Aparecem lado a lado no círculo cromático.
- São usadas para dar uma sensação harmonia e coesão.
- Criar transições suaves.
- Estilos elegantes e sofisticados.

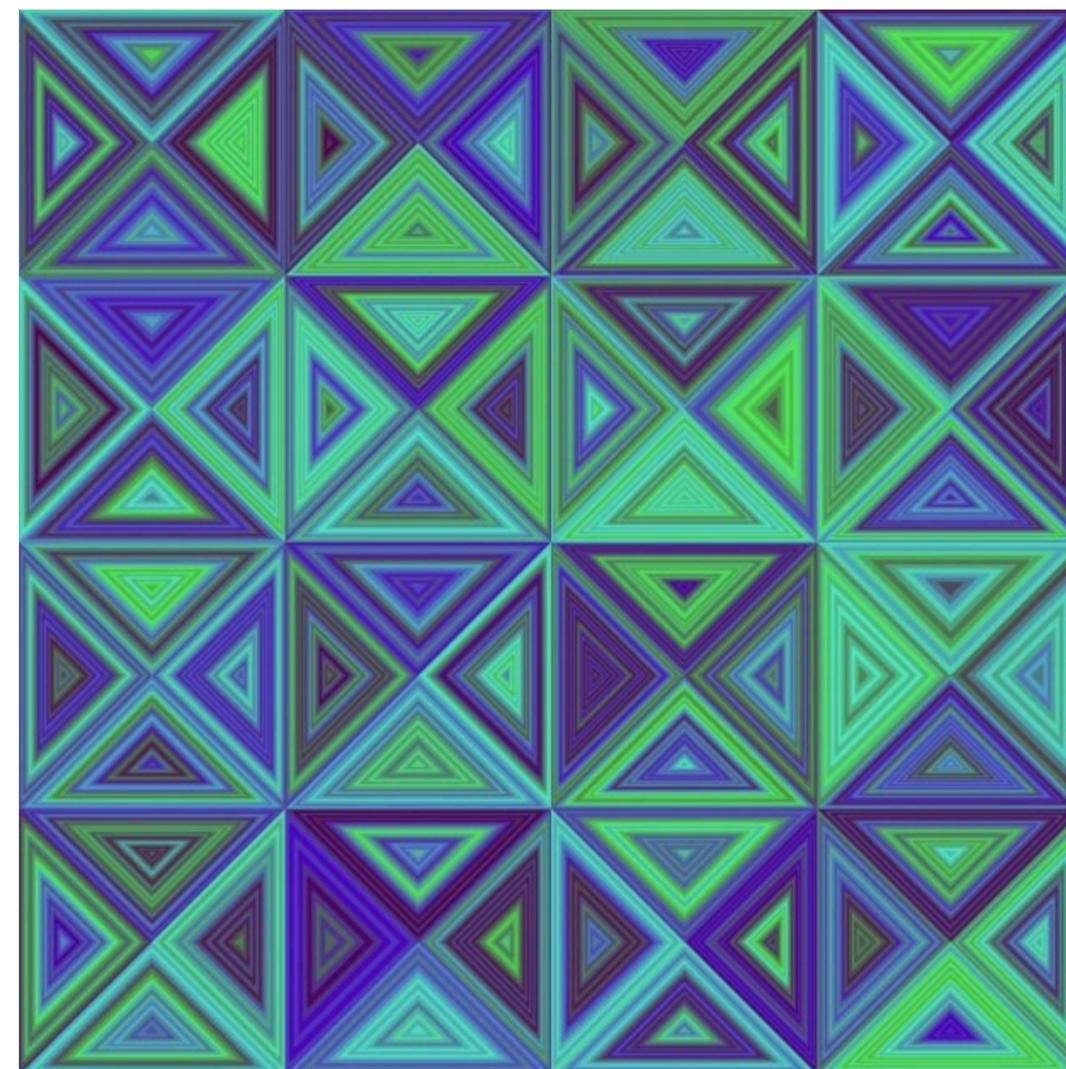


Fonte: Freepick.com

## Mosaicos com cores complementares



Fonte: Freepick.com



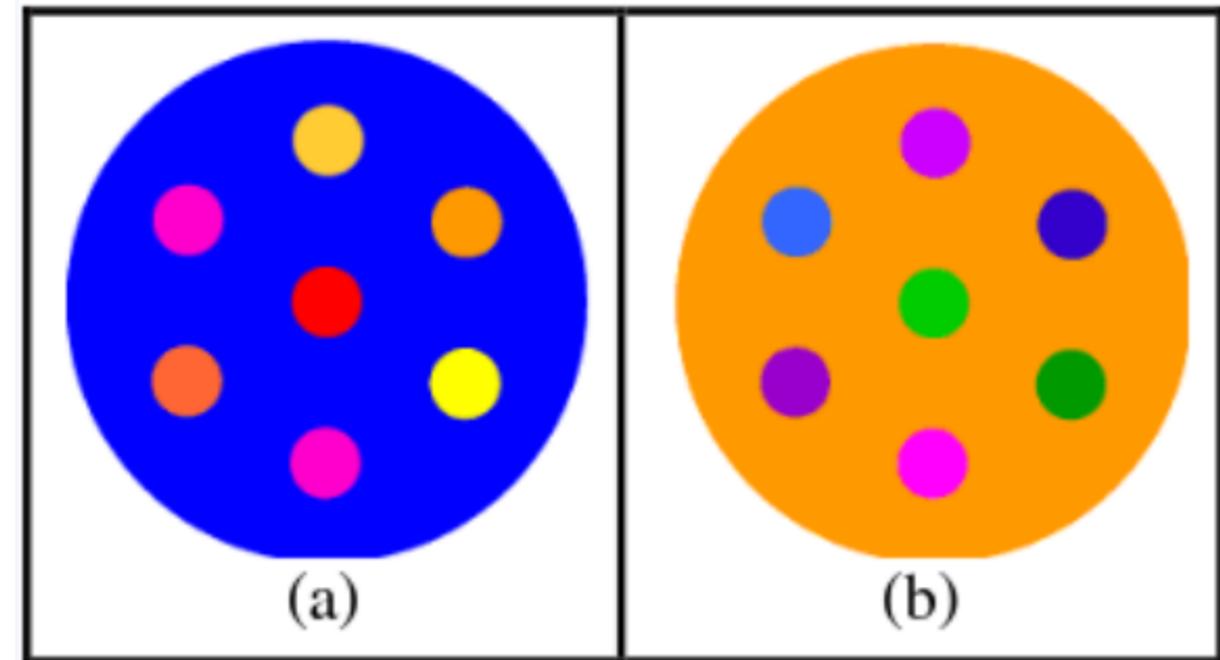
Fonte: Freepick.com

## Mosaicos com cores análogas

# Teoria das Cores



Elementos com **cores quentes** tendem a **avançar** visualmente e elementos com **cores frias** parecem se **afastar**, criando uma sensação de profundidade.



Fonte: O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE DE MAURITS CORNELIS ESCHER

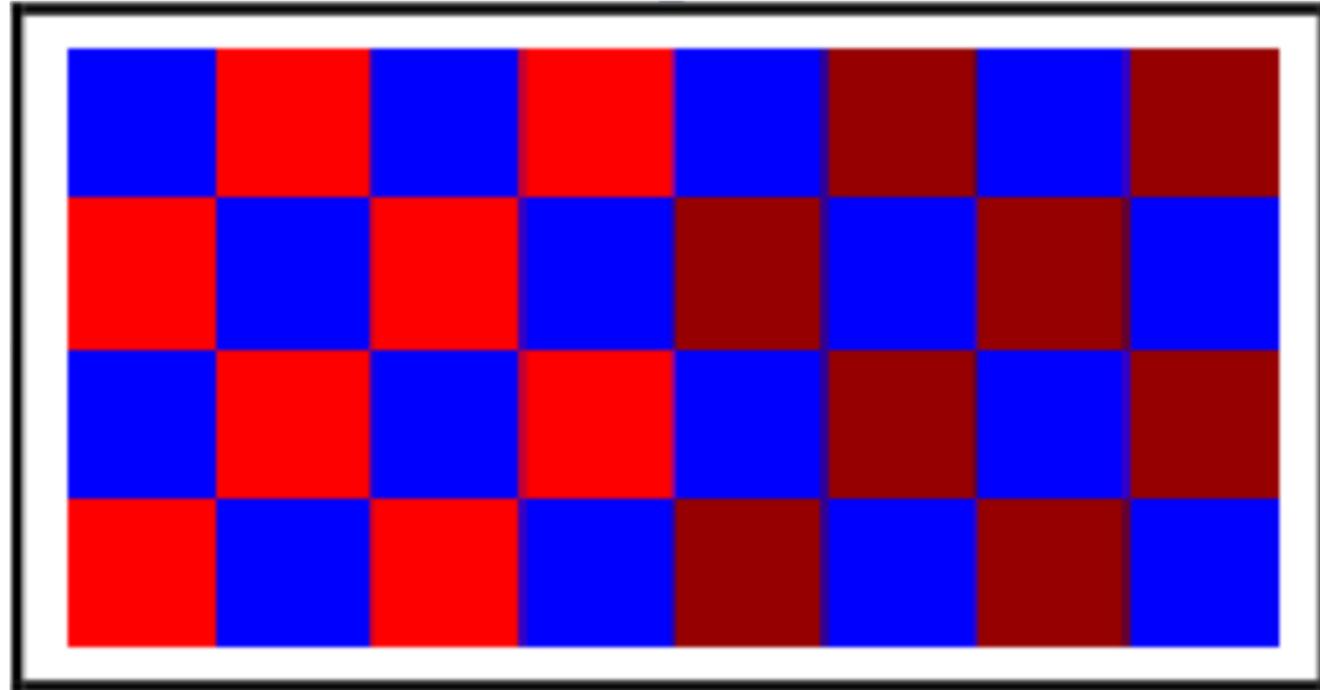
Em fundo frio, elementos em cores quentes pareçam saltar.

Em fundo quente elementos em cores frias paracem recuar formando buracos.



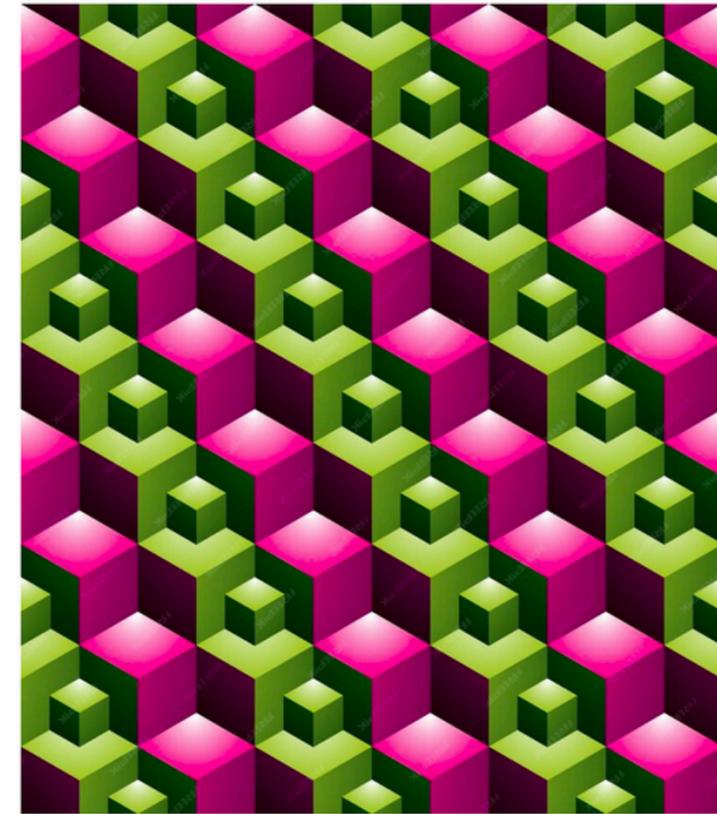
Fonte: Freepick.com

# Teoria das Cores

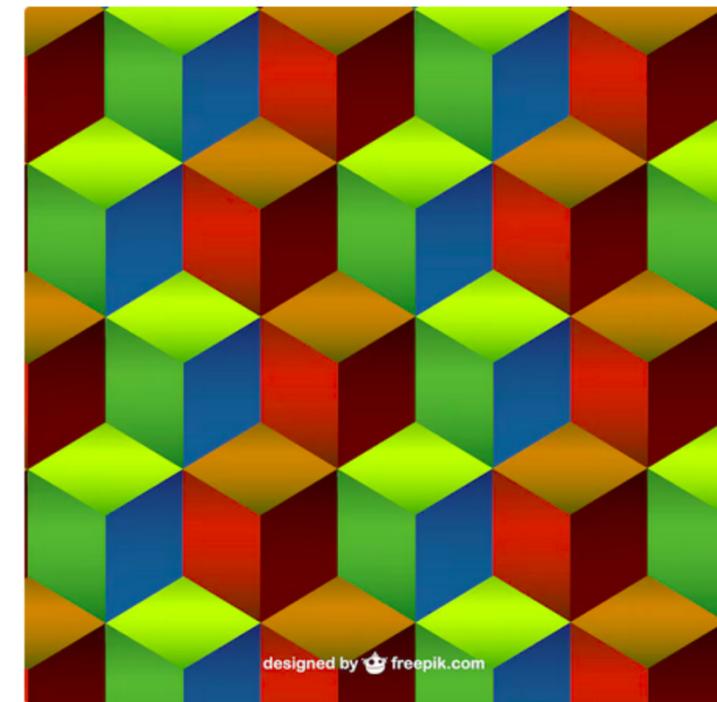


Fonte: O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE DE MAURITS CORNELIS ESCHER

**Cores brilhantes**, independentemente de serem quentes ou frias, **tendem a avançar visualmente**. Elas parecem estar mais próximas do observador porque refletem mais luz e atraem mais atenção.

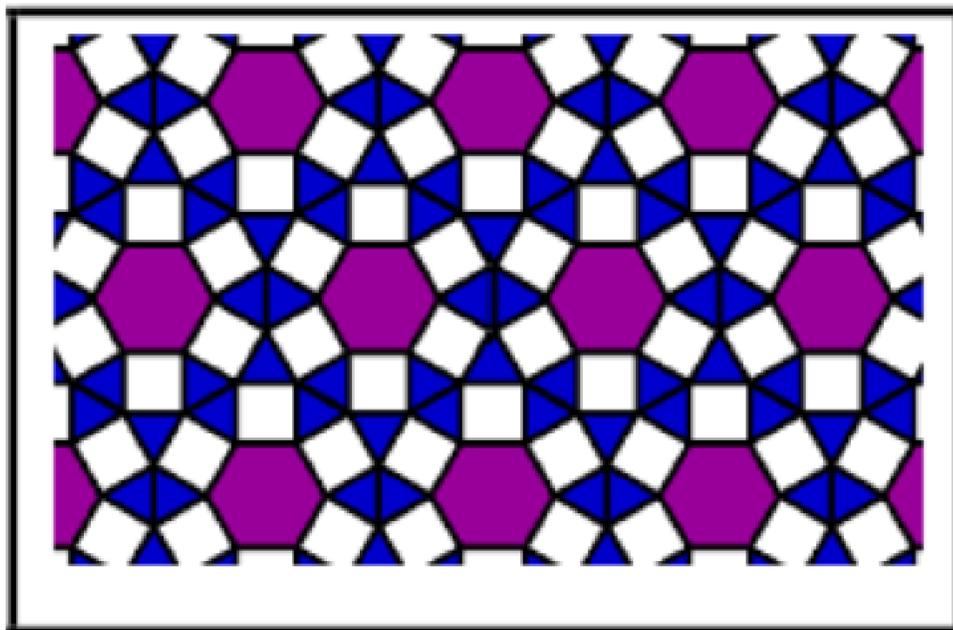


Fonte: Freepick.com

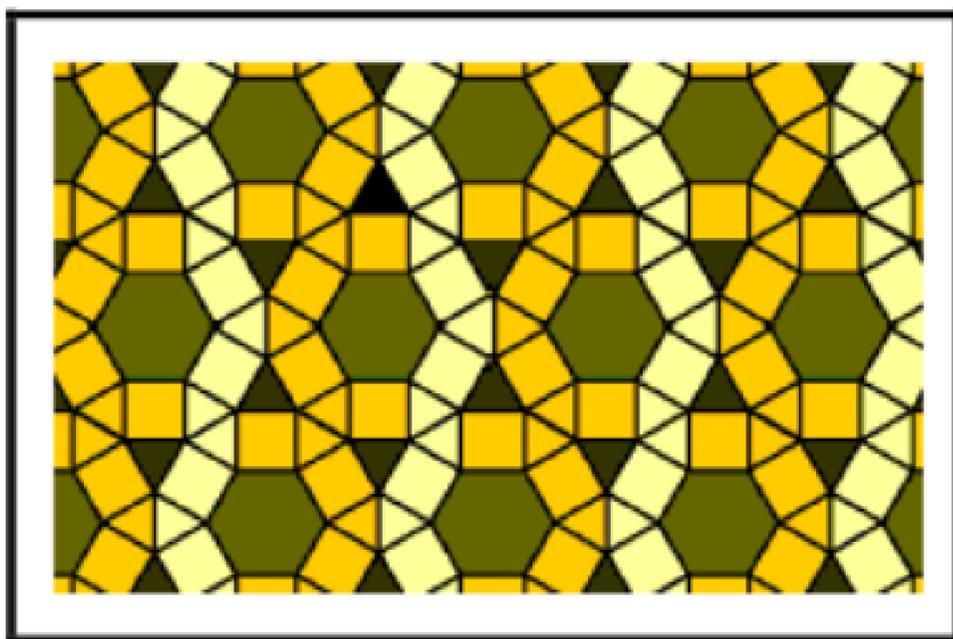


Fonte: Freepick.com

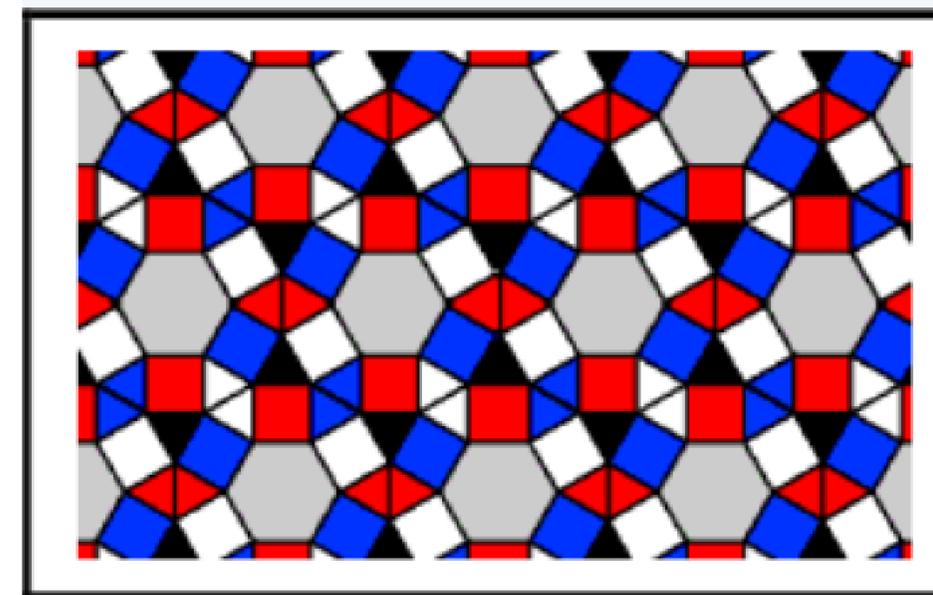
# Técnicas de Coloração



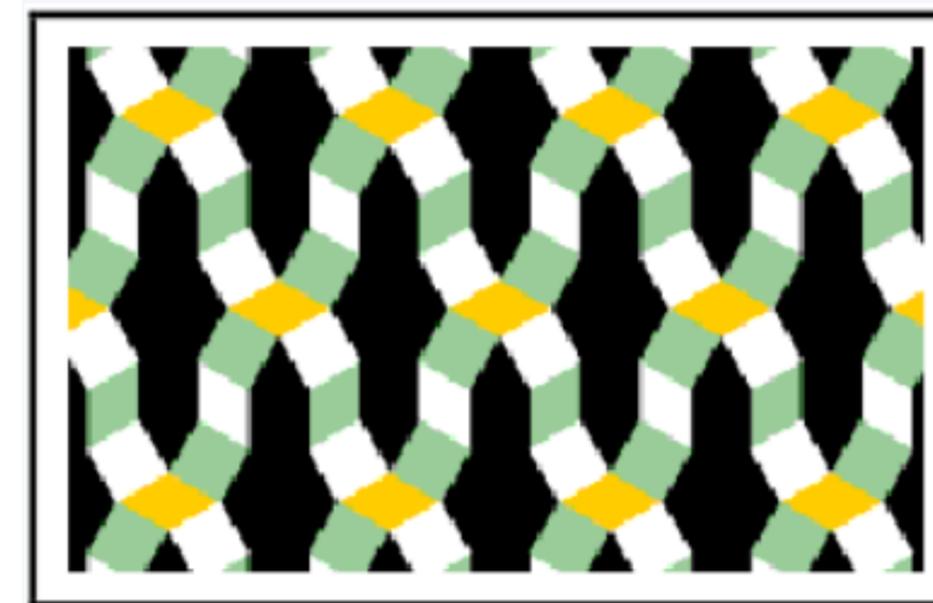
Técnica individual de coloração



Técnica regional de coloração



Técnica cíclica de coloração

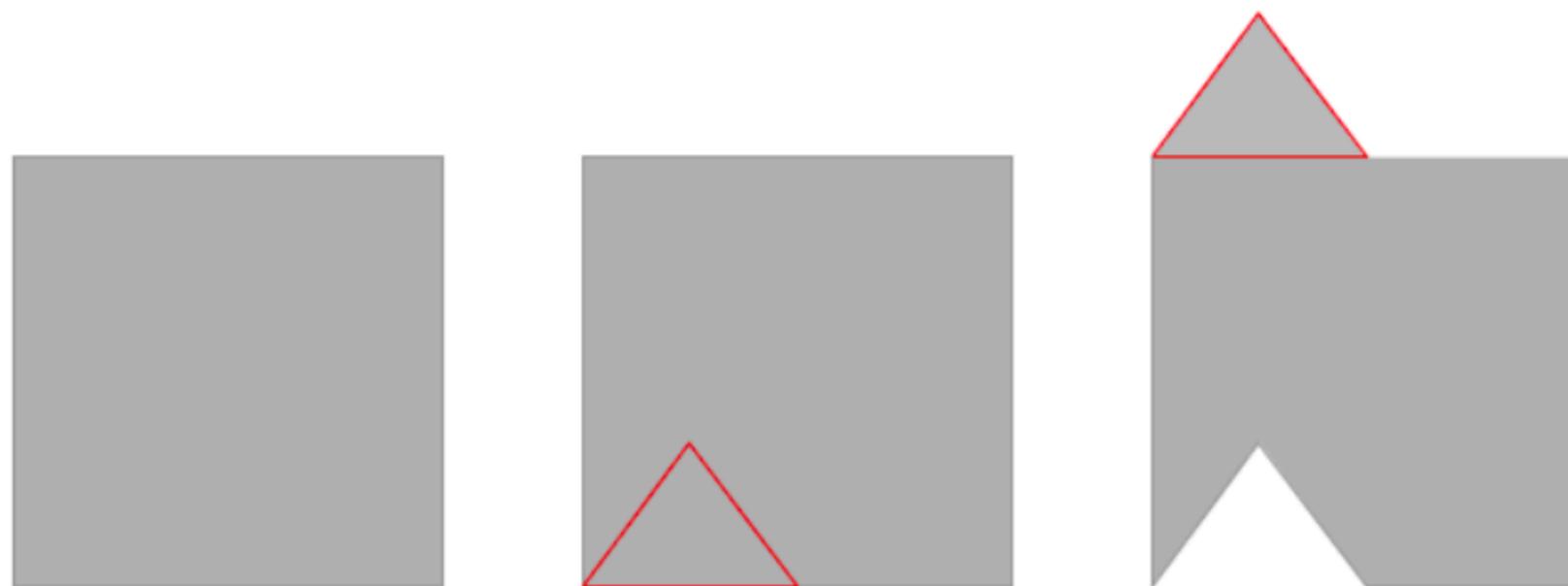


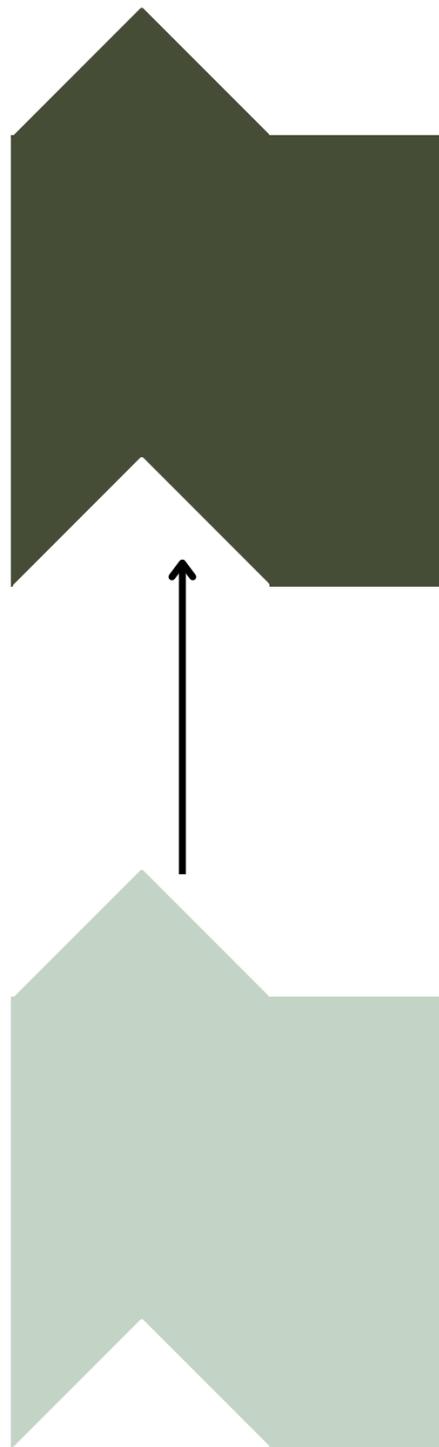
Técnica sem contornos de coloração

# Técnicas de Escher

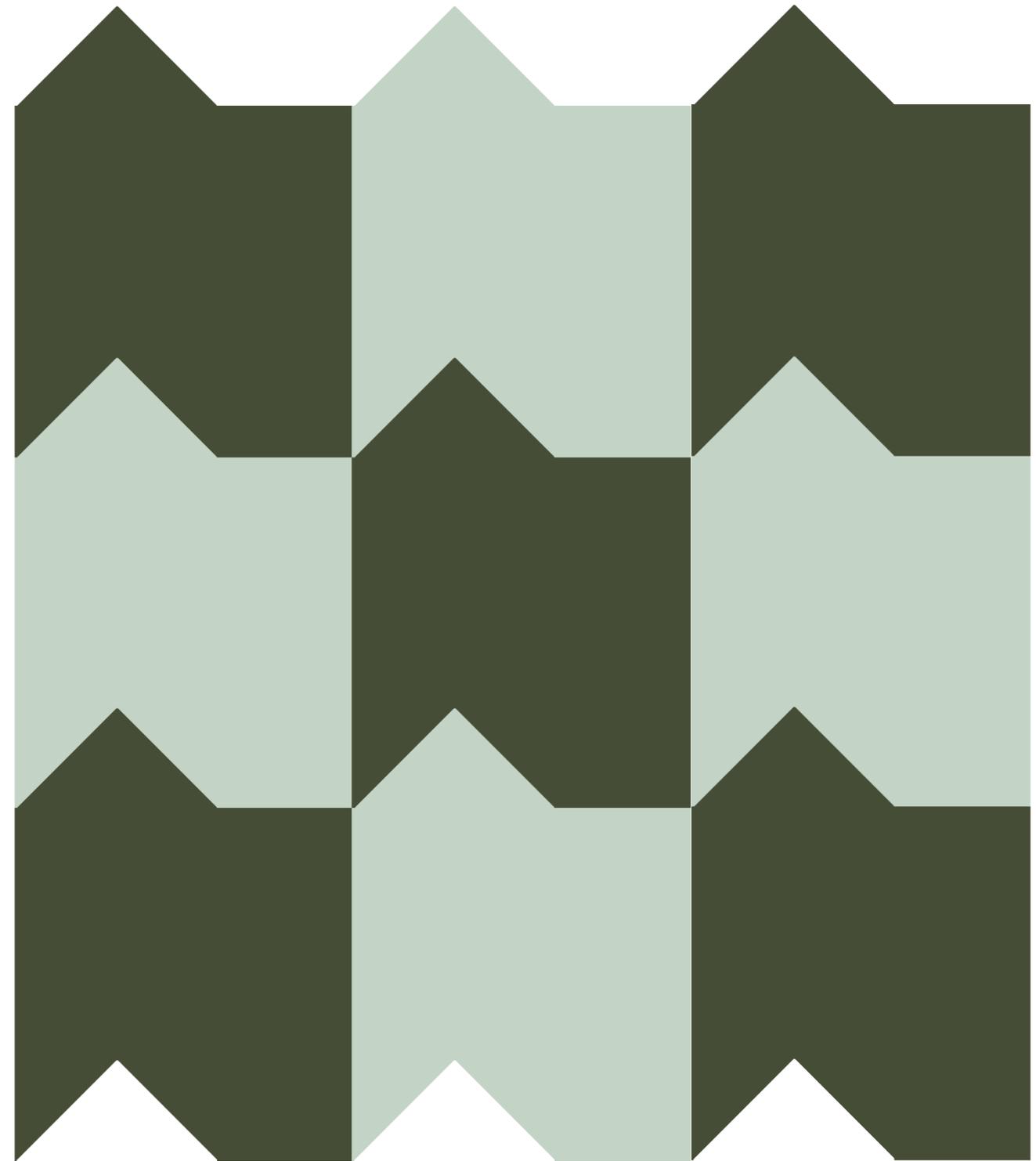
Uma das técnicas utilizadas por Escher é conhecida como “técnica da dentada”. Ela consiste em:

**“retirar um pedaço” da parte interna de um ladrilho, a partir de um de seus lados, e fixá-la na parte externa do mesmo ladrilho, a partir de outro lado, produzindo-se assim um novo ladrilho.”**

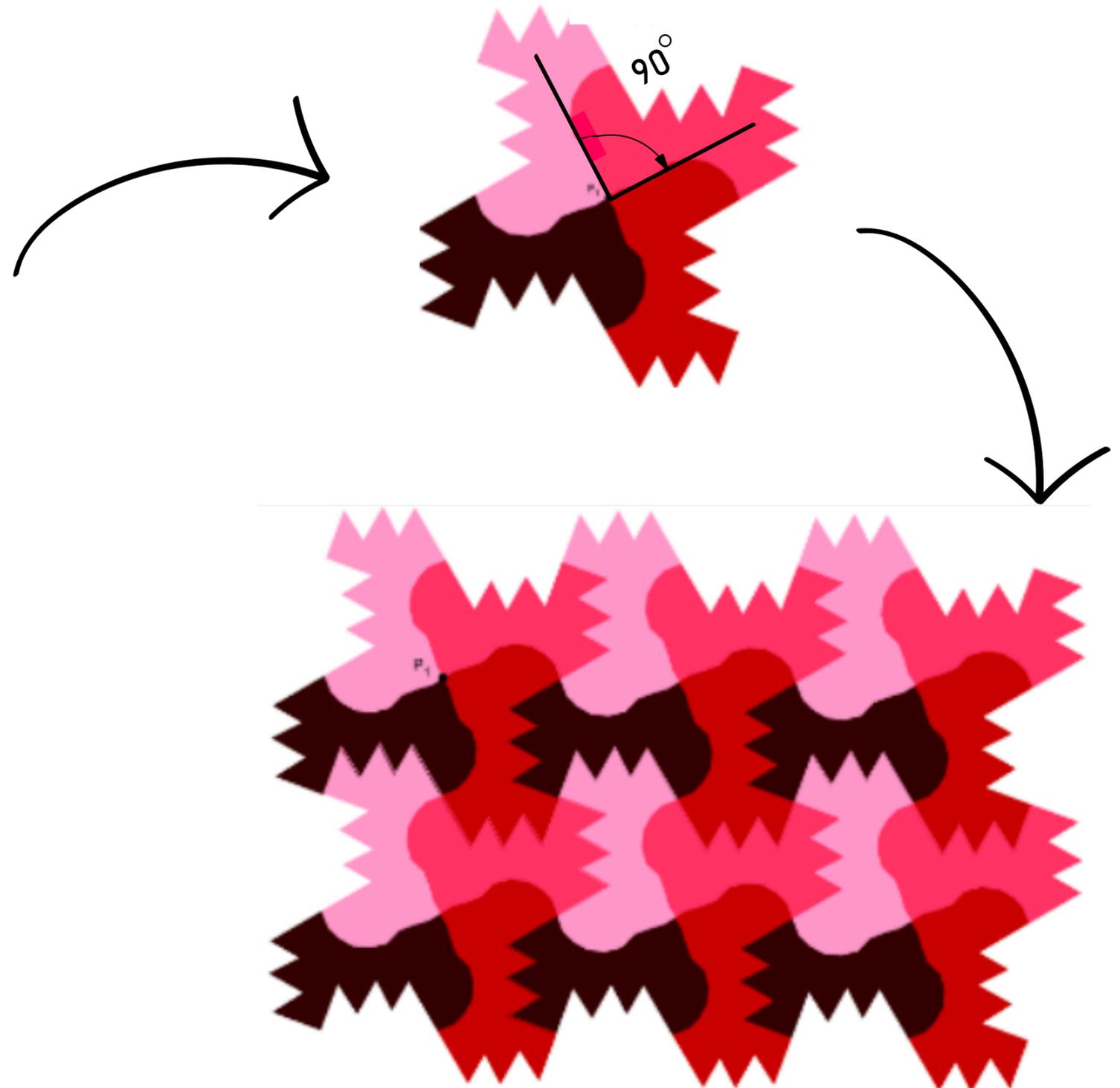
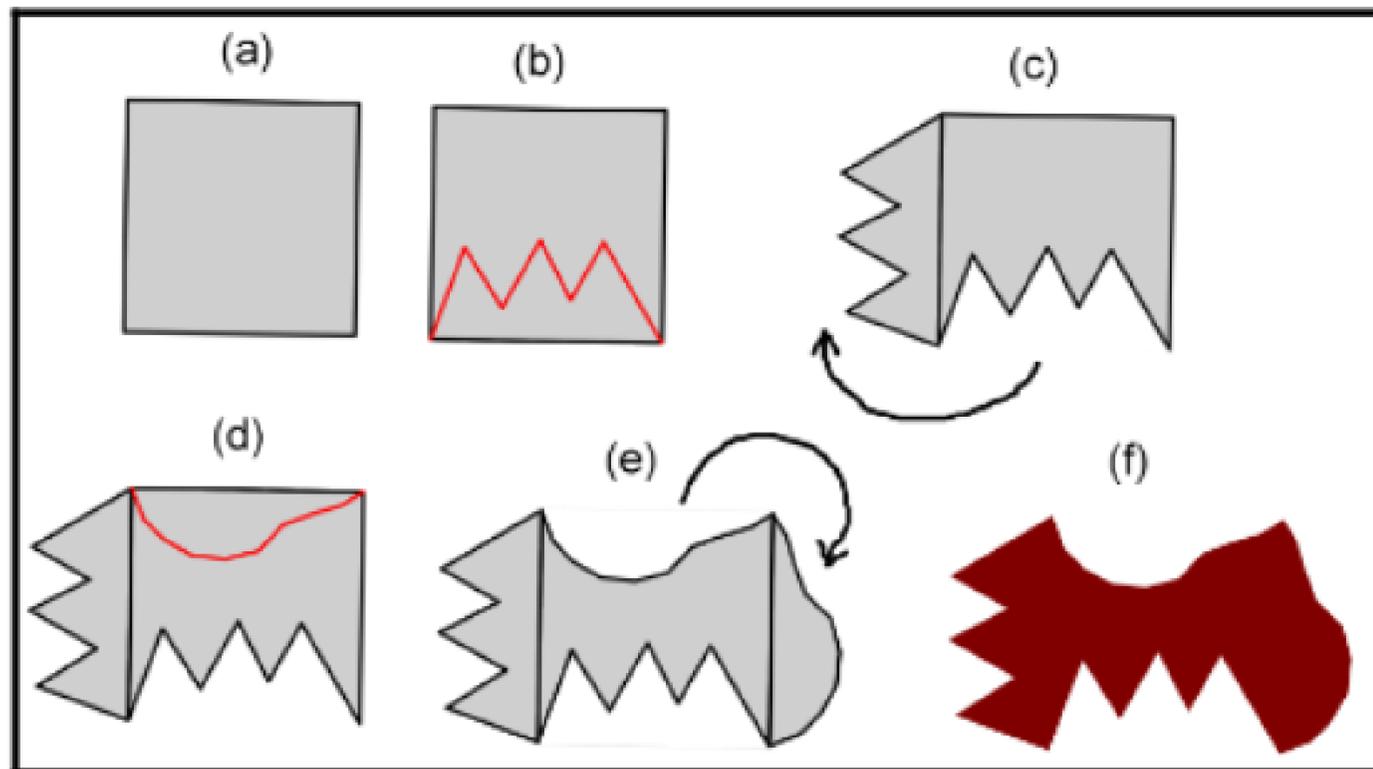




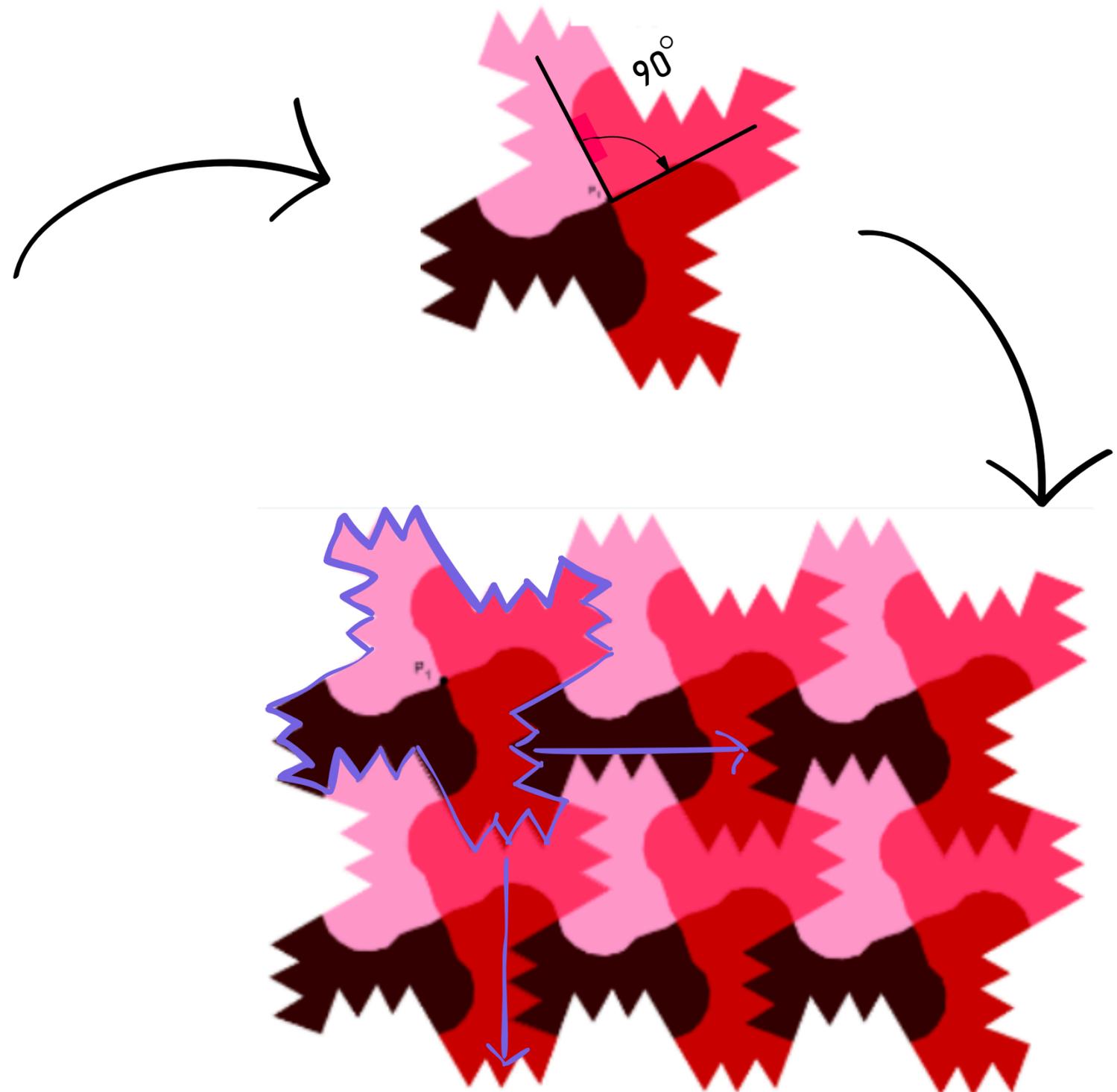
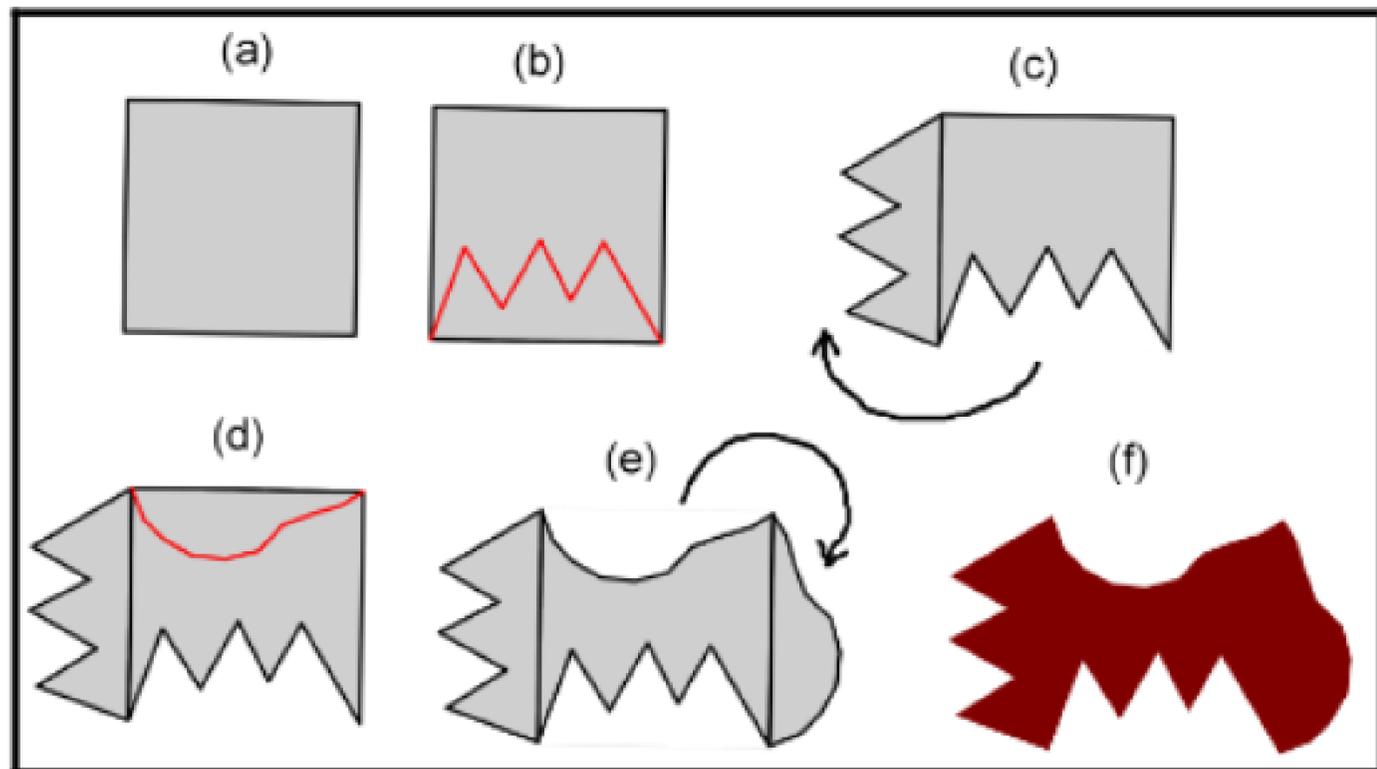
O ladrilho inicial tem a mesma área do ladrilho produzido e eles se encaixam perfeitamente, compondo uma pavimentação para o plano.



# Técnicas de Escher



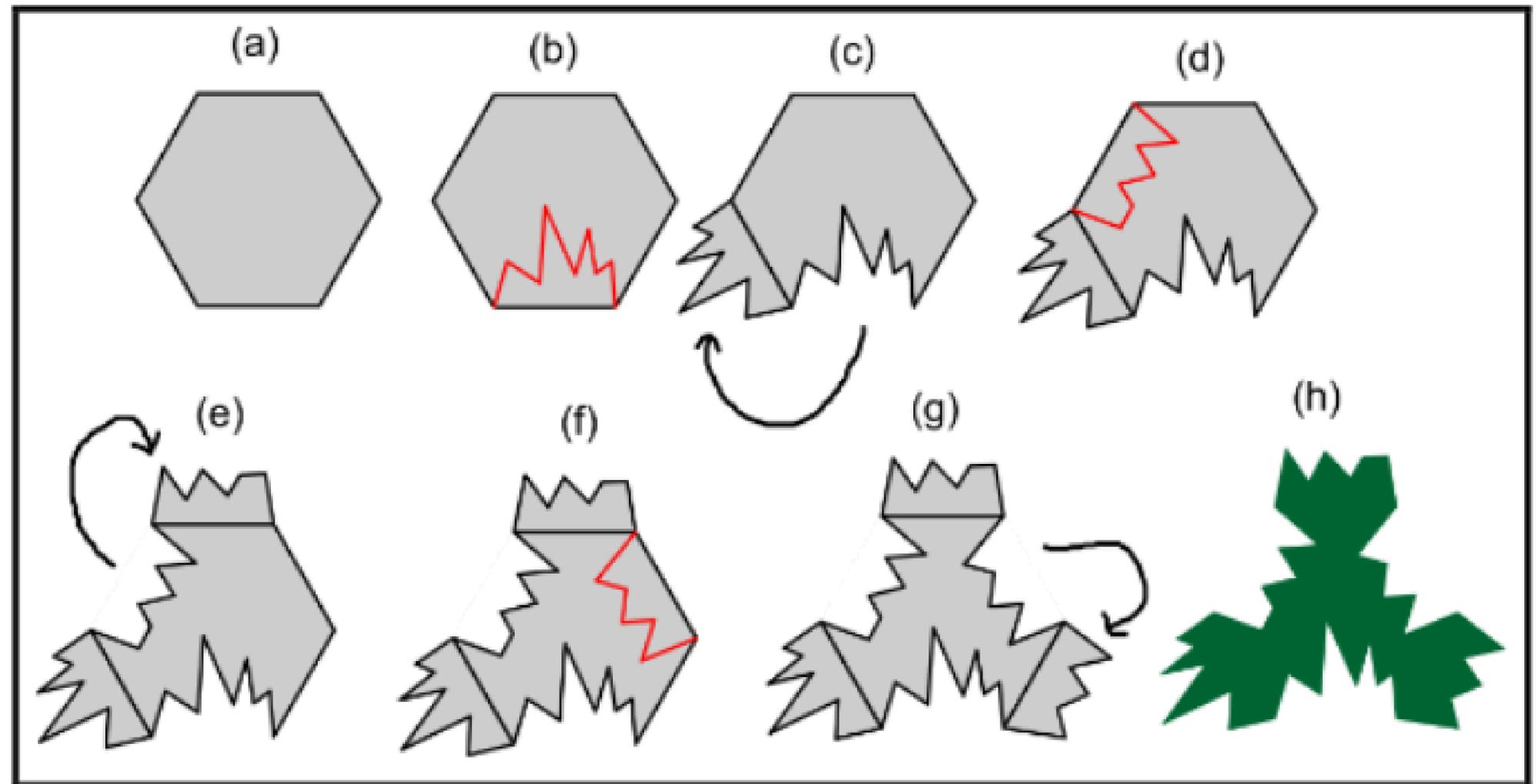
# Técnicas de Escher



# Geração da figura base por meio um hexágono e rotações

## Passo 1: Construção da figura base inicial

- Recortar um polígono de um dos lados do hexágono e colar no lado adjacente (no sentido horário). Figuras (b) e (c)
- Recortar um polígono do lado adjacente ao que foi colado e colar no lado adjacente (no sentido horário). Figuras (d) e (e)
- Repetir o processo mais uma vez. Figuras (f) e (g).

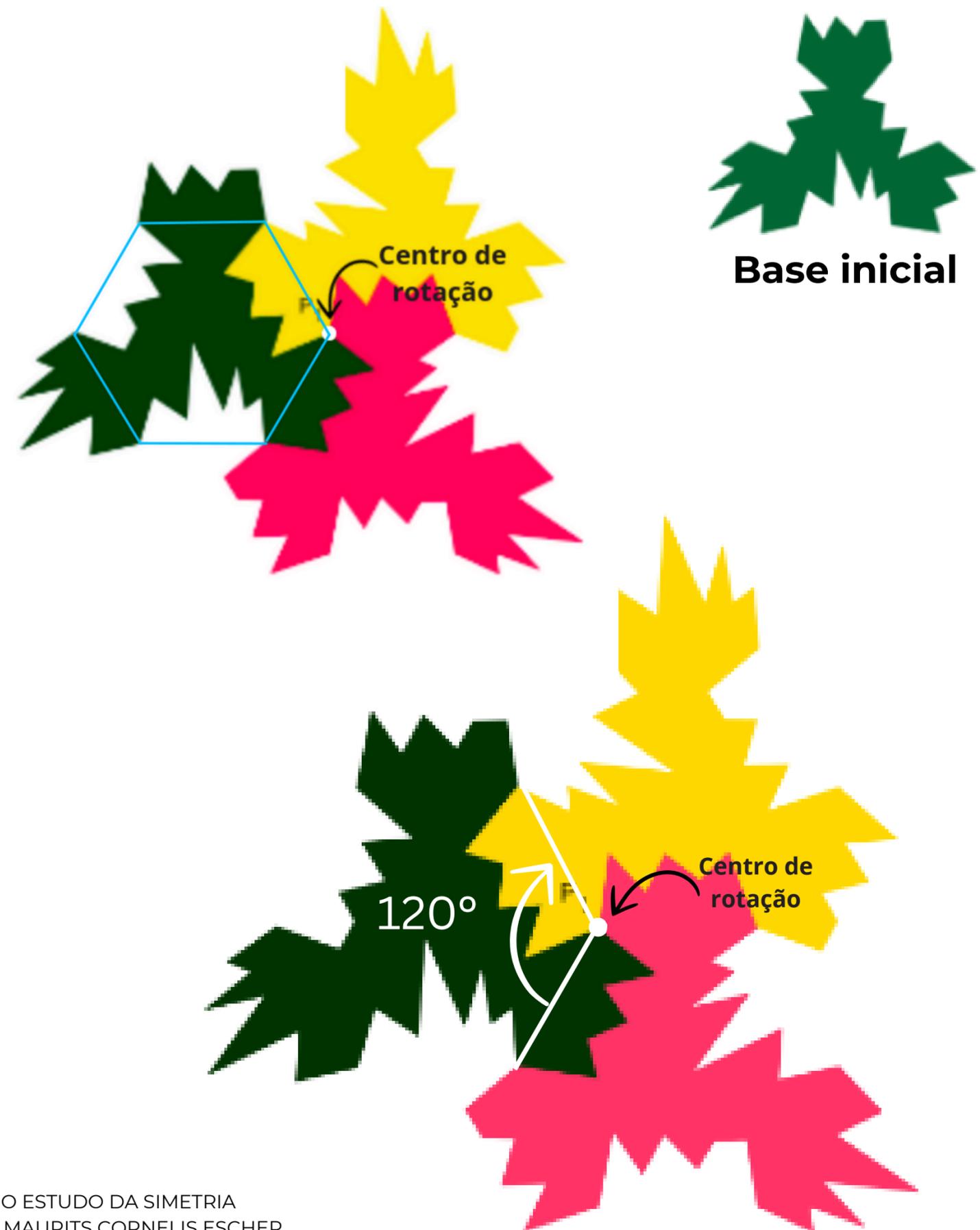


Figuras de O ESTUDO DA SIMETRIA ATRAVÉS DA ARTE DE MAURITS CORNELIS ESCHER

# Geração do elemento base por meio rotações

Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional

- Fixar um dos vértices do hexágono da base inicial no centro de rotação.
- Fazer uma rotação de  $120^\circ$  da base inicial em relação ao vértice indicado.
- Repetir o processo até completar seis rotações da base inicial
- O elemento base translacional para a tesselação está pronto!



# Translações do elemento base para contruir a tesselação

## Passo 3: Construção da tesselação

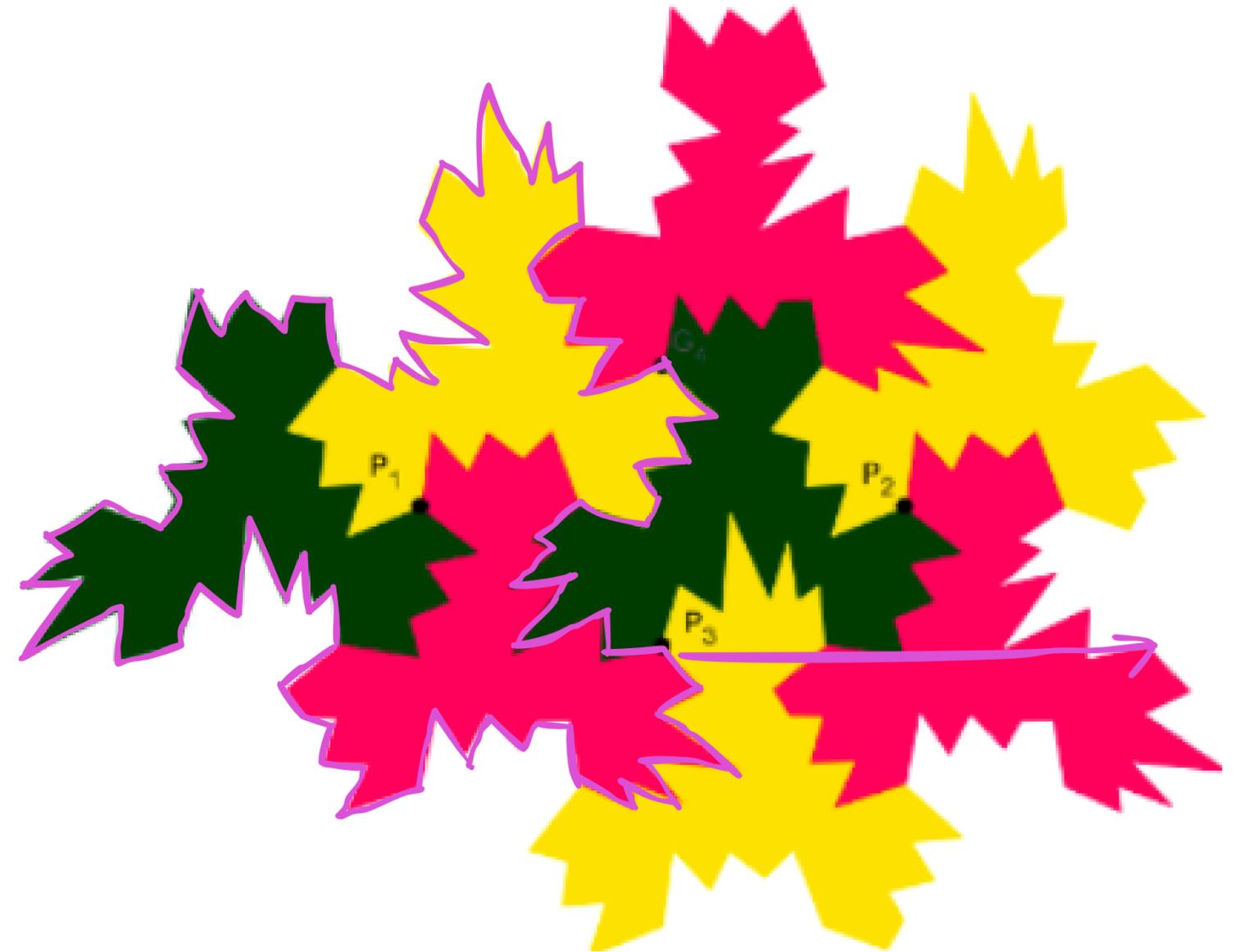
Transladando o elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, esta feita a tesselação.



# Translações do elemento base para contruir a tesselação

## Passo 3: Construção da tesselação

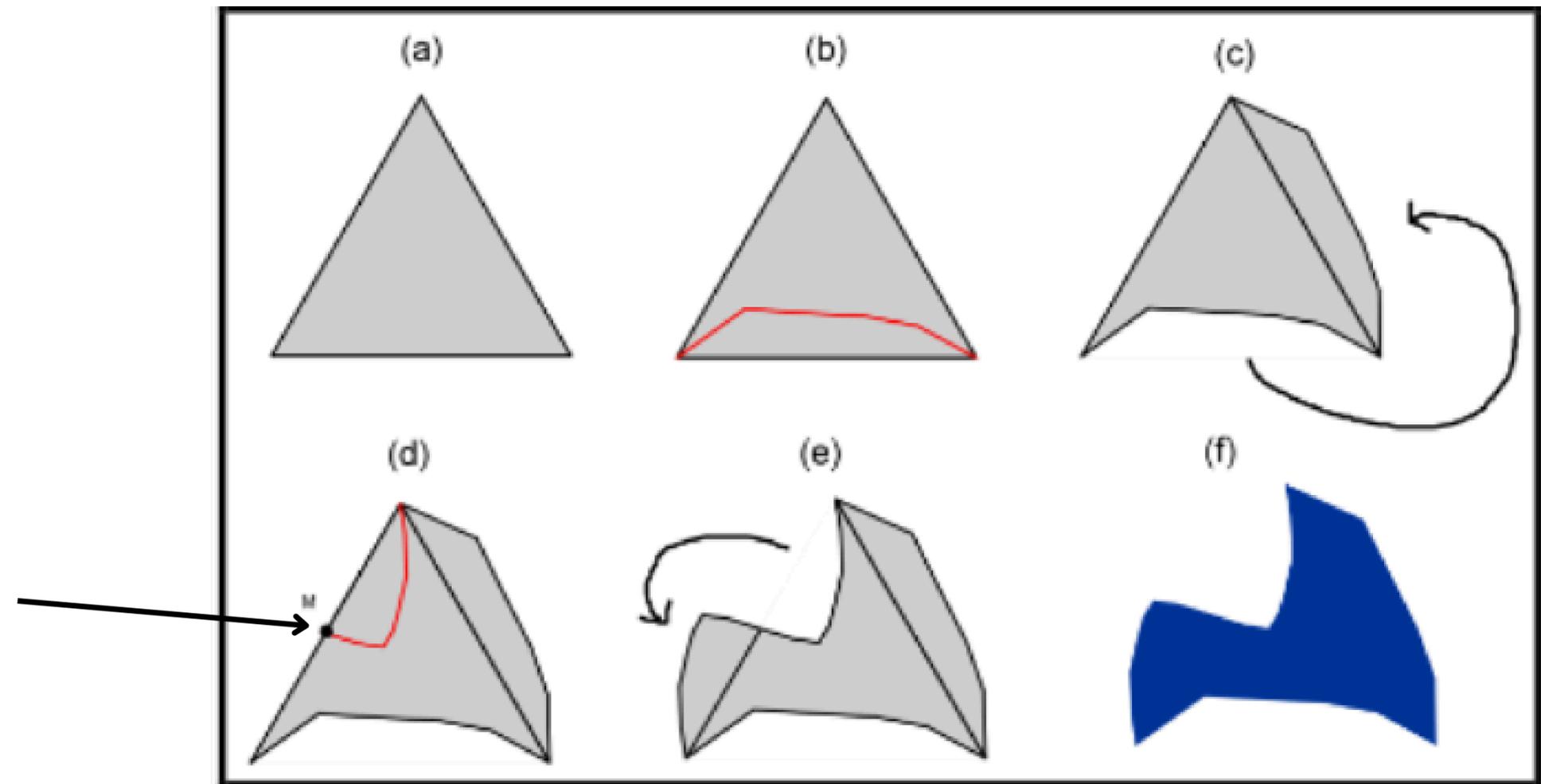
Transladando o elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, esta feita a tesselação.



# Geração da figura base por meio de um triângulo e rotações

Passo 1: Construção da figura base inicial

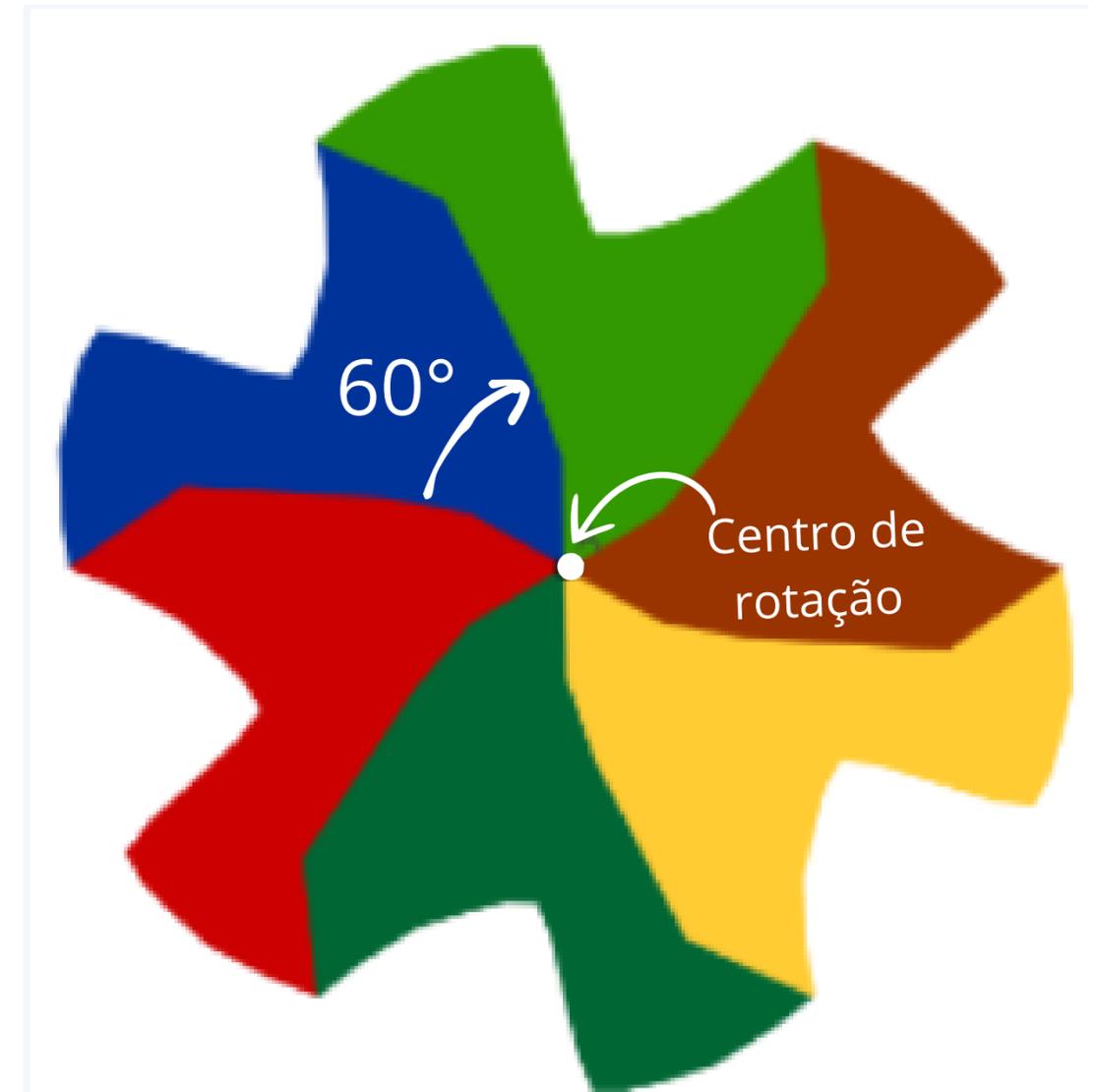
Ponto Médio



# Geração do elemento base por meio rotações

Passo 2: Processo para construção e translação do elemento base translacional

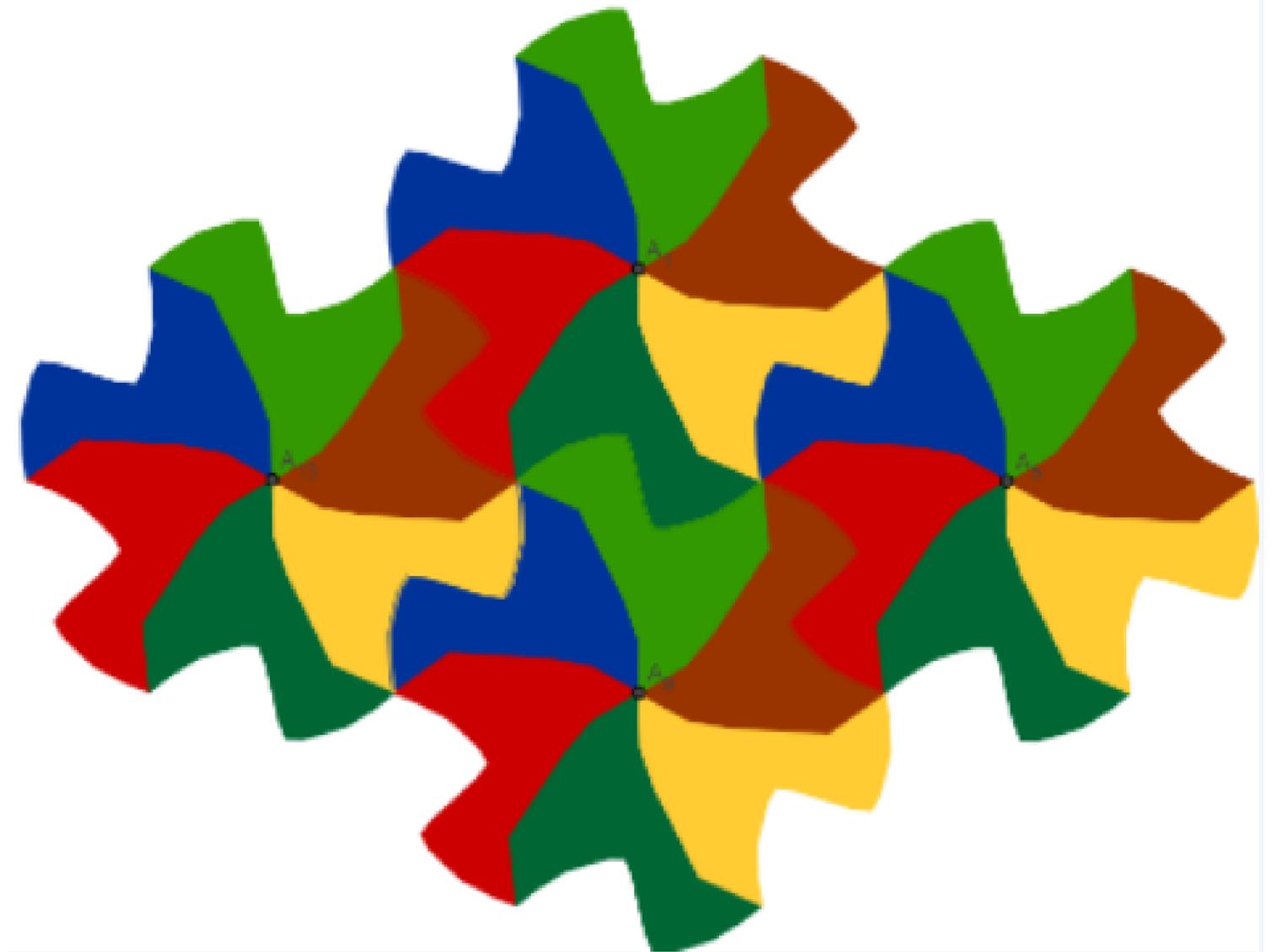
- Fixar um dos vértices da base inicial no centro de rotação.
- Fazer uma rotação de  $60^\circ$  da base inicial em relação ao vértice indicado.
- Repetir o processo até completar seis rotações da base inicial
- O elemento base translacional para a tesselação está pronto!



# Translações do elemento base para contruir a tesselação

## Passo 3: Construção da tesselação

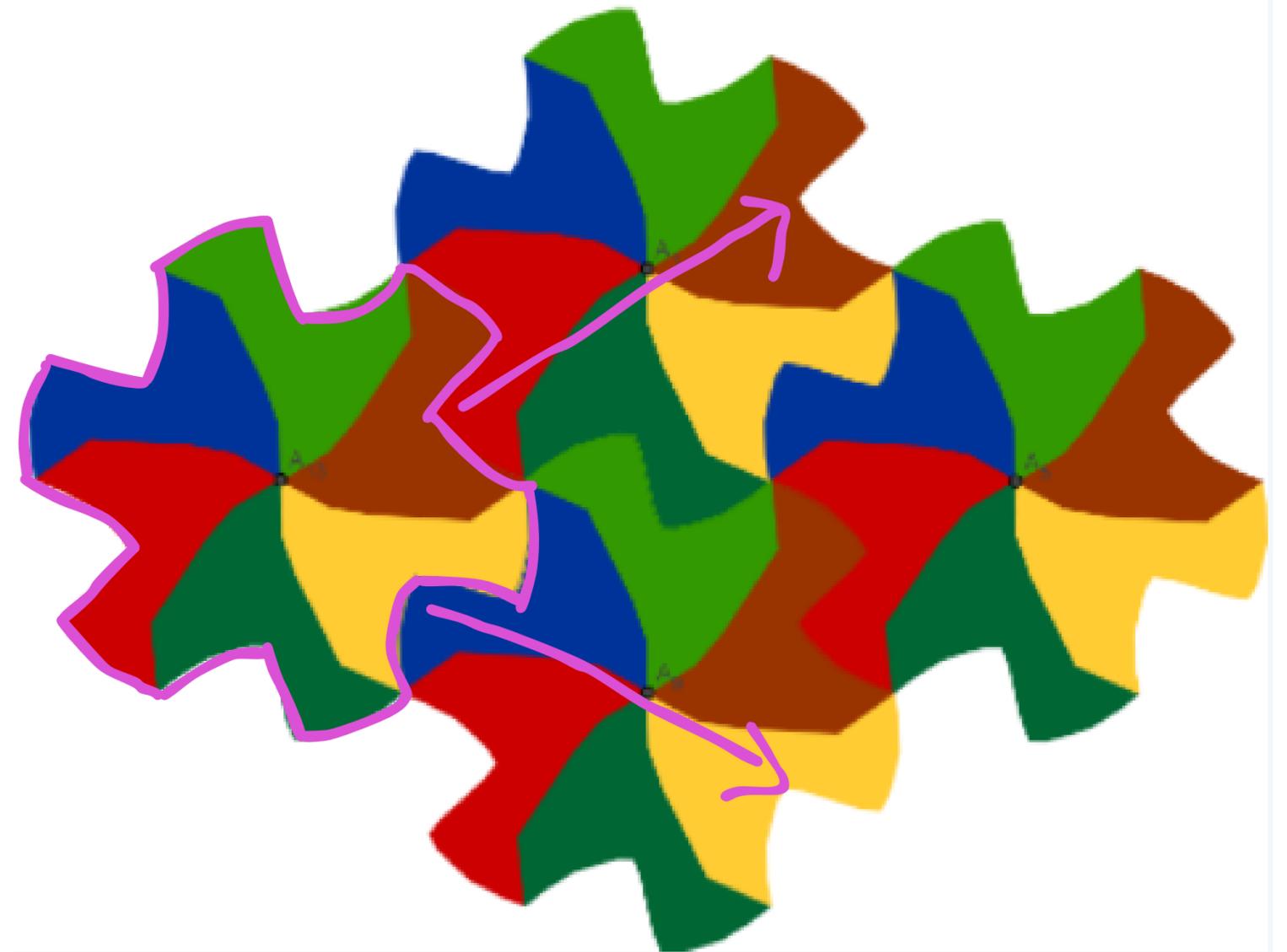
Transladando o elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, esta feita a tesselação.



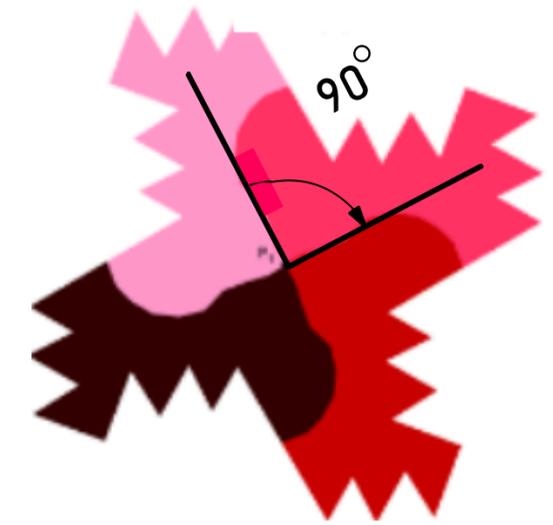
# Translações do elemento base para contruir a tesselação

## Passo 3: Construção da tesselação

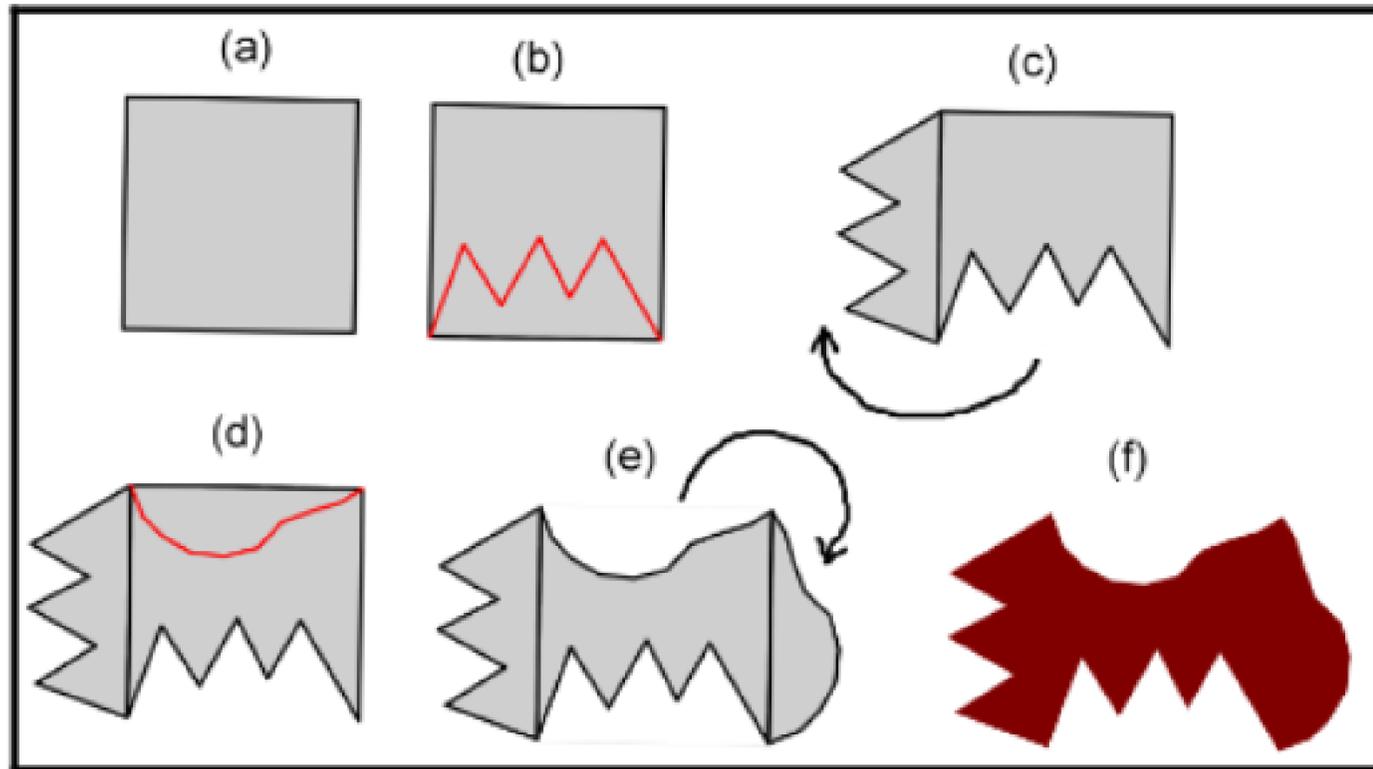
Transladando este elemento base  
translacional e encaixando um nos  
outros, seguindo uma grade  
translacional de tesselação  
hexagonal, esta feita a tesselação.



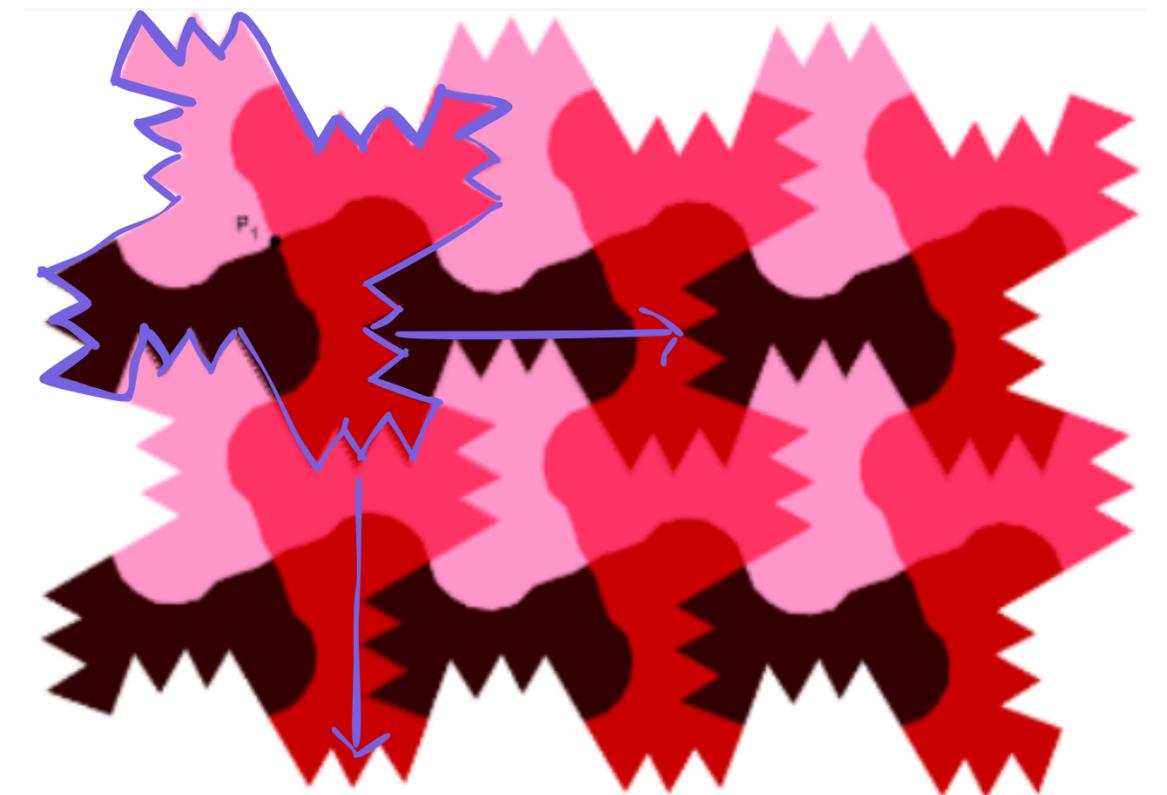
# Utilizando a rotação para geração da figura base - Quadrado



Passo 2: Construção e translação do elemento base translacional



Passo 1: Construção da figura base inicial



Passo 3: Construção da tesseleção