XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

MINICURSO

Noções de Epistemologia Bayesiana

Como o teorema de Bayes formaliza matematicamente nossos níveis de confiança em certos tipos de proposições

Reis, Saulo

Resumo:

Far-se-á neste minicurso uma abordagem introdutória à epistemologia bayesiana enquanto ferramenta de avaliação de níveis de confiança em certos tipos de proposição. No primeiro dia do minicurso, inicia-se por uma axiomatização da teoria da probabilidade, e uso de tabelas de contingência. No segundo dia, serão apresentados exemplos de percepção da falácia da taxa-base através do fator de Bayes, introduzido na axiomatização. Em seguida, será feita uma introdução sobre lógica proposicional e dos axiomas de Kolmogorov para uma epistemologia bayesiana, centrada no conceito de nível de confiança. No terceiro e último dia, com base nas ideias apresentadas da epistemologia bayesiana, serão analisados outros vieses de julgamento, como o paradoxo da loteria, a falácia da conjunção, a falácia do apostador e o problema de Monty Hall. Finalmente, far-se-á uma análise do experimento mental de Bayes – que motivou à formulação do teorema que leva seu nome.

Palavras-chave:

epistemologia bayesiana, probabilidade, teorema de Bayes, lógica proposicional.

1 Axiomatização da Teoria da Probabilidade

Façamos uma axiomatização da teoria da probabilidade, expondo definições e conceitos, até a dedução do Teorema de Bayes.

Definição 1 (Número de elementos de um conjunto) *Para qualquer conjunto E com uma quantidade finita de elementos, a função $\#(E)$ retorna seu número de elementos.*

Definição 2 (Espaço Amostral) *Considerando-se elementos* $e_1, e_2, \dots$ *, chama-se de espaço amostral ao conjunto de todos eles, a ser denotado por* $\Omega = \{e_1, e_2, \dots\}$.

Definição 3 (Evento) *Um evento* E *é um subconjunto do espaço amostral* Ω*, isto é,* $E \subset \Omega$.

Definição 4 (Evento Elementar) *Classifica-se um evento* E *como sendo elementar se ele for conjunto unitário, isto é, se* $\#(E) = 1$.

Definição 5 (Espaço de Eventos) *O espaço de eventos* S *é o conjunto de todos os possíveis eventos de* Ω*; isto é,* $S = \{s \mid s \subset \Omega\}$.

Definição 6 (Função de Probabilidade) *A função de probabilidade* $P(E)$ *é uma função com domínio* S*, contradomínio* $\mathbb{R}$*, e uma lei que satisfaça necessariamente a três condições:*

1. *A probabilidade de qualquer evento elementar é sempre maior ou igual a zero, isto é,*
$$P(\{e_i\}) \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$
2. *Para* $\forall E \in S$ *em que* $\#(E) > 1$*, é necessário que a probabilidade do evento* E *seja igual à soma das probabilidades dos eventos elementares que, em união, resultariam no próprio evento* E*, ou seja,*
$$P(E) = \sum_{e \in E} P(\{e\}).$$
3. *A probabilidade de* Ω*, isto é, a soma das probabilidades de todos os eventos elementares é igual a um, isto é,*
$$P(\Omega) = \sum_{e \in \Omega} P(\{e\}) = 1.$$

Definição 7 (Espaço Probabilístico) *O espaço probabilístico* (Ω, P) *é a dupla constituída por um espaço amostral* Ω *e uma função probabilística* $P(E)$*, sendo que* E *é um evento qualquer do espaço de eventos* S *de* Ω.

Definição 8 (Partição do Espaço Amostral) *Os eventos* A_1*,* A_2*, ...,* A_n *constituem uma partição* $\mathcal{P}$ *do espaço amostral* Ω *quando as seguintes condições foram satisfeitas:*

1. $A_i \in S, \forall i \in \mathbb{N}$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}$ *e* $i \neq j$*, isto é, eventos distintos são mutuamente exclusivos em* Ω.
3. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*, isto é, a união de todos os eventos resulta no espaço amostral.*

Teorema 1 (Lei da Probabilidade Total) *Considerando eventos E_1, E_2, ..., E_n que constituem uma partição de Ω (sendo por isso mutuamente exclusivos), e um outro evento qualquer A, os eventos $A \cap E_1$, $A \cap E_2$, ..., $A \cap E_n$ também serão mutuamente exclusivos. Sendo assim, a probabilidade do evento A poderá ser obtida:*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i). \end{aligned} \tag{1}$$

que é a equação da Lei da Probabilidade Total.

Teorema 2 (Probabilidade do Evento Complementar) *Considerando um espaço amostral $\Omega = \{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{w_1}, e_{w_2}, \ldots\}$ e um possível evento dele $A = \{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots\}$, o evento complementar de A seria $\overline{A} = \{e_{w_1}, e_{w_2}, \ldots\}$, com $k_i \neq w_j$ para $\forall i, j \in \mathbb{N}$.*

De acordo com os Itens 2 e 3 da Definição 6:

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= \sum_{e \in \Omega} P(\{e\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{e_{k_i}\}) + \sum_{j=1}^{\infty} P(\{e_{w_j}\}) = \\ &= P(A) + P(\overline{A}) \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A). \end{aligned} \tag{2}$$

Definição 9 (Probabilidade Condicional) *Sejam dois eventos E e Ω' do espaço amostral Ω, em que $P(\Omega') \neq 0$. Então a probabilidade condicional de sucesso de E em Ω' é dada por*

$$P(E|\Omega') = \frac{P(E \cap \Omega')}{P(\Omega')}. \tag{3}$$

A partir da Definição 9 e usando H no lugar de Ω', tem-se $P(E \cap H) = P(E) \times P(H|E)$. Como não há diferença entre $E \cap H$ e $H \cap E$, então é possível escrever

$$P(E \cap H) = P(H \cap E) \Longrightarrow P(E) \times P(H|E) = P(H) \times P(E|H)$$

de onde deduzimos o

Teorema 3 (Teorema de Bayes) *Sejam dois eventos E e H do espaço amostral Ω, em que $P(H) \neq 0$ e $P(E) \neq 0$. Então a probabilidade condicional de sucesso de H em E é dada por*

$$P(H|E) = \frac{P(H) \times P(E|H)}{P(E)}. \tag{4}$$

Definição 10 (Independência entre eventos) *Os eventos E e Ω' serão classificados como independentes entre si se e somente se ocorrer $p(E|\Omega') = p(E)$.*

Lembrando da Definição 9 e considerando E e Ω' como eventos independentes entre si – e portanto $p(E|\Omega') = p(E)$, então pode-se usar a Definição 10 acima, de modo que se deduz uma importante relação no teorema abaixo:

Teorema 4 *Sejam dois eventos E e Ω' independentes entre si. Então*

$$P(E \cap \Omega') = P(E)P(\Omega') \tag{5}$$

Definição 11 (Razão de Chances) *Seja um evento E em um espaço amostral Ω, com $0 < P(E) < 1$. Chama-se de razão de chances de E ao valor $O(E)$ que representa a razão entre a probabilidade do seu sucesso e a probabilidade da sua falha, isto é,*

$$O(E) = \frac{P(E)}{P(\overline{E})} = \frac{P(E)}{1 - P(E)}. \tag{6}$$

Uma interpretação prática bastante comum para a noção de razão de chances é a de que, se $O(E)$ puder ser expresso por uma fração p/q com $p, q \in \mathbb{N}$, então para cada $p + q$ repetições do experimento, há expectativa de p sucessos e q falhas do evento E.

2 Uso de Tabelas de Contingência

Considerando o arcabouço teórico da probabilidade – em especial, a noção de Probabilidade Condicional (conforme a Definição 9), a noção de partição de um espaço amostral (conforme a Definição 8) e a Lei da Probabilidade Total –, passemos a explicar o uso de Tabelas de Contingência (doravante referida apenas como “tabela”) para compreender como elas beneficiam uma visão mais completa da realidade e dos problemas em diversos campos da experiência humana e, em especial, nas ciências.

Eis abaixo o esquema geral de uma tabela:

Critério 2 / **Critério 1**	$\overline{C_2}$	C_2	**Total**
$\overline{C_1}$	$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$	$P(\overline{C_1} \cap C_2)$	$P(\overline{C_1})$
C_1	$P(C_1 \cap \overline{C_2})$	$P(C_1 \cap C_2)$	$P(C_1)$
Total	$P(\overline{C_2})$	$P(C_2)$	100% ou 1

Tab. 1: Estrutura geral de uma Tabela de Contingência

A tabela traz consigo um método esquemático de resolução de problemas, facilitando ao estudante que ele enxergue o quadro geral das informações disponíveis e das não disponíveis a ele, facilitando a busca daquilo que ainda é desconhecido e/ou relevante para solucionar o problema.

Para compreender como ela deve ser construída, é preciso inicialmente dar atenção aos questionamentos sobre a natureza do problema, cujas respostas informam quem representa o espaço amostral, isto é, os seus elementos, e também sobre os critérios usados para classificação desses elementos no espaço amostral. Vejamos:

- **Qual o conjunto ou agrupamento que representa o espaço amostral, e quem são seus elementos?** Todos os valores de probabilidade se referem a esses elementos. Na tabela, o valor da probabilidade do espaço amostral Ω é representada na célula onde se escreve 100% ou 1.

- **Que critérios foram usados para classificar os elementos desse espaço amostral, e como se expressam como partições?** Todos os elementos do problema poderão ser classificados segundo dois critérios diferentes (e teoricamente independentes um do outro). Na tabela, esses dois critérios foram referidos como "Critério 1" (representado nas linhas) e "Critério 2" (representado nas colunas). Segundo o "Critério 1", todo elemento $e \in \Omega$ deverá satisfazê-lo (isto é, $e \in C_1$) ou não satisfazê-lo (isto é, $e \notin C_1 \implies e \in \overline{C_1}$). Assim, as células $P(C_1)$ e $P(\overline{C_1})$ indicam, respectivamente, as probabilidades do evento satisfazer e não satisfazer ao "Critério 1". Procedimento análogo valerá para o "Critério 2": se $e \in \Omega$, então $e \in C_2$ ou $e \in \overline{C_2}$; e as células $P(C_2)$ e $P(\overline{C_2})$ indicam, respectivamente, as probabilidades de o elemento satisfazer e não satisfazer ao "Critério 2".

Tendo respondido a esses questionamentos, o preenchimento do restante da tabela se torna possível quando compreendermos a disposição das probabilidades nela indicadas. A tabela permite a integração de dois critérios teoricamente independentes e, por conta disso, qualquer elemento e poderá pertencer a quatro possíveis eventos, resultantes da combinação daqueles critérios. Cada um desses quatro eventos terão suas probabilidades indicadas na tabela:

- $P(C_1 \cap C_2)$: probabilidade do elemento satisfazer a ambos os critérios;
- $P(C_1 \cap \overline{C_2})$: probabilidade de satisfazer a "Critério 1" mas não a "Critério 2";
- $P(\overline{C_1} \cap C_2)$: probabilidade de satisfazer a "Critério 2" mas não a "Critério 1";
- $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$: probabilidade de não satisfazer a nenhum dos critérios.

Há três importantes considerações a serem feitas aqui e que fazem parte do procedimento de preenchimento da tabela a fim de mantê-la consistente com o arcabouço teórico da probabilidade:

2.1 Observância da probabilidade do evento complementar

A Equação 2 do evento complementar precisa ser incorporada à estrutura da tabela. Para ilustrar, tomemos os eventos associados somente ao "Critério 1", C_1 e $\overline{C_1}$. Esses eventos são complementares e, portanto, a soma das suas probabilidades deve ser 1, ou 100%. Note que essas três probabilidades mencionadas (C_1, $\overline{C_1}$ e a soma 1 ou 100%) estão todas posicionadas verticalmente uma ao lado da outra na tabela, à direita, com a soma mais abaixo. Visualmente e didaticamente, isto é muito vantajoso, o que torna o preenchimento dos valores das probabilidades muito mais interativo. O estudante não precisa buscar $P(C_1)$ e $P(\overline{C_1})$ separadamente: basta achar uma delas, e a outra já estará determinada.

De modo análogo, para o "Critério 2" e seus eventos C_2 e $\overline{C_2}$, que também são complementares, suas probabilidades e a sua soma estão dispostas horizontalmente uma ao lado da outra na tabela, abaixo, com a soma mais à direita. A mesma vantagem visual e didática ocorre, e o estudante não precisa buscar as probabilidades $P(C_2)$ e $P(\overline{C_2})$ separadamente. Pode-se até entender esta estratégia como uma forma de *dialética*.

Critério 2 / Critério 1	$\overline{C_2}$	C_2	Total
$\overline{C_1}$	$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$	$P(\overline{C_1} \cap C_2)$	$P(\overline{C_1})$
C_1	$P(C_1 \cap \overline{C_2})$	$P(C_1 \cap C_2)$	$P(C_1)$ ⊕
Total	$P(\overline{C_2})$ ⊕	$P(C_2)$	100% ou 1

Tab. 2: Soma das probabilidades de eventos complementares

2.2 Observância da Lei da Probabilidade Total

É preciso também incorporar Lei da Probabilidade Total (Equação 1). Sem perda de generalidade, considere de início a probabilidade de satisfação do "Critério 1", $P(C_1)$. Um elemento que satisfaça a este critério tem possibilidade de ter satisfeito ou não ao outro critério ("Critério 2"), pois já se assumiu que os critérios sejam teoricamente independentes um do outro. Como C_2 e $\overline{C_2}$ constituem uma partição de Ω, a Lei da Probabilidade Total se aplica, resultando em $P(C_1 \cap \overline{C_2}) + P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)$. Essas três probabilidades estão dispostas na mesma linha da tabela, no meio dela, e o resultado $P(C_1)$ da soma aparece à direita. De maneira muito semelhante, a vantagem visual e didática do item anterior também se verifica. Neste caso, a determinação de dois desses três valores – $P(C_1 \cap \overline{C_2})$, $P(C_1 \cap C_2)$ ou $P(C_1)$ – implica na determinação do outro, também agilizando o preenchimento da tabela.

Critério 2 / Critério 1	$\overline{C_2}$	C_2	Total
$\overline{C_1}$	$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$ ⊕	$P(\overline{C_1} \cap C_2)$	$P(\overline{C_1})$
C_1	$P(C_1 \cap \overline{C_2})$ ⊕	$P(C_1 \cap C_2)$	$P(C_1)$
Total	$P(\overline{C_2})$	$P(C_2)$	100% ou 1

Tab. 3: Lei da Probabilidade Total nas linhas

Tal procedimento também funcionará para a linha onde aparece a probabilidade $P(\overline{C_1})$ como resultado da Lei da Probabilidade Total. O resultado $P(\overline{C_1})$ aparece na mesma linha e à direita das probabilidades $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$ e $P(\overline{C_1} \cap C_2)$, e a soma dessas duas resulta na primeira.

Para as colunas, procedimento análogo funcionará. As probabilidades $P(\overline{C_2})$ e $P(C_2)$, que aparecem abaixo na tabela, são resultado da soma das duas probabilidades que aparecem acima delas em suas respectivas colunas. Isto é, aplicando a Lei da Probabilidade Total, tem-se $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) + P(C_1 \cap \overline{C_2}) = P(\overline{C_2})$ e $P(\overline{C_1} \cap C_2) + P(C_1 \cap C_2) = P(C_2)$.

2.3 Observância da Probabilidade Condicional

Para as probabilidades que envolvem os dois critérios simultaneamente, será necessário incorporar da relação da Probabilidade Condicional (Equação 3). Sem perda de generalidade, vamos considerar primeiro as probabilidades condicionais envolvendo C_1

Critério 2 / Critério 1	$\overline{C_2}$	C_2	Total
$\overline{C_1}$	$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$	$P(\overline{C_1} \cap C_2)$	$P(\overline{C_1})$
C_1	$P(C_1 \cap \overline{C_2})$	$P(C_1 \cap C_2)$	$P(C_1)$
Total	$P(\overline{C_2})$	$P(C_2)$	100% ou 1

Tab. 4: Lei da Probabilidade Total nas colunas

e C_2. Será possível obter essa probabilidade de dois modos possíveis. Se usarmos C_1 como condicional, teremos:

$$P(C_2|C_1) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)} \Longrightarrow P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \times P(C_2|C_1).$$

Ou, se usarmos C_2 como condicional, teremos:

$$P(C_1|C_2) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_2)} \Longrightarrow P(C_1 \cap C_2) = P(C_2) \times P(C_1|C_2).$$

Ambas as expressões acima usam probabilidade conjunta $P(C_1 \cap C_2)$ – que aparece na tabela –, e não parece haver nelas nenhum indício para dar preferência a uma ou outra. A escolha de uma delas só será possível considerando-se as informações do problema a ser solucionado. É neste ponto onde qualquer uma das probabilidades condicionais – $P(C_1|C_2)$ ou $P(C_2|C_1)$ poderão ser usadas, seja como informação oferecida pelo contexto do problema ou como informação a ser obtida para solucionar o problema.

Critério 2 / Critério 1	$\overline{C_2}$	C_2	Total
$\overline{C_1}$	$P(\overline{C_1}) \times P(\overline{C_2}\vert\overline{C_1})$ ou $P(\overline{C_2}) \times P(\overline{C_1}\vert\overline{C_2})$	$P(\overline{C_1}) \times P(C_2\vert\overline{C_1})$ ou $P(C_2) \times P(\overline{C_1}\vert C_2)$	$P(\overline{C_1})$
C_1	$P(C_1) \times P(\overline{C_2}\vert C_1)$ ou $P(\overline{C_2}) \times P(C_1\vert\overline{C_2})$	$P(C_1) \times P(C_2\vert C_1)$ ou $P(C_2) \times P(C_1\vert C_2)$	$P(C_1)$
Total	$P(\overline{C_2})$	$P(C_2)$	100% ou 1

Tab. 5: Probabilidades Condicionais

Quanto às probabilidades condicionais envolvendo $\overline{C_1}$ ou $\overline{C_2}$, basta proceder de modo análogo para obter alguma das probabilidades conjuntas restantes e que também aparecem na tabela, ou seja, $P(C_1 \cap \overline{C_2})$, $P(\overline{C_1} \cap C_2)$ ou $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$. Qualquer uma destas probabilidades conjuntas farão uso das probabilidades condicionais com $\overline{C_1}$ ou $\overline{C_2}$ e o mesmo tipo de escolha mencionado anteriormente se aplica aqui. Usar alguma das duas expressões dessas probabilidades conjuntas é uma decisão a ser tomada pelo contexto do problema, verificando-se as informações já obtidas ou a serem obtidas.

Encerra-se aqui a exposição do uso de tabelas de contingência. Dada a generalidade dessa exposição, exemplificar o uso da tabela fará com que a vantagem do seu ensino seja mais facilmente percebida. Muitos problemas continuam podendo ser solucionados pelos cálculos tradicionais da probabilidade, numa disposição visual linear tradicional. Contudo, uma visão mais completa desses problemas será obtida pelo uso da tabela, além da própria disposição visual das informações e das relações entre elas ficar mais acessível.

Exemplo 1 (Estou gripado ou não, eis a questão) *Uma pessoa está com dor de cabeça e a garganta inflamada. Fazendo uma rápida pesquisa na internet, ela descobre que entre todas as pessoas que realmente estão gripadas, 90% delas tem esses mesmos sintomas. Além disso, essa mesma pessoa também descobre que, a cada ano, 5% da população pega gripe, e que 20% da população sente dores de cabeça e garganta inflamada em algum momento desse período. Qual é a probabilidade de essa pessoa realmente estar gripada?*

Relembrando a Definição 8, há que se reconhecer quais informações nesse problema garantem a existência de um espaço amostral e dos critérios para identificar partições desse espaço. Vejamos:

- *Qual o conjunto ou agrupamento que representa o espaço amostral, e quem são seus elementos?* Nesse problema, o objeto de estudo de probabilidade é a "pessoa", que faz parte de um conjunto maior chamado de "população". Portanto, os elementos do espaço amostral seriam pessoas, e o espaço amostral seria a população.

- *Que critérios foram usados para classificar os elementos desse espaço amostral, e como se expressam como partições?* Frases como "5% da população pega gripe" e "20% da população sente dores de cabeça e garganta inflamada" oferecem informações sobre uma parte do espaço amostral e, nisso, incluem em si mesmas algum tipo de critério. Na primeira frase, os elementos (pessoas) foram classificados pelo critério de "estar gripado". Pela lógica básica, é impossível que uma pessoa esteja ao mesmo tempo gripada e não-gripada e, com esse critério, pode-se garantir que G (estar gripado) e $\overline{G}$ (não estar gripado) constituem de fato uma partição do espaço amostral Ω (a população). Já na segunda frase, os elementos foram classificados pelo critério de "ter sintomas" e, analogamente à frase anterior, garante-se que S (ter sintomas) e $\overline{S}$ (não ter sintomas) constituem uma outra possível partição de Ω.

Note que a probabilidade desejada, a da pessoa estar gripada, está condicionada ao fato de ela já ter sintomas. Desse modo, usando a notação simbólica estabelecida, o objetivo é calcular $P(G|S)$. Pelo Teorema de Bayes:

$$P(G|S) = \frac{P(G) \times P(S|G)}{P(S)}. \tag{7}$$

Façamos a interpretação das probabilidades do lado direito da igualdade acima. $P(G)$ se refere à probabilidade de uma pessoa qualquer da população estar gripada sem qualquer condição prévia, isto é, $P(G) = 5\% = 0.05$. De modo análogo, $P(S)$ representa a probabilidade de uma pessoa qualquer apresentar sintomas sem condições prévias, ou seja, $P(S) = 20\% = 0.20$ e, finalmente, $P(S|G)$ representa a probabilidade de uma pessoa já gripada ter os sintomas, isto é, $P(S|G) = 90\% = 0.90$. Usando estes valores no Teorema de Bayes, obtemos

$$P(G|S) = \frac{0.05 \times 0.90}{0.20} = 0.225$$

e portanto, a probabilidade de uma pessoa sintomática realmente estar gripada é de 22.5%, o que representa possivelmente um valor abaixo do que seria esperado sem uma devida análise.

Observe que, usando o Teorema de Bayes de modo direto, foi possível obter a probabilidade desejada sem grandes esforços. Contudo, é possível estudar o problema de modo mais amplo, se usarmos uma tabela e todo o processo descrito na Seção 2. Utilizando as informações oferecidas no problema e interpretando-os para a tabela, pode-se preencher uma porção dela como a seguir:

Gripe \ Sintomas	$\overline{S}$	S	Total
$\overline{G}$	?	?	?
G	?	$90\% \times 5\%$ $= 4.5\%$	5%
Total	?	20%	100%

Tab. 6: Tabela inicial para o Exemplo 1

Observe que só foi possível escrever $P(G \cap S) = 4.5\%$ por conta da Probabilidade Condicional $P(G \cap S) = P(G) \times P(S|G) = 0.05 \times 0.90 = 0.045$.

Depois desse preenchimento inicial e relembrando a probabilidade do evento complementar e da Lei da Probabilidade Total, torna-se possível preencher o restante da tabela e obter um quadro mais amplo do problema:

Gripe \ Sintomas	$\overline{S}$	S	Total
$\overline{G}$	79.5%	15.5%	95%
G	0.5%	4.5%	5%
Total	80%	20%	100%

Tab. 7: Tabela preenchida para o Exemplo 1

Por essa tabela, todas as probabilidades possíveis poderão ser obtidas. Voltando ao problema do exemplo, o objetivo era obter a probabilidade de uma pessoa realmente estar gripada, desde que ela tenha apresentado sintomas, isto é, $P(G|S)$. Essa probabilidade condicional, estando diretamente relacionada com a probabilidade conjunta $P(G \cap S)$ e com $P(S)$, ambas exibidas na tabela, é então calculada:

$$P(G|S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{0.045}{0.200} = 0.225.$$

Desse modo, o Teorema de Bayes foi usado de modo implícito. Além disso, qualquer uma daquelas probabilidades condicionais restantes (envolvendo $\overline{G}$ ou $\overline{S}$) poderia ser calculada com a mesma facilidade. Um exemplo disso seria calcular também a probabilidade de uma pessoa que não apresenta sintomas também não estar gripada, isto é, $P(\overline{G}|\overline{S})$. Isso seria obtido usando a tabela num cálculo similar:

$$P(\overline{G}|\overline{S}) = \frac{P(\overline{G} \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.795}{0.800} = 0.99375.$$

Esse número indica que quase todas as pessoas (99.375%) que não tem aqueles sintomas também não estejam gripadas.

Vê-se, portanto, com o uso da tabela, que o cálculo das diversas combinações de probabilidades pode ser facilmente realizado, considerando-se as devidas observâncias teóricas da probabilidade e da própria disposição visual das informações. Para estudantes do ensino médio que visam aprovação em concursos vestibulares, a disposição visual facilitada das informações torna-se um fator mais importante para resolução de problemas nas provas abertas (popularmente chamadas de "canetão") e, por isso, a tabela é uma opção bastante recomendável para atender ao critério de clareza de soluções.

3 Percepção de vieses com fator de Bayes

Um dos grandes benefícios do paradigma bayesiano da probabilidade é a possibilidade que ele oferece para evitar alguns vieses de julgamento, que *aparentam* ser naturais dada a representatividade dos elementos num espaço amostral.

3.1 Falácia da Taxa-Base: um exemplo

O exemplo a seguir, inspirado em Tversky & Kahneman ([11]), busca demonstrar como o Fator de Bayes (Equação 6) torna mais viável levar em conta outros fatores para fazer algum julgamento probabilístico, diminuindo vieses. Isto é especialmente útil ao buscar analisar problemas socialmente ou culturalmente sensíveis.

Exemplo 2 (Qual é a profissão de Steve?) *Certo indivíduo foi descrito com as seguintes palavras: "Steve é muito tímido e retraído, sempre prestativo, mas com pouco interesse nas pessoas ou no mundo real. Uma alma mansa e íntegra, ele necessita de ordem e estrutura e possui uma paixão por detalhes". Como as pessoas avaliariam a probabilidade de Steve ser ou não ser um cientista?*

Ao ouvir tal descrição de Steve, qual seria a primeira impressão, ou uma resposta majoritária das pessoas, para essa probabilidade? Considerando que há uma tendência de associar estereotipicamente aquelas características de personalidade a profissões que exijam um maior senso de organização, detalhes e alguma disciplina, é natural que a resposta à pergunta seja de que "é mais provável que Steve seja mesmo um cientista". Afinal de contas, esse estereótipo é por muitas vezes retratado em filmes, novelas e na cultura popular. Este seria um julgamento probabilístico baseado naquilo que percebe através da cultura e, portanto, não pareceria irracional. A impressão inicial seria, portanto, de que Steve tem realmente mais chances de ser um cientista do que de não ser. Mas quanto?

Suponha que, após alguma discussão, as pessoas cheguem num acordo e digam que seja 3 vezes mais provável que Steve seja um cientista do que ele não seja. Isso sugere que, na visão dessas pessoas que discutiram, de cada 4 pessoas que tivessem aquela personalidade, 3 seriam cientistas. Na linguagem da probabilidade, este número seria reconhecido como a *razão de chances* de Steve ser um cientista. Portanto, levando em consideração a Definição 6, e que C seja o evento "ser cientista", tem-se

$$O(C) = 3 = \frac{P(C)}{1 - P(C)} \Longrightarrow P(C) = \frac{3}{4}.$$

Então, segundo aquelas pessoas, a probabilidade de Steve ser cientista seria de 75%.

No entanto, tudo isso seria um julgamento enviesado. Contudo, não seria enviesado em função dessa cultura que sugere que pessoas que tenham certas profissões tenham ou não certas características de personalidade, mas sim por levar *apenas* isso em consideração. Na avaliação da probabilidade de Steve ser cientista, quais poderiam ser outros fatores relevantes?

O fato de Steve ter características específicas de personalidade o faz ser parte de um subconjunto da população em geral. Considerando que T seja o evento de "possuir características como timidez, sempre prestativo, com pouco interesse em pessoas, alma mansa e íntegra", a probabilidade de fato que se busca avaliar é, portanto, $P(C|T)$. Ao avaliar essa probabilidade, se está avaliando também $P(\overline{C}|T)$, pois essas probabilidades estão relacionadas pela Lei do Evento Complementar (Equação 2). Além disso, elas estão relacionadas também pela Razão de Chances com Fator de Bayes (Equação 6). Esta sim será usada para explicitar ao menos um fator adicional na avaliação individual de $P(C|T)$:

$$\frac{P(C|T)}{P(\overline{C}|T)} = O(C|T) = \frac{P(C)}{P(\overline{C})} \times \frac{P(T|C)}{P(T|\overline{C})} = O(C) \times B(T|C). \tag{8}$$

O uso correto da razão de chances, observadas as probabilidades condicionais e as não-condicionais, explicita e relembra a necessidade de estabelecer qual é o espaço amostral sob o qual um observador "neutro" avaliaria as probabilidades não-condicionais. Um estudante atencioso, ao avaliar a relação matemática acima, e que fosse questionado sobre a probabilidade de Steve ser ou não ser cientista após ouvir as características de sua personalidade, notaria que ele próprio não é um observador neutro, e questionaria a impressão inicial das pessoas.

Para o estudante, seria necessário reavaliar a probabilidade se colocando como observador neutro. Ele entenderia aquele valor 3 sugerido pelas pessoas não como sendo uma razão de chances de ser um cientista, mas sim como o *fator de Bayes de uma razão de chances condicionada ao fato de ser um cientista* — ou seja, $B(T|C)$. Nisso, ele teria percebido dois pontos importantes. O primeiro deles é que o julgamento inicial das pessoas, na verdade, era baseado não no espaço amostral todo da população, mas sim que elas estavam pensando (isto é, condicionadas previamente) apenas nos cientistas do seu imaginário. Esse julgamento pode até ser considerado enviesado pela cultura segundo outros critérios, mas ao menos se toma consciência disso: o estereótipo dos cientistas no imaginário é de que existem cerca de 3 vezes mais cientistas tímidos do que não-tímidos. O estudante conseguiu perceber onde estão os julgamentos de probabilidade condicionados, algo que não estava tão claro na primeira impressão das pessoas.

O segundo ponto, e definidor da avaliação final da probabilidade, é que o valor de probabilidade que o estudante desejava obter não era simplesmente $P(C)$, mas sim $P(C|T)$, isto é, dentre todas as pessoas da população que sejam tímidas, qual a probabilidade de ela também ser um cientista? Percebendo agora que seu espaço amostral não consta apenas de um estereótipo de cientistas, o estudante precisará avaliar o fator $O(C) = \frac{P(C)}{P(\overline{C})}$, que se baseia no espaço amostral da população (ou seja, não-condicionado).

Suponha que, após uma pesquisa rápida na internet, o estudante tenha chegado à conclusão de que, em sua população, a proporção entre cientistas e não-cientistas seja de 7 para 10000. Em terminologia de probabilidade, isto seria precisamente a razão de chances $O(C)$ mencionada no parágrafo anterior, fator com o qual o estudante terá condições de avaliar as chances de Steve ser cientista possuindo uma personalidade tímida, conforme a Equação 8:

$$O(C|T) = O(C) \times B(T|C) = \frac{7}{10000} \times 3 = \frac{21}{10000} \Longrightarrow P(C|T) = \frac{21}{10021}.$$

A probabilidade $P(C|T)$ acima tem um valor muito diferente ($\approx 0.21\%$) e muito menor, se comparado à probabilidade segundo a primeira impressão das pessoas.

O que o fator de Bayes possibilitou ao estudante fazer é *atualizar* a informação inicial multiplicando-a por esse fator. Uma interpretação não enviesada da condição T avaliaria a probabilidade desejada considerando C não como contexto geral de estudo (ou seja, como espaço amostral) do modo como as pessoas fizeram em sua impressão inicial, mas sim como subconjunto de algum outro espaço amostral "maior" que permita considerar a probabilidade dos elementos pertencerem ou não a C. Julgamentos de probabilidade que estejam assim estruturados tenderão a ser menos enviesados e mais objetivos, baseando-se não apenas em percepções culturais, mas também de fatores externos à percepção imediata do observador (como por exemplo, a proporção de certos elementos no espaço amostral).

3.2 Falácia da Taxa-Base: outro exemplo

Inspirado na experiência citada em Gigerenzer *et al.* ([10]), segue-se outro exemplo de aplicação do Fator de Bayes.

Exemplo 3 (Câncer de mama) *Um ginecologista de determinada região recebe em seu consultório uma mulher, chamada Maria, que fez um teste de mamografia, reportando a ele que seu resultado foi positivo. A prevalência de câncer de mama naquela região é de 1%, isto é, de cada 100 mulheres na região, 1 tem câncer. Esse teste de mamografia tem sensibilidade de 90%, isto é, de cada 100 mulheres com câncer que são testadas, 90 delas teriam resultado positivo. Esse mesmo teste tem especificidade de 91%, isto é, de* *cada 100 mulheres sadias que fazem o teste, 91 delas teriam resultado negativo. Qual é a probabilidade de que Maria realmente tenha câncer?*

Nessa experiência, uma forte impressão é que a probabilidade de Maria ter câncer seja alta ou, pelo menos, que é mais provável que ela tenha câncer do que ela não tenha. Cerca de 60% dos ginecologistas daquela experiência julgaram que essa probabilidade era alta. Trata-se, portanto, não de pessoas do público em geral sem treinamento, mas sim pessoas com treinamento médico. Será que tal julgamento está correto? Maria deve ficar alarmada com seu resultado?

Chamando de T a probabilidade de uma mulher testar positivo no exame de mamografia e de C a probabilidade de uma mulher realmente ter câncer de mama, os valores de probabilidade citados no exemplo seriam identificados como $P(C) = 0.01$, $P(T|C) = 0.90$ e $P(\overline{T}|\overline{C}) = 0.91$. Invocando o Teorema de Bayes, juntamente com a Lei da Probabilidade Total, será possível avaliar a probabilidade de aquela mulher ter câncer caso ela teste positivo, ou seja, calcular $P(C|T)$:

$$P(C|T) = \frac{P(T|C)P(C)}{P(T)} = \frac{P(T|C)P(C)}{P(T|C)P(C) + P(T|\overline{C})P(\overline{C})} = \frac{O(C|T)}{O(C|T)+1}. \tag{9}$$

Esse resultado usa a razão de chances com fator de Bayes (Equação 6), de onde se relembra que $O(C|T) = O(C)B(T|C) = \frac{P(C)}{P(\overline{C})}\frac{P(T|C)}{P(T|\overline{C})}$.

O fator $O(C)$, que representa a razão de chances de uma mulher daquela região ter câncer, é obtido:

$$O(C) = \frac{P(C)}{P(\overline{C})} = \frac{0.01}{1-0.01} = \frac{1}{99}.$$

Essa fração, segundo a interpretação bastante comum sugerida na Definição 6, é que naquela região há 1 mulher com câncer para cada 99 mulheres sadias. Esta proporção é uma boa opinião inicial sobre as chances de uma mulher ter câncer *sem quaisquer informações adicionais*, isto é, sem quaisquer outras condições ou restrições. Contudo, o fator de bayes $B(T|C)$ fará a *atualização* das chances de Maria (e não uma mulher qualquer) ter câncer, pois, *para ela, há informação específica*, representada no fato de ela testar positivo para câncer. Para Maria, por conta do seu teste positivo, tem-se:

$$B(T|C) = \frac{P(T|C)}{P(T|\overline{C})} = \frac{0.90}{1-0.91} = 10 \Longrightarrow O(C|T) = \frac{1}{99} \times 10 = \frac{10}{99}.$$

Isto é, a informação nova representada pelo teste positivo da mamografia de Maria faz aumentar em 10 vezes a sua razão de chances de ter câncer. Dessa forma, pode-se finalmente obter a probabilidade real de ela ter câncer, retornando à Equação 9:

$$P(C|T) = \frac{O(C|T)}{O(C|T)+1} = \frac{\frac{10}{99}}{\frac{10}{99}+1} = \frac{10}{109} \approx 0.092.$$

A probabilidade real de Maria ter câncer é, portanto, de 9.2%. O julgamento inicial dos ginecologistas, cuja primeira impressão era de que a probabilidade dela ter câncer fosse alta, é errônea. Ainda com o resultado positivo do teste, não é possível afirmar que seja mais provável que Maria tenha câncer do que ela não tenha. Eis aí um bom motivo para se buscar matematicamente uma interpretação mais objetiva do que significam testes médicos: ainda que tais testes oferecam porcentagens altas de sensibilidade (alta taxa de detecção) e de especificidade (baixa taxa de falsos positivos), somente uma avaliação bayesiana poderia afirmar com maior garantia se realmente há mais chances ou não de uma pessoa ter alguma enfermidade. Isto poderia amenizar fatores como estresse e ansiedade causados pelo desconhecimento do que o resultado positivo de um teste realmente quer dizer, matematicamente falando.

Se fosse construída uma tabela de contingência para avaliar todas as probabilidades envolvidas neste exemplo conforme as recomendações da Seção 2, o resultado seria aquele apresentado na Tabela 9. Por essa tabela, a mesma probabilidade seria obtida, porém num cálculo diferente de $P(C|T)$.

Teste / Câncer	$\overline{T}$	T	Total
$\overline{C}$	90.09%	8.91%	99%
C	0.10%	0.90%	1%
Total	90.19%	9.81%	100%

Tab. 8: Tabela preenchida para o Exemplo 3

$$P(C|T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{0.0090}{0.0981} \approx 0.092.$$

4 Noções de lógica proposicional

Far-se-á agora uma breve introdução sobre lógica proposicional, estabelecendo um fundamento sólido sobre o qual o restante da epistemologia bayesiana será montado. O objetivo dessa introdução é trazer à lembrança noções e terminologia que serão úteis para o restante do mini-curso.

A seguir, será introduzido o conceito de “nível de confiança”, que é a ferramenta usada para medir o quanto um agente confia nas proposições de uma linguagem $\mathcal{L}$. Depois disso, introduz-se também a noção de de “nível de confiança condicionado”, que será a medida de quanto um agente confia numa certa proposição x ser verdadeira condicionada a outra proposição y ser verdadeira.

Definição 12 (Proposição) *Uma proposição é uma oração declarativa que possa ter um valor lógico de verdadeiro ou falso.*

Proposições simples – ou *primitivas* – serão simbolizadas por letras latinas minúsculas (por exemplo, a, b, ..., z). Toda proposição satisfaz a três critérios necessariamente:

- Por ser uma oração, ela possui um sujeito e um predicado.

- Por ser uma declaração, ela não pode ser exclamativa nem interrogativa.
- Por ter um valor verdade, pode assumir um único valor lógico: verdadeiro ou falso.

Exemplo: h pode simbolizar a declaração "Hoje vai chover".

Definição 13 (Universo de discurso) *O universo de discurso U é um conjunto de proposições primitivas.*

Definição 14 (Conectivo) *Um conectivo é um operador que atua em uma ou duas proposições.*

Conectivos são simbolizados para representar alguma operação que realizarem. Eles podem ser unários — operando em uma única proposição — ou binários — operando em duas proposições.

Assumindo que x, y sejam proposições, segue abaixo alguns conectivos que serão usados recorrentemente neste trabalho:

- $\neg$ simboliza o conectivo unário **negação**. A proposição $\neg x$ (ou $\overline{x}$) tem o valor lógico invertido em relação a x — se uma for verdadeira, a outra será falsa, e vice-versa.
- $\vee$ simboliza o conectivo binário **conjunção**. A proposição $x \vee y$ será verdadeira se e somente se ambas as proposições x e y forem verdadeiras; será falsa em qualquer outro caso.
- $\wedge$ simboliza o conectivo binário **disjunção inclusiva**. A proposição $x \wedge y$ será falsa se e somente se ambas as proposições x e y forem falsas; será verdadeira em qualquer outro caso.
- $\rightarrow$ simboliza o conectivo binário **condicional**. A proposição $x \rightarrow y$ será falsa se e somente se a proposição x for verdadeira e y for falsa; será verdadeira em qualquer outro caso.
- $\leftrightarrow$ simboliza o conectivo binário **bicondicional**. A proposição $x \leftrightarrow y$ será verdadeira se e somente se ambas as proposições x e y forem verdadeiras ou se ambas forem falsas; será falsa em qualquer outro caso.

Definição 15 (Linguagem) *Dado um universo de discurso U, a linguagem $\mathcal{L}(U)$, ou simplesmente $\mathcal{L}$, é um conjunto de proposições que satisfaz necessariamente às seguintes propriedades:*

- Se $x \in U$, então $x \in \mathcal{L}$, isto é, $\mathcal{L} \supset U$.
- Se $x \in \mathcal{L}$, então $\overline{x} \in \mathcal{L}$.
- Se $x, y \in \mathcal{L}$, então $x \vee y \in \mathcal{L}$.
- Se $x, y \in \mathcal{L}$, então $x \wedge y \in \mathcal{L}$.

- Se $x, y \in \mathcal{L}$, então $x \to y \in \mathcal{L}$.
- Se $x, y \in \mathcal{L}$, então $x \leftrightarrow y \in \mathcal{L}$.

Entende-se dessa forma que a linguagem $\mathcal{L}$ é um conjunto de proposições, dentre as quais algumas são primitivas — pois não possuem quaisquer um dos conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ e $\leftrightarrow$. Todas as outras proposições da linguagem $\mathcal{L}$ são "derivadas" — isto é, formadas com pelo menos um desses conectivos.

Tal definição de linguagem já integra em si mesma o conceito de "fórmula bem formada" (FBF), já que quaisquer proposições primitivas são FBF por definição, e também que quaisquer outras FBF são formadas a partir de FBFs já estabelecidas com conectivos.

Definição 16 (Partição) *Dada uma linguagem $\mathcal{L}(U)$, o conjunto $\mathcal{P} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ com $\forall q_i \in \mathcal{L}(U)$ é um conjunto de proposições chamado de partição se e somente se satisfizer às seguintes propriedades:*

- Para $\forall q_i, q_j \in \mathcal{P}$, é necessário que $\neg(q_i \wedge q_j)$ seja verdadeiro, isto é, as proposições q_i, q_j são mutuamente excludentes.
- A proposição $q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n$ é uma tautologia.

5 Nível de Confiança

Definição 17 (Nível de confiança) *Nível de confiança é uma função $C : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, que associa uma proposição x da linguagem $\mathcal{L}$ a um número real.*

Para que um agente seja considerado racional, é necessário que a ele esteja associada uma função nível de confiança que satisfaça às 5 principais regras da epistemologia bayesiana.

As 3 primeiras dessas regras são os axiomas da probabilidade de Kolmogorov, que nada mais são do que restrições matemáticas impostas ao nível de confiança do agente. São elas:

Axioma 1 (Não-negatividade) *Para qualquer proposição $x \in \mathcal{L}$, o nível de confiança atribuída a ela pelo agente é sempre maior ou igual a zero, isto é, $C(x) \geq 0$.*

Axioma 2 (Normalidade) *Para qualquer proposição tautológica $t \in \mathcal{L}$, o nível de confiança dela é sempre 1, isto é, $C(t) = 1$.*

Axioma 3 (Aditividade Finita) *Para quaisquer proposições $x, y \in \mathcal{L}$ que sejam mutuamente excludentes – isto é, $\neg(x \wedge y)$ tem valor verdadeiro –, o nível de confiança na proposição $x \vee y$ é a soma dos níveis de confiança nas proposições x e y, isto é, $C(x \vee y) = C(x) + C(y)$.*

Considerando apenas os axiomas acima, é possível deduzir um nível de confiança para proposições que contenham negação.

Lembrando que a proposição $t = x \vee \overline{x}$ é tautológica para qualquer x, e considerando o axioma da Normalidade, tem-se $C(t) = C(x \vee \overline{x}) = 1$. Sabe-se também que $x \wedge \overline{x}$ tem valor falso, isto é, $\neg(x \wedge \overline{x})$ tem valor verdadeiro. Considerando agora o Axioma da Aditividade Finita, escreve-se $1 = C(x \vee \overline{x}) = C(x) + C(\overline{x})$, de onde se extrai o lema da Negação:

Lema 1 (Negação) *Para qualquer $x \in \mathcal{L}$, o nível de confiança da sua negação será $C(\overline{x}) = 1 - C(x)$.*

Há ainda 2 outras regras da epistemologia bayesiana que devem ser cumpridas pela função nível de confiança para que o agente seja considerado racional. Antes de listá-las, será necessário estabelecer uma nova definição:

Definição 18 (Nível de confiança condicionado) *O nível de confiança condicionado $C(x|y)$ é o nível de confiança que um agente atribui a um par ordenado de proposições (x, y), indicando o quanto ele acredita na proposição x ser verdadeira, pressupondo que a proposição y seja verdadeira.*

Agora, é possível apresentar a quarta regra da epistemologia bayesiana:

Axioma 4 (Fórmula da Razão) *Para $\forall x, y \in \mathcal{L}$ em que $C(y) > 0$, tem-se*

$$C(x|y) = \frac{C(x \wedge y)}{C(y)} \tag{10}$$

Com a Fórmula da Razão, é possível deduzir dois resultados de importância, sendo eles a Lei da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes.

Considerando uma proposição $x \in \mathcal{L}$, e uma partição $\mathcal{P} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ – e por isso quaisquer par de proposições q_i, q_j serão mutuamente excludentes –, entende-se também que quaisquer pares de proposições $x \wedge q_i, x \wedge q_j$ também serão mutuamente excludentes, e pela Aditividade Finita, teremos

Lema 2 (Lei da Probabilidade Total) *Para uma proposição $x \in \mathcal{L}$, e uma partição $\mathcal{P} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, o nível de confiança em x pode ser expresso por*

$$C(x) = \sum_{\mathcal{P}} C(x \wedge q_i) = \sum_{\mathcal{P}} C(q_i)C(x|q_i) \tag{11}$$

Além disso, como $C(x \wedge y) = C(y \wedge x) = C(x)C(y|x)$, uma consequência direta da Fórmula da Razão é obtida:

Teorema 5 (Teorema de Bayes) *Para $\forall x, y \in \mathcal{L}$ em que $C(y) > 0$, tem-se*

$$C(x|y) = C(x)\frac{C(y|x)}{C(y)} \tag{12}$$

Definição 19 (Independência entre proposições) *As proposições* $\forall x, y \in \mathcal{L}$ *serão classificadas como independentes entre si se e somente se ocorrer* $C(x|y) = C(x)$*.*

Pode-se dizer no caso acima que a proposição y é **irrelevante** para a proposição x. O nível de confiança de um agente na proposição x não muda, mesmo que seu nível de confiança em y mude.

Com a Fórmula da Razão, e considerando x e y proposições independentes entre si, então usa-se a definição acima, para obter um teorema relacionado à independência de proposições:

Teorema 6 *Sejam proposições* $x, y \in \mathcal{L}$ *independentes entre si. Então*

$$C(x \wedge y) = C(x)C(y) \tag{13}$$

Por último, mostra-se a quinta regra da epistemologia bayesiana:

Axioma 5 (Condicionalização) *Entre os instantes de tempo* i *e* j*, se a informação obtida por um agente racional puder ser representada pela proposição* $y \in \mathcal{L}$ *e* $C(y) > 0$*, então para* $\forall x \in \mathcal{L}$

$$C_j(x) = C_i(x|y) \tag{14}$$

em que C_i *e* C_j *são as funções nível de confiança do agente nos instantes* i *e* j*, respectivamente.*

Esta última regra da epistemologia bayesiana poderá ser combinada com a Fórmula da Razão e, por conseguinte, com o Teorema de Bayes. Combinando-a assim, obtem-se

$$C_j(x) = C_i(x|y) = \frac{C_i(x \wedge y)}{C_i(y)} = C_i(x)\frac{C_i(y|x)}{C_i(y)} \tag{15}$$

6 Vieses de julgamento ou paradoxos

Através do Teorema de Bayes (e do formalismo epistemológico bayesiano), é possível evitar certos vieses de julgamento – como o viés da taxa-base, nos casos relatados por Gigerenzer, e também por Tversky e Kahneman – e também certos paradoxos quanto a posicionamentos epistemológicos – como no paradoxo da loteria.

6.1 Paradoxo da Loteria

A descrição desse paradoxo segundo Kyburg ([6], tradução livre) segue:

"Numa loteria honesta, foram vendidos um milhão de bilhetes. Por conta das chances baixas, um agente que tenha comprado um bilhete acredita que o *seu* bilhete não será sorteado. Esse mesmo agente também acredita que qualquer outro bilhete *sozinho* não será sorteado. Apesar disso, ele acredita que algum bilhete será sorteado."

Nessa situação, existe uma aparência de racionalidade no conjunto de crenças mantidas pelo agente. Contudo, essas crenças, se mantidas simultaneamente, são logicamente incoerentes. Façamos a análise pela epistemologia bayesiana.

Representando por b_i a proposição de que o bilhete i será sorteado – e lembrando que a loteria é honesta –, então pode-se montar a distribuição de níveis de confiança da seguinte maneira:

$$C(b_i) = \frac{1}{1.000.000}.$$

A crença do agente de que cada bilhete sozinho – incluindo o seu próprio – não será sorteado pode ser compreendida quando buscamos obter o nível de confiança dele nas proposições $\overline{b_i}$, de que o bilhete i *não* será sorteado:

$$C(\overline{b_i}) = 1 - C(\overline{b_i}) = 1 - \frac{1}{1.000.000} = \frac{999.999}{1.000.000}.$$

Esse nível de confiança é muito próximo de 1, portanto, compreende-se a postura do agente de não acreditar que quaisquer um dos bilhetes, sozinhos, serão sorteados.

Contudo, esse mesmo agente acredita que *algum* bilhete será sorteado. Essa proposição será simbolizada por $b = b_1 \wedge b_2 \wedge \dots$, de forma que

$$C(b) = C(b_1 \wedge b_2 \wedge \dots) = C(b_1) + C(b_2) + \dots = 1.000.000 \times \frac{1}{1.000.000} = 1.$$

Assim, segundo a epistemologia bayesiana, os valores numéricos dos níveis de confiança nas duas proposições tornam compreensível as crenças dele. No entanto, a epistemologia bayesiana não *demonstrou* que há de fato um paradoxo, mas sim que situações como essa são facilmente acomodadas por ela – isto é, que se utilize o "nível de confiança" como métrica para descrever mais fielmente as posturas do agente em situações semelhantes. É perfeitamente racional manter um alto nível de confiança numa única proposição disjuntiva composta e ter um baixo nível de confiança em cada uma das proposições que compuseram a disjunção.

6.2 Falácia da Conjunção

A experiência trazida por Tversky & Kahneman ([12], tradução livre) ilustra, em termos de probabilidade, como a realidade pode ser contraintuitiva. Nessa experiência, os participantes foram deparados com a seguinte situação:

"Linda é uma mulher de 31 anos de idade, solteira, sem frescuras e brilhante. Ela se formou em filosofia. Enquanto estudante, ela era profundamente preocupada com questões de discriminação e justiça social, e também participou de protestos antinucleares."

O objetivo era que, após tomarem nota da situação, os participantes fizessem uma listagem em ordem crescente de probabilidades das três seguintes proposições:

1. Linda é ativa no movimento feminista.

2. Linda trabalha como caixa de banco.
3. Linda trabalha como caixa de banco e é ativa no movimento feminista.

A terceira proposição é uma conjunção das duas primeiras. No entanto, a "grande maioria" dos participantes da experiência julgaram que, de todas as proposições, ela era mais provável que a outra proposição sobre Linda ser caixa de banco.

Esse julgamento da maioria dos participantes é errado, pois o nível de crença numa conjunção de duas proposições primitivas deverá ser sempre menor ou igual ao nível de crença em qualquer uma delas isoladamente. Simbolizando a primeira proposição por m, a segunda por b, então tem-se a terceira simbolizada por $m \wedge b$. Com a Fórmula da Razão, pode-se escrever

$$C(m \wedge b) = C(m)C(b|m) = C(b)C(m|b).$$

Mas como quaisquer níveis de confiança precisam ser menores ou iguais a 1, tem-se $C(b|m) \leq 1$ e $C(m|b) \leq 1$. Por isso, deduz-se que

$$C(m \wedge b) \leq C(m),$$

e analogamente,

$$C(m \wedge b) \leq C(b).$$

O resultado acima, embora usado em específico para a experiência trazida por Tversky & Kahneman, pode ser generalizada. Quaisquer proposições compostas por conjunção de proposições primitivas terão um nível de confiança menor do que o de quaisquer uma delas.

6.3 Falácia do apostador

É comum que as pessoas acreditem que, para eventos que ocorram por acaso, resultados futuros desse evento irão "compensar" por resultados anteriores desse mesmo evento que não eram esperados. Exemplo: se uma moeda honesta, com faces cara e coroa, fosse lançada 19 vezes resultando em cara, então a tendência será de acreditar que o próximo lançamento, essa moeça quando lançada resultará no resultado diferente, isto é, coroa.

O questionamento pode ser formulado do seguinte modo: dado que a moeda já resultou em cara 19 vezes, qual deve ser o nível de confiança de um agente de que o próximo lançamento será coroa?

Simbolizando a proposição "a moeda é honesta" por h, a proposição "o resultado foi cara i vezes consecutivas" por k^i, e a proposição "o resultado foi coroa j vezes consecutivas" por c^j, o questionamento pode ser escrito matematicamente como

$$C(c|k^{19} \wedge h).$$

Nota-se que, se não houvesse a proposição h como uma condicional no nível de confiança, seria mais razoável acreditar até que o resultado fosse "cara" novamente, já que a quantidade de resultados consecutivos "cara" poderia induzir ao pensamento de que a moeda não fosse honesta, e assim estivesse enviesada para esse resultado. Isto é, se o questionamento fosse

$$C(c|k^{19}),$$

então haveria sentido em aumentar o nível de confiança em $\neg h$.

Contudo, não é o caso. Para um agente racional, o resultado de um novo lançamento da moeda, condicionado à proposição de que a moeda seja honesta, é *independente* de quaisquer resultados anteriores. Por isso,

$$C(c|k^{19} \wedge h) = C(c|h) = \frac{1}{2}.$$

Assim, entende-se que a informação relativa aos 19 resultados anteriores da moeda ser "cara" não deve alterar o nível de confiança de um agente racional quanto ao resultado do próximo lançamento, mas sim alterar o nível de confiança na proposição de a moeda ser honesta. Condicionalmente à moeda ser honesta, há independência no resultado do próximo lançamento em relação a quaisquer lançamentos anteriores.

6.4 Problema de Monty Hall

O método pelo qual os dados de um experimento são coletados podem introduzir o que se chama de **efeito de seleção de observação** nos dados. A percepção de tal efeito é fundamental na análise do seguinte problema:

"Num dos jogos do programa *Let's Make a Deal*, um prêmio fica ocultado, de modo aleatório, atrás de uma entre três portas. Um competidor seleciona uma das portas e, assim, o apresentador do programa (*Monty Hall*) abre uma das portas que o competidor não tinha escolhido. Monty sabe onde está o prêmio e sempre abre uma porta que não contém o prêmio. (Se ambas as portas não selecionadas estiverem vazias, ele escolhe abrir qualquer uma delas.) Depois de abrir uma porta vazia, Monty pergunta ao competidor se ele insiste na porta que ele selecionou inicialmente ou se ele quer trocar para a outra porta fechada. Supondo que ele entenda o procedimento de Monty, o quão confiante o competidor deveria estar de que a porta que ele selecionou inicialmente contem o prêmio?"

Num primeiro momento, há uma forte impressão de que o nível de confiança de o prêmio estar em qualquer uma das portas restantes é de $\frac{1}{2}$. Afinal, já que o competidor inicialmente tinha 3 portas para escolher e acertar aquela com o prêmio, agora, depois de outra porta ser revelada sem prêmio, sobraram apenas 2 portas.

Contudo, através da epistemologia bayesiana, será mostrado que essa forte impressão está, na verdade, errada: o nível de confiança nessas portas restantes deverá ser diferente de $\frac{1}{2}$.

Será simbolizado por c a proposição "o competidor selecionou inicialmente a porta que contem o prêmio", e por d a proposição "o apresentador revelou ao competidor uma porta não escolhida por ele, sem prêmio". Desse modo, o cálculo do nível de confiança $C(c|d)$ poderá responder à pergunta no problema.

Usando o Teorema de Bayes, tem-se

$$C(c|d) = C(c)\frac{C(d|c)}{C(d)}.$$

Usando o Teorema da Probabilidade Total (Lema 2) para $C(d)$, obtem-se uma relação útil:

$$C(c|d) = \frac{C(c)C(d|c)}{C(c)C(d|c) + C(\neg c)C(d|\neg c)}.$$

Cada um dos termos na expressão acima podem ser avaliados. No início, como haviam três portas, pode-se escrever $C(c) = \frac{1}{3}$. Pela Negação (Lema 1), escreve-se $C(\neg c) = \frac{2}{3}$.

O termo $C(d|c)$ representa o nível de confiança que o apresentador revele uma porta sem prêmio, condicionado ao competidor ter selecionado inicialmente a porta com prêmio. Já o termo $C(d|\neg c)$ representa o mesmo, porém condicionado ao competidor *não* ter selecionado a porta com prêmio. Contudo, ambos os níveis de confiança não devem ser diferentes, já que o apresentador *sempre* irá mostrar uma porta sem prêmio.

Aqui está o ponto de foco do problema: a escolha da porta que o apresentador irá mostrar não é aleatória, mas sim *intencional*. Desse modo, escrevemos $C(d|c) = C(d|\neg c) = 1$, e assim o cálculo da expressão se dá:

$$C(c|d) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1} = \frac{1}{3}.$$

O valor acima do nível de confiança $C(d|c)$ revela que a porta revelada pelo apresentador não deveria alterar o nível de confiança inicial na porta escolhida. Isto significa que, agora, após uma outra porta ter sido revelada pelo apresentador e sobrarem apenas a porta já escolhida e uma outra não revelada, o nível de confiança $C(\neg c|d)$ que representa o nível de confiança do competidor não ter acertado inicialmente a porta com prêmio terá valor

$$C(\neg c|d) = 1 - C(c|d) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

isto é, o nível de confiança de que a porta não revelada tenha o prêmio é maior do que o de que a porta escolhida tenha o prêmio.

Contrariamente à impressão num primeiro momento ao deparar-se com o problema de Monty Hall, o nível de confiança de o prêmio estar na mesma porta escolhida pelo apostador não é $\frac{1}{2}$, mas sim $\frac{1}{3}$, significando que ele está menos confiante na porta que escolheu, e mais confiante $(\frac{2}{3})$ que o prêmio está na porta ainda não revelada. A recomendação é que ele troque a porta escolhida, após o apresentador ter revelado qualquer porta sem prêmio.

Fig. 1: Thomas Bayes.
Fonte: `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d4/Thomas_Bayes.gif`

7 O experimento mental de Bayes

Assim como é comum na história da matemática dar nomes a fórmulas, teoremas e outros desenvolvimentos homenageando seus inventores ou primeiros descobridores, não foi diferente com o teorema de Bayes, cujo nome vem do reverendo e matemático inglês Thomas Bayes (1701—1761), que se baseou em definições e teoremas da probabilidade condicional no seu ensaio entitulado *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, de 10 de novembro de 1763. Esse ensaio foi editado por Richard Price dois anos após a morte de Bayes, e continha alguns anexos ao original, autorados pelo editor. Prize escreveu a introdução ao ensaio, descrevendo as bases filosóficas sob as quais se assentavam o trabalho de Bayes. O ensaio editado foi direcionado a John Canton, à época membro da Royal Society e receptor dos escritos de Bayes.

Numa tradução literal para o português, o título do ensaio vem como "Um ensaio para resolver um Problema da Doutrina das Chances"[7]. No século XVIII, "Doutrina das Chances" era o nome que se dava ao que hoje chamamos de "Teoria da Probabilidade". Neste trabalho, Bayes buscou estabelecer um método matemático com probabilidades pré-estabelecidas, e que fizesse uso de evidências presentes, para descobrir a probabilidade de causas, ou a "probabilidade inversa". A pergunta motivadora de Bayes poderia ser formulada do seguinte modo: como podemos descobrir a probabilidade de um evento no futuro, dado que no passado o mesmo evento tenha ocorrido ou não uma quantidade de vezes sob certas condições? O teorema pode ser descrito numa expressão simplista: *crenças iniciais + evidências objetivas recentes = crenças novas e aprimoradas* [9]. Essa expressão sugere uma profunda aplicabilidade desse método para as ciências naturais, sociais e econômicas, e parece ir de acordo com as próprias palavras de Prize logo no início da sua introdução, se direcionando a Canton: "A filosofia experimental, você perceberá, está intimamente interessada no assunto"[7].

O teorema de Bayes surgiu a partir de um experimento mental, que pode ser facilmente reproduzido tanto na prática como por simulação computacional. O experimento mental de Bayes começa com uma mesa retangular, disposta paralela ao plano do chão, e uma pequena bola, a ser lançada na mesa de modo que possa parar em qualquer posição dela com igual probabilidade, e essa posição deve ser facilmente verificada quando necessário. Sem enxergar a mesa, uma pessoa – chama-la-emos de "Bayes" – lança a bola pela primeira vez, e pede a uma segunda pessoa – chama-la-emos de "ajudante" – que marque na mesa o local onde a bola parou, para que Bayes descubra mais tarde essa localização sem olhar. Depois de a marcação ser feita, Bayes inicia seu processo de descoberta do local da marcação: o ajudante toma a bola e a lança na mesa, reportando a Bayes se essa bola

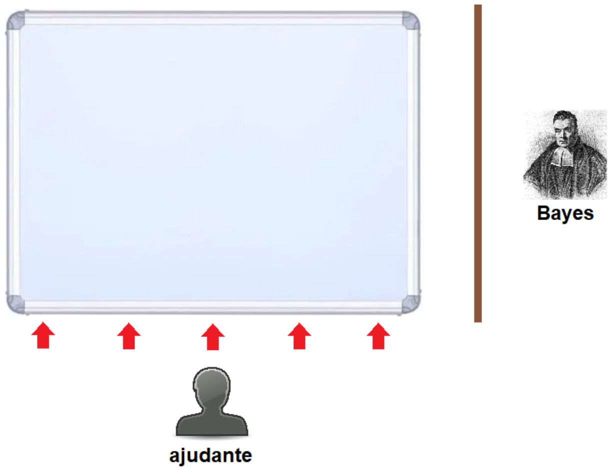

Fig. 2: Ilustração simplificada do esquema do experimento mental de Bayes.
Fonte: autoria própria.

ficou à esquerda ou à direita da marcação inicial. Com essa informação, Bayes pensa nas possíveis posições onde a marcação inicial teria sido feita. Esse processo continua, recursivamente, com o ajudante jogando a bola na mesa e informando a Bayes sobre a posição da bola à esquerda ou à direita da marcação. A cada informação nova, as possíveis posições da marcação tornam-se mais claras para Bayes. Em algum momento, Bayes afirma, com certo grau de confiança, em qual região da mesa a marcação inicial foi feita. A Figura 2 mostra um esquema simplificado do experimento, ilustrando a direção de lançamento da bola na mesa pelo ajudante, e Bayes numa posição em que ele não possa enxergar a mesa.

Conceitualmente falando, o raciocínio de Bayes era simples. A crença ou opinião anterior, e que parece arbitrária (no experimento de Bayes, representa o chute sobre o local possível da marcação), começa a ser refinada com a introdução de dados objetivos (representados no experimento pelas informações dos lançamentos da bola pararem à esquerda ou à direita da marcação). O resultado disso é uma crença ou opinião posterior mais apurada, mais precisa, sobre o paradeiro da marcação. Com mais iterações desse processo, a crença posterior obtida num experimento torna-se a opinião anterior para o próximo experimento. Quanto mais iterações desse experimento, mais certeira e coincidente com a realidade vai ficando a crença posterior. Daí, justifica-se a expressão simplista descrita anteriormente, de que "crenças iniciais + evidências objetivas recentes = crenças novas e aprimoradas". Tecnicamente falando, a fórmula de Bayes pode ser descrita numa frase: *a probabilidade a priori multiplicada pela verossimilhança é proporcional à probabilidade a posteriori.*

8 Simulando o experimento mental de Bayes

Para realizar a simulação, divide-se o espaço da mesa em um número finito de regiões verticais **n** para que possamos localizar as bolas lançadas. Essas bolas serão lançadas na mesa na direção vertical, não importando o sentido delas (de baixo para cima ou de cima para baixo).

Fig. 3: Ilustração da mesa dividida em **n** regiões verticais.
Fonte: autoria própria.

8.1 O modelo probabilístico do experimento

É preciso mostrar que há um modelo probabilístico nesse experimento. O modelo probabilístico desse experimento segundo a Definição 7 será:

- Os possíveis resultados de um lançamento de bola são as regiões numeradas de 1 à **n**, por isso, $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, e $\#(\Omega) = n$.
- Assumindo o Princípio da Indiferença – a posição final da bola pode ser qualquer uma das **n** regiões –, a função de probabilidade $P(E)$ é tal que $P(\{1\}) = \cdots = P(\{n\}) = \dfrac{1}{\#(\Omega)} = \dfrac{1}{n}$.

No entanto, o experimento de Bayes não se resume apenas em lançar bolas na mesa e localizá-las em alguma das **n** regiões. O objetivo do experimento é descobrir a posição da marcação a partir de informações colhidas a partir dos lançamentos da bola.

Suponhamos, portanto, que Bayes lançou a bola na mesa e o ajudante já tenha feito a marcação na região **k**, sendo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nesse momento, só o ajudante sabe em qual região da mesa há marcação, enquanto Bayes não tem essa informação. Sabendo que os próximos lançamentos da bola pelo ajudante não dependem do resultado de lançamentos anteriores, o modelo probabilístico de cada um desses lançamentos é o que foi descrito acima, com $P(\{e\}) = \frac{1}{n}$, sendo $\{e\}$ um evento elementar qualquer. Com esse modelo, o objetivo de Bayes é descobrir o valor de **k**.

O ajudante fará novos lançamentos da bola, e reportará a Bayes uma informação sobre a posição do lançamento da bola. No modelo aqui desenvolvido, a referência da informação será sempre a marcação inicial: o ajudante reportará se *a marcação ficou à esquerda ou à direita dos lançamentos* – trocando-se, portanto, o ponto de referência em relação à descrição feita na seção anterior. Conforme as informações que o ajudante fornece, Bayes poderá, gradualmente, afirmar com maior confiança em qual região da mesa a marcação inicial tinha sido feita.

À medida que mais novos lançamentos forem feitos, o ajudante informa as frequências reais dos resultados de tal modo que Bayes possa melhorar gradualmente a sua “opinião inicial" sobre a posição da marcação. Essa é uma maneira de proceder. Outra maneira que Bayes poderia proceder seria simplesmente aguardar os resultados de uma quantidade arbitrária de lançamentos, para que, ao tomar conhecimento das frequências reais e compará-las com as frequências esperadas, possa ter maior certeza qual seria a posição da marcação. Aqui, far-se-á de modo gradual, para ilustrar mais claramente a epistemologia bayesiana.

8.2 A função nível de confiança para o experimento

Cada novo lançamento ou tentativa há uma nova informação a respeito da marcação. Por isso, será necessário usar uma função *nível de confiança* (Definição 17) que leve em consideração novas informações na forma de condicionais. Para essa função, será necessário estabelecer uma *linguagem* (Definição 15), que por sua vez necessita de um *universo de discurso* (Definição 13). Nesse sentido, será usado o universo de discurso $U = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{d}\}$, sendo:

- Os símbolos **1, 2, 3, 4, 5** e **6** representam as proposições "a marcação foi feita na região 1, 2, 3, 4, 5 e 6", respectivamente.
- Os símbolos **q** e **d** representam, respectivamente, as proposições "a marcação ficou à esquerda de um lançamento" e "a marcação ficou à direita de um lançamento".

Estabelece-se assim uma linguagem $\mathcal{L}$, em que são possíveis proposições como, por exemplo, $\overline{\mathbf{1}}$ ("a marcação não foi feita na região 1"), ou até mesmo proposições mais complexas, como $\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}} \wedge \overline{\mathbf{6}}$ ("a marcação ficou à esquerda de dois lançamentos, e a marcação não foi feita na região 6").

Com essa linguagem, pode-se estabelecer agora funções nível de confiança $C(x)$ a respeito do local da marcação. Denotando por $C_0(x)$ (ou simplesmente $C(x)$) a primeira função nível de confiança antes de quaisquer informações, pode-se assumir, pelo Princípio da Indiferença, que a marcação possa ter sido feita em qualquer lugar da mesa com igual confiança, isto é, $C(x) = C_0(x) = \frac{1}{6}$, em que $x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$.

Essa função nível de confiança, quando condicionada à marcação estar em alguma das regiões, é facilmente calculada quando a proposição for **q** ou **d**:

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{q}|x) &= \frac{6-x}{6}.\\
C(\boldsymbol{d}|x) &= \frac{x-1}{6}.
\end{aligned}
$$

Quanto a $C(\boldsymbol{q})$, que representa o nível de confiança de a marcação estar à esquerda de um lançamento, não há qualquer presunção sobre o local da marcação e, por isso, será necessário recorrer à Lei da Probabilidade Total (Lema 2) para obtê-la. Sabido que $C(\boldsymbol{q} \wedge \mathbf{6}) = 0$, escreve-se:

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{q}) &= C(\boldsymbol{q} \wedge \mathbf{1}) + C(\boldsymbol{q} \wedge \mathbf{2}) + C(\boldsymbol{q} \wedge \mathbf{3}) + C(\boldsymbol{q} \wedge \mathbf{4}) + C(\boldsymbol{q} \wedge \mathbf{5}) = \\ &= C(\mathbf{1})C(\boldsymbol{q}|\mathbf{1}) + C(\mathbf{2})C(\boldsymbol{q}|\mathbf{2}) + C(\mathbf{3})C(\boldsymbol{q}|\mathbf{3}) + C(\mathbf{4})C(\boldsymbol{q}|\mathbf{4}) + C(\mathbf{5})C(\boldsymbol{q}|\mathbf{5}) = \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{15}{36}. \end{aligned}$$

O valor de $C(\boldsymbol{d})$, o nível de confiança de a marcação estar à direita de um lançamento, seria obtido com cálculo similar. Pela simetria do problema,

$$C(\boldsymbol{d}) = \frac{15}{36}.$$

8.3 Algoritmo simulador do experimento

O código-fonte do algoritmo de simulação do experimento de Bayes, escrito em linguagem *Python*, está disponível em `https://github.com/saulocreis/experimento_mental_bayes`. Uma reprodução do experimento mental de Bayes será feita com esse programa simulador, fazendo a mesa dividida em 6 regiões de igual área, conforme a Figura 3.

Ao executar o programa, o usuário faz o papel de Bayes, ou seja, o de descobrir onde a marcação foi feita. Já o programa faz o papel do ajudante, exibindo mensagens para ajudar o usuário durante a realização do experimento para que ele descubra o local da marcação. Para fins de esclarecimento, as menções futuras a "programa" ou a "usuário", em termos da descrição do experimento mental, se referirão, respectivamente, ao ajudante e a Bayes.

Inicialmente, a primeira informação que o usuário precisa é de saber em quantas regiões a mesa foi dividida. Abaixo segue as instruções iniciais do programa até o momento em que é solicitado o número de regiões em que a mesa será dividida:

Tela 1: Informando a quantidade de regiões na mesa

```
=== ALGORITMO BAYESIANO ===
Para sair do programa, basta apertar ENTER sem fornecer informacao util
    ao programa em qualquer momento.
Numero de regioes da mesa: 6
```

Depois que o usuário informa a quantidade de regiões – neste exemplo, 6 –, o programa faz um lançamento da bola na mesa e faz a marcação na mesa. Essa informação não é revelada ao usuário, pois o objetivo dele é justamente o de descobrir em qual região da mesa a marcação foi feita. A partir daí, o programa passará a fazer novos lançamentos da bola, sempre solicitando ao usuário quantos novos lançamentos deseja que sejam feitos. Abaixo são exibidas as mensagens do programa até esse ponto:

Tela 2: Fazendo um lançamento

```
A mesa foi dividida igualmente em regioes numeradas de 1 a 6, da
    esquerda para a direita.
(quanto mais proximo de 1, a regiao estah mais a esquerda)
(quanto mais proximo de 6, a regiao estah mais a direita)
```

```
A bola foi lancada na mesa. O ajudante marcou a posicao dela em uma dessas regioes.

SEU OBJETIVO: descobrir em qual regiao a marcacao foi feita.
Agora o ajudante vai lancar a bola quantas vezes voce desejar para obter informacao.
Depois desses lancamentos, ele lhe dira em quantos deles a marcacao ficou a ESQUERDA ou a DIREITA da bola.

AJUDANTE: Quantas vezes devo lancar a bola? 1
```

Procura-se simular o experimento mental de Bayes de um modo mais "realista" possível, imaginando duas pessoas (Bayes e seu ajudante) diante de uma mesa realizando o experimento de fato, e buscar com isso entender como a epistemologia bayesiana pode ser realizada ao longo do processo para descobrir onde a marcação foi feita. Por isso, será informado ao programa que apenas um lançamento será feito por vez (como exibido acima na Tela 2).

Após o programa "fazer o lançamento", ele informa ao usuário em quantos deles a marcação ficou à esquerda ou à direita dos lançamentos.

Tela 3: Resultado do lançamento

```
AJUDANTE: A bola foi lancada 1 vez(es) agora. Em relacao a bola, a marcacao ficou
1 vez(es) a direita (100.0 % desses lancamentos)
0 vez(es) a esquerda (0.0 % desses lancamentos)

AJUDANTE: Total de 1 lancamentos, sendo:
1 a direita (100.0 % do total)
0 a esquerda (0.0 % do total)
```

A partir de agora, a busca pela resposta se dará com as informações exibidas pelo programa. O que é possível inferir sobre o resultado acima?

Ainda não há certeza do local da marcação, mas já é possível ter certeza de que é impossível a marcação ter sido feita na região 1. Lembrando que as regiões são marcadas na mesa da esquerda para a direita (sendo 1 aquela mais à esquerda e 6 aquela mais à direita), então pode-se inferir com esse primeiro lançamento que, se a marcação tivesse sido feita na região 1, é impossível que essa região esteja à direita de quaisquer lançamentos.

Depois de realizar o primeiro lançamento, sabendo que a marcação ficou à direita da bola, é preciso atualizar a função nível de confiança com a informação disponível até então. Indicando por $C_1(x)$, que será concebida segundo o Axioma da Condicionalização (Axioma 5) e com uso do Teorema de Bayes (Teorema 5), teremos:

$$C_1(x) = C(x|d) = C(x)\frac{C(d|x)}{C(d)} = \frac{1}{6}\frac{\frac{x-1}{6}}{\frac{15}{36}} = \frac{x-1}{15}.$$

Essa função é tal que:

- $C_1(\mathbf{1}) = C(\mathbf{1}|d) = 0.$
- $C_1(\mathbf{2}) = C(\mathbf{2}|d) = \frac{1}{15}.$

- $C_1(\mathbf{3}) = C(\mathbf{3}|d) = \frac{2}{15}$.
- $C_1(\mathbf{4}) = C(\mathbf{4}|d) = \frac{3}{15}$.
- $C_1(\mathbf{5}) = C(\mathbf{5}|d) = \frac{4}{15}$.
- $C_1(\mathbf{6}) = C(\mathbf{6}|d) = \frac{5}{15}$.

Retornando à simulação. Depois de o programa ter informado ao usuário o resultado do lançamento, ele pergunta ao usuário onde ele acha que a marcação foi feita. Dada a função nível de confiança $C_1(x)$, já é possível fazer tentativas mais objetivas, não baseadas na completa ignorância, pois a função indica que há maior confiança na marcação estar em certas regiões. Suponhamos que essa tentativa seja feita para eliminar o outro extremo da mesa, a região 6, já que o valor de $C_1(6) = \frac{5}{15}$ é o maior nível de confiança:

Tela 4: Primeira tentativa

```
AJUDANTE: Em qual regiao voce acha marcacao foi feita? 6
AJUDANTE: VOCE ERROU. A marcacao nao foi feita na regiao 6. Vamos tentar
    de novo?
```

Essa tentativa na região 6 foi feita pois era a região com maior nível de confiança segundo as informações que se tem até agora. Caso não haja acerto – segundo a Tela 4, foi o que realmente aconteceu –, o programa informará que não houve sucesso, e oferecerá oportunidade de lançar outra vez a bola para que o usuário obtenha mais informações. Aqui se inicia um ciclo que se repetirá até que o usuário acerte sua tentativa de qual região a marcação foi feita.

A marcação também não está na região 6. Isso serve como informação nova e, portanto, ela pode ser usada em uma nova função nível de confiança. Simbolizando esta informação por $\overline{\mathbf{6}}$ – isto é, a marcação não foi feita na região 6 –, monta-se uma segunda função de probabilidade $C_2(x) = C_1(x|\overline{\mathbf{6}})$ – já que a proposição $\overline{\mathbf{6}}$ representa toda a informação aprendida entre C_1 e C_2.

$$C_2(x) = C_1(x|\overline{\mathbf{6}}) = C_1(x)\frac{C_1(\overline{\mathbf{6}}|x)}{C_1(\overline{\mathbf{6}})}.$$

Considerando que $C_1(\overline{\mathbf{6}}) = 1 - C_1(\mathbf{6}) = 1 - \frac{5}{15} = \frac{10}{15}$, e que

$$C_1(\overline{\mathbf{6}}|x) = \begin{cases} 1, & x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\} \\ 0, & x \in \{\mathbf{6}\} \end{cases}$$

então

$$C_2(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{10}, & x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \\ 0, & x \in \{6\}. \end{cases}$$

Essa função resulta em tais valores:

- $C_2(1) = 0$.

- $C_2(2) = C_1(2|\overline{\mathbf{6}}) = \frac{1}{10}$.
- $C_2(3) = C_1(3|\overline{\mathbf{6}}) = \frac{2}{10}$.
- $C_2(4) = C_1(4|\overline{\mathbf{6}}) = \frac{3}{10}$.
- $C_2(5) = C_1(5|\overline{\mathbf{6}}) = \frac{4}{10}$.
- $C_2(6) = C_1(6|\overline{\mathbf{6}}) = 0$.

Dando prosseguimento ao ciclo, após o usuário atualizar sua função de probabilidade, ele poderá solicitar um novo lançamento.

Tela 5: Lançamento sem informação nova

```
AJUDANTE: A bola foi lancada 1 vez(es) agora. Em relacao a bola, a
    marcacao ficou
0 vez(es) a direita (0.0 % desses lancamentos)
0 vez(es) a esquerda (0.0 % desses lancamentos)

AJUDANTE: Total de 2 lancamentos, sendo:
1 a direita (50.0 % do total)
0 a esquerda (0.0 % do total)
```

Dessa vez, o programa informou que a marcação não está nem à direita nem à esquerda da bola lançada. Isto é, a bola caiu na mesma região da marcação. Por isso, neste lançamento, não há informação nova, e o usuário permanece com a mesma função de probabilidade e, com ela, precisa fazer uma nova tentativa. Considerando que ainda são possíveis 4 regiões onde a marcação foi feita – aquelas em que a probabilidade não é zero –, a melhor tentativa será aquela com o maior nível de confiança, ou seja, a região 5:

Tela 6: Segunda tentativa

```
AJUDANTE: Em qual regiao voce acha marcacao foi feita? 5
AJUDANTE: VOCE ERROU. A marcacao nao foi feita na regiao 5. Vamos tentar
     de novo?
```

O programa exibiu as mensagens da Tela 6 acima. Não houve acerto, mas uma nova informação foi obtida: a impossibilidade de a marcação estar na região 5. A nova informação $\overline{\mathbf{5}}$ será incorporada em outra função nível de confiança $C_3(x) = C_2(x|\overline{\mathbf{5}})$.

$$C_3(x) = C_2(x|\overline{\mathbf{5}}) = C_2(x)\frac{C_2(\overline{\mathbf{5}}|x)}{C_2(\overline{\mathbf{5}})}.$$

Considerando que $C_2(\overline{\mathbf{5}}) = 1 - C_2(\mathbf{5}) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$, e que

$$C_2(\overline{\mathbf{5}}|x) = \begin{cases} 1, & x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\} \\ 0, & x \in \{\mathbf{5}, \mathbf{6}\} \end{cases}$$

então

$$C_3(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{6}, & x \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 0, & x \in \{5, 6\} \end{cases}$$

Essa função resulta em tais valores:

- $C_3(1) = C_3(5) = C_3(6) = 0$.
- $C_3(2) = \frac{1}{6}$.
- $C_3(3) = \frac{2}{6}$.
- $C_3(4) = \frac{3}{6}$.

Nesse momento, o programa oferece ao usuário uma nova oportunidade de lançamento.

Tela 7: Último lançamento

```
AJUDANTE: A bola foi lancada 1 vez(es) agora. Em relacao a bola, a
    marcacao ficou
1 vez(es) a direita (100.0 % desses lancamentos)
0 vez(es) a esquerda (0.0 % desses lancamentos)

AJUDANTE: Total de 6 lancamentos, sendo:
2 a direita (66.7 % do total)
0 a esquerda (0.0 % do total)
```

Segundo a Tela 7 acima, a marcação ficou à direita deste último lançamento da bola. A informação total obtida até o momento – em 2 lançamentos a marcação ficou à direita – será simbolizada pela condicional $\boldsymbol{d^2}$. Por isso, será necessário conhecer o valor de $C(\boldsymbol{d^2})$ pois, com ele, monta-se a função nível de confiança $C_4(x)$ que incorpore todas as informações obtidas até agora: a marcação não está na região 5 e nem na 6, isto é, a proposição $\overline{\mathbf{5}} \wedge \overline{\mathbf{6}}$.

Para obter $C(\boldsymbol{d^2})$, faz-se de modo similar ao que foi feito para $C(\boldsymbol{q})$. Sabendo que $C(\boldsymbol{d^2} \wedge \mathbf{1}) = 0$, escreve-se:

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{d^2}) &= C(\boldsymbol{d^2} \wedge \mathbf{2}) + C(\boldsymbol{d^2} \wedge \mathbf{3}) + C(\boldsymbol{d^2} \wedge \mathbf{4}) + C(\boldsymbol{d^2} \wedge \mathbf{5}) + C(\boldsymbol{d^2} \wedge \mathbf{6}) = \\
&= C(\mathbf{2})C(\boldsymbol{d^2}|\mathbf{2}) + C(\mathbf{3})C(\boldsymbol{d^2}|\mathbf{3}) + C(\mathbf{4})C(\boldsymbol{d^2}|\mathbf{4}) + C(\mathbf{5})C(\boldsymbol{d^2}|\mathbf{5}) + C(\mathbf{6})C(\boldsymbol{d^2}|\mathbf{6}) = \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} + \frac{16}{36} + \frac{25}{36}\right) = \frac{55}{216}.
\end{aligned}
$$

Será necessário esclarecer a expressão para $C(\boldsymbol{d^2}|x)$:

$$C(\boldsymbol{d^2}|x) = \left(\frac{x-1}{6}\right)^2 = \frac{(x-1)^2}{36}.$$

Antes de montar $C_4(x)$, faz-se $C_4'(x) = C(x|d^2)$:

$$C_4'(x) = C(x|d^2) = C(x)\frac{C(d^2|x)}{C(d^2)} = \frac{1}{6}\frac{\frac{(x-1)^2}{36}}{\frac{55}{216}} = \frac{(x-1)^2}{55}.$$

Depois de tudo isso, é possível montar $C_4(x)$, que incorpora a informação $\overline{\mathbf{5}} \wedge \overline{\mathbf{6}}$ em $C_4'(x)$. Isso significa que

$$C_4(x) = C_4'(x|\overline{\mathbf{5}} \wedge \overline{\mathbf{6}}) = C_4'(x)\frac{C_4'(\overline{\mathbf{5}} \wedge \overline{\mathbf{6}}|x)}{C_4'(\overline{\mathbf{5}} \wedge \overline{\mathbf{6}})}.$$

Considerando que $C_4'(\overline{\mathbf{5}} \wedge \overline{\mathbf{6}}) = 1 - C_4'(\mathbf{5}) - C_4'(\mathbf{6}) = 1 - \frac{16}{55} - \frac{25}{55} = \frac{14}{55}$, e que

$$C_4'(\overline{\mathbf{5}} \wedge \overline{\mathbf{6}}|x) = \begin{cases} 1, & x \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\} \\ 0, & x \in \{\mathbf{5}, \mathbf{6}\} \end{cases}$$

então

$$C_4(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{14}, & x \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 0, & x \in \{5, 6\} \end{cases}$$

cujos valores são

- $C_4(1) = C_4(5) = C_4(6) = 0$.
- $C_4(2) = \frac{1}{14}$.
- $C_4(3) = \frac{4}{14}$.
- $C_4(4) = \frac{9}{14}$.

Agora sim tem-se uma função nível de confiança completamente atualizada com a informação total disponível até então. Assim, o usuário está pronto para fazer outra tentativa objetiva, conforme a função indica. A região com maior confiabilidade de ter a marcação é a 4, e é essa sua próxima tentativa:

Tela 8: Tentativa correta

```
AJUDANTE: Em qual regiao voce acha marcacao foi feita? 4
AJUDANTE: VOCE ACERTOU! A marcacao foi feita na regiao 4.
```

Neste momento, o programa encerra a rodada, já que o usuário acertou a tentativa, e volta ao ponto inicial, possibilitando que o usuário faça um novo experimento.

Um observador, que esteja em busca de aperfeiçoar sua opinião inicial sobre um determinado experimento, poderá usufrir do arcabouço teórico da epistemologia bayesiana para estabelecer um modelo probabilístico do problema e também uma função nível de confiança para acrescentar informações gradualmente ao modelo. Desse modo, sua opinião inicial sobre o problema evoluirá para níveis de confiança maiores, sempre se baseando nessa função mais atualizada possível com informações relevantes ao problema.

Bibliografia

[1] Reis, Saulo Cavalcante dos. **Teorema de Bayes: uma proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT) – Universidade Federal de São Paulo. Diadema, 2022.

[2] Titelbaum, Michael G. **Fundamentals of Bayesian Epistemology 1: Introducing Credences**. Oxford University Press, 2022.

[3] Murakami, Carlos; Iezzi, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 1: conjuntos, funções** — 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[4] Shapiro, Stewart e Teresa Kouri Kissel, **Classical Logic**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2024 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), disponível em `https://plato.stanford.edu/archives/spr2024/entries/logic-classical/`.

[5] Hughes, G.E; Creswell, M.J. **A New Introduction to Modal Logic**. Routledge, 1996.

[6] Kyburg Jr; Henry E. Probability and the Logic of Rational Belief. Middletown: Wesleyan University Press, 1961.

[7] Thomas Bayes. "An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S". Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53 (0) (1763), pp. 370–418. DOI: 10.1098/rstl.1763.0053.

[8] Bradley Efron. Bayes' Theorem in the 21st Century. *Science* 340, 1177-1178 (2013). DOI: 10.1126/science.1236536.

[9] Sharon Bertsch McGrayne. *The theory that would not die: how Bayes' rule cracked the enigma code, hunted down Russian submarines, and emerged triumphant from two centuries of controversy.* Yale University Press, 2011.

[10] Gigerenzer et al. **Helping Doctors and Patients Make Sense of Health Statistics**. Psychological Science in the Public Interest 8.2 (2007), pp. 53–96. doi:10.1111/j.1539-6053.2008.00033.x.

[11] Tversky, Amos; Kahneman, Daniel. **Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases**. Science 185 (1974), pp. 1124–1131. doi: 10.1126/science.185.4157.1124.

[12] Tversky, Amos; Kahneman, Daniel. **Extensional Versus Intuitive Reasoning: The Conjunction Fallacy in Probability Judgment.**. Psychological Review 90, pp. 293-315. doi: 10.1037/0033-295X.90.4.293.