UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPATARMENTO DE MATEMÁTICA
XI BIENAL DE MATEMÁTICA

MINI-CURSO: BASES NUMÉRICAS E A CONJECTURA DE COLLATZ.

PROF. DR. FABÍOLO AMARAL MORAES
PROF. ME. OLINTO DE OLIVEIRA SANTOS

SÃO CARLOS, SÃO PAULO.
2024

BASES NUMÉRICAS

1. **Sistemas numéricos posicionais, não posicionais e sem soma de potências.**

Segundo LIMA *at all* (2006, p. 1) "toda matemática atual é formulada na linguagem de conjunto. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas."

Os sistemas numéricos podem ter sido a primeira utilização de conjunto pela humanidade. Suponha um escriba da antiguidade encarregado de contar para os soldados que iriam para guerra, supondo que se ele utilizasse um símbolo simples para representar cada soldado como triângulo ou círculo, ele teria que escrever o símbolo 10.000 vezes em seu papiro, o que seria cansativo para o escriba, e confuso para quem fosse ler a informação.

A necessidade de saber a quantidade de soldados, flechas, gado e outras coisas importantes da comunidade, levou o homem antigo a agrupar unidades em conjuntos, que por sua vez eram agrupados em conjuntos de conjuntos, criando assim os sistemas numéricos. Caso o escriba fosse egípcio, ele poderia desenhar um dedo(o dedo do faraó) que representava os 10.000 soldados escrever simplesmente:

Imenes e Lellis (2000), falam da importância do uso das mãos no processo de contagem, talvez essa vertente esteja relacionada aos conjuntos de 5 ou 10 unidades, note que o primeiro conjunto de unidades romano é $5 = V$, seguido pelo $10 = X$, provavelmente, as duas mãos. Já o sistema egípcio começa agrupando as duas mãos, com um símbolo para o 10 que é $\cap$.

Em seu livro Bellos (2011), afirma que a maioria dos sistemas numéricos era de base 5, 10 e 20, o que contribui para ressaltar a necessidade do uso dos dedos no processo de contagem, no caso da base 20 incluíam os dedos dos pés. Ainda, segundo este autor uma boa base deve facilmente escrever números como 100 e ao mesmo tempo não ter uma quantidade muito grande de símbolos para o povo que a criou decorar. Como no exemplo do sistema de numeração egípcio que utilizava 7 simbolos representando de unidade a 1.000.000.

É de fundamental relevância ensinar para os alunos sobre o sistema numérico, ao qual não precisa ser posicional, desse modo, reportando ao período da antiguidade, é possível perceber que nem sempre essa base numérica era utilizada diretamente para resoluções de operações como nos dias de hoje. Além disso, os números egípcios, por exemplo, não eram posicionais, e para saber uma quantidade, as pessoas simplesmente somavam as potências que podiam ser escritas com alguns símbolos na vertical para facilitar a visualização.

Imenes e Lellis (2000, p. 38), afirmam que: "Tanto faz escrever $\cap$**I** ou **I**$\cap$. No primeiro caso você terá 10 + 1 e no segundo 1+10, ou seja, sempre terá 11.

Na antiguidade as operações eram feitas de maneira mecânica com uso Ábacos ou pedras, daí o nome de "*Calculus*" (pedra em latim), para operações como soma, subtração e muitas outras que fazemos hoje. Os números eram utilizados para anotar os resultados. Ainda, em consonância com Imenes e Lellis (2000), na época do império romano, havia os calculistas profissionais que realizavam cálculos por meio do uso de Ábaco ou até mesmo mentalmente.

Santos(2016), afirma que nosso sistema numérico posicional faz somas de potências de números inteiros com bases iguais e, que ao escrever este número de forma não posicional, é possível fazer manipulações capazes de resolver muitos problemas. Em seu trabalho, ele mostra que mudando a forma do número e sua base, é possível resolver problemas que envolvem somas de potências de mesma base, Santos(2016) e Santos(2020).

Exemplos

$3050 = 3x10^3 + 0x10^2 + 5x10^1 + 0x10^0 = 3x10^3 + 5x10$ (forma não posicional, chamada forma ED= Escrito pela Definição)

$(\mathbf{??})_6 = 4x6^2 + 3$ (Base 6)

$(\mathbf{??})_{25} = 1x25^1 + 5$ (Base 25)

Bellos (2011), descobriu na Amazônia que os índios Araras não faziem somas de potências em seu sistema numérico e utilizam base dois com duas palavras "*aname"=1 e "*adak*" =2.* Então, para falar o número 7, por exemplo, era preciso repetir as palavras, as quais podem ser entendidas como uma soma:

Adak adak adak aname = 7

Note que sem a soma de potências, um sistema numérico torna-se pouco prático e confuso, perdendo, desse modo, sua eficiência, caso a comunidade precise contar coisas aos milhares, este sistema seria ineficiente.

Porém usando soma de potências de mesma base, há uma notavel vantagem, suponha um número natural K> 1, um número na base K, começa somando K unidades então, teremos:

1+1+1...=K.

Agrupando K conjuntos teremos:

K+K+K. . . =K^2.

Continuando de forma análoga, teremos:

K^n+ K^n +K^n ... = K^{n+1}.

Exemplo:

Base 3

1+1+1 = 3

$$3 + 3 + 3 = 32$$

$$32 + 32 + 32 = 33$$

$$3n + 3n + 3n = 3n + 1$$

Utilizando uma base numérica, é possível escrever qualquer número real. Suponha o número "K" inteiro e maior que 1, sendo c_1, c_2,c_3,..c_n números inteiros maiores que zero, tais c_1, c_2,c_3,..c_n < K que e p1, p2 , ...pn números inteiros, um número real "**p**" pode ser escrito na base K da seguinte forma:"

p= c_1K^{p1} + c_2K^{p2} +...+ c_nK^{pn}

Santos (2016, p12), chamou as partes c_nK^{pn} que compõe cada número de "Termos" No caso de números reais negativos, os sinais de todos os termos é negativo. Por definição não se usa bases numéricas para escrever números com diferença entre Termos. No caso dos números racionais e irracionais, a escrita se dará através de dizimas periódicas ou não periódicas

Exemplo

$(3,2)_5$ = 3x5 +2x5^{-1}

$(-40,03)_{12}$ = -4x12^2 -3x12^{-2}

Segundo Hefez(2011) " o sistema posicional se baseia na divisão Euclidiana." A civilização Hindu, além de usar um sistema posicional simples e elegante, introduziu um símbolo para o zero que por sua vez facilitou bastante a escrita e o uso dos algarismos nos cálculos. Seus algarismos permitiam escrever números grandes, sem dificuldades.

O zero tem um papel importante no sistema numérico Hindu-Arábico, pois o torna extremamente funcional, Enzerberg (1997), encantado com o zero, afirma ser o número zero, a maior descoberta matemática de todos os tempos, e chega a dizer que quem inventou o zero foi um ser “divino”.

Embora a base 10 seja a mais usada, há situações em que há necessidade de mudar a base de um número, neste caso, tradicionalmente se utiliza o método das divisões sucessivas.

Neste trabalho, é utilizado uma escrita dos números na forma não posicional para resolver problemas a forma ED(Escrito pela Definição). O trabalho apresenta uma propriedade que é denominada “Propriedade Fundamental das Bases Numéricas”, e um novo método de mudar a base de um número é denominado “Método das Subtrações Sucessivas”. Portanto, estas estratégias permitem resolver problemas da Matemática básica e superior, envolvendo as somas de potências inteiras da mesma base.

São apresentadas estratégias de “ adivinhar números”, que podem ser usados para encantar e motivar alunos da Educação Básica durante aulas sobre Potenciação.

Estas estratégias alternativas permitem resolver problemas tradicionais do Ensino Médio, tais como: Equações Exponenciais, Progressões Geométricas e Análise Combinatória. Estes métodos podem também ser utilizados para criar novos e interessantes problemas para esta modalidade de ensino.

Para o Ensino Superior há estratégias para resolver problemas de Teoria dos Números. A conclusão discute as possibilidades da manipulação de bases numéricas no ensino de Matemática na Educação Básica e Superior.

1. (a) **Propriedade Fundamental das Bases Numéricas.**

Santos (2016), encontrou um “efeito dominó” nas bases numéricas em que ele denominou como Propriedade Fundamental em função da importância que essa propriedade assumiu em seu trabalho.

K^{n+1} = (K-1)K^n + (K-1)K^{n-1} + (K-1)K^{n-2}+... +(K-1)K^1 + (K-1)K^0 + 1

Demonstração:

Separando os dois últimos termos, teremos:

(K-1)K^0 + 1 = K-1 + 1 = K.

Repetindo o procedimento usando o termo seguinte, temos:

(K-1)K^1 + K = K^2- K + K = K^2.

Continuando de forma análoga, temos:

$(K-1)K^2 + K^2 = K^3 - K^2 + K^2 = K^3$.

Repetindo este procedimento até o termo K^n, teremos:

$(K-1)K^n + K^n = K^{n+1} + K^n - K^n = K^{n+1}$.

1.1.1 Corolário:

Dividindo todos os termos da expressão:

$K^{n+1} = (K-1)K^n + (K-1)K^{n-1} + (K-1)K^{n-2} + ... + (K-1)K^1 + (K-1)K^0 + 1$

Por $K^{n+1,}$ temos:

$1 = (K-1)K^{-1} + (K-1)K^{-2} + (K-1)K^{-3} + ... + (K-1)K^{-n} + (K-1)K^{-n-1} - K^{-n-1}$.

1.1.2 Corolário

Como:

$K^{n+1} = (K-1)K^n + (K-1)K^{n-1} + (K-1)K^{n-2} + ... + (K-1)K^1 + (K-1)K^0 + 1$

E

$1 = (K-1)K^{-1} + (K-1)K^{-2} + (K-1)K^{-3} + ... + (K-1)K^{-n} + (K-1)K^{-n-1} - K^{-n-1}$.

Temos, então, que:

$K^{n+1} = (K-1)K^n + (K-1)K^{n-1} + (K-1)K^{n-2} + ... + (K-1)K^{-n} + (K-1)K^{-n-1} - K^{-n-1}$.

Esta propriedade garante que se pode escrever números reais na forma decimal em qualquer base numérica $K > 1$, em que K seja um número natural e os expoentes sejam números inteiros.

1.1.3 Corolário

Suponha que retiremos 1 do segundo membro da expressão:

$K^{n+1} = (K-1)K^n + (K-1)K^{n-1} + (K-1)K^{n-2} + ... + (K-1)K^1 + (K-1)K^0 + 1$

Teremos uma desigualde:

$K^{n+1} > (K-1)K^n + (K-1)K^{n-1} + (K-1)K^{n-2} + ... + (K-1)K^1 + (K-1)K^0$

Retirando mais termos do segundo membro a desigulddade será mantida, então se n, a, b,.... são números inteiros tais que $n > a > b >$.... Teremos que:

$K^{n+1} > (K-1)K^n + (K-1)K^a + (K-1)K^b + ...$

Exemplos

1. $10^5 > 9x10^4 + 9x10^3 + 9x10^2 + 9x10 + 9$
2. $3^4 > 2x3^3 + 2x3^2 + 2x^3 + 2$
3. $12^3 > 11x12^2 + 11x12 + 11$

1 Método das Subtrações Sucessivas (MSS)

Este método está baseado na desigualde acima, ele permite mudar a base númerica de um número e fazer manipulações que levam a solução de problemas que envolvem "somas de potências inteiras positivas de mesma base". Observe que :

$K^{n+1} >$ (K-1)K^n + (K-1)K^{n-1} + (K-1)K^{n-2}... (K-1)K^1 + (K-1)K^0

Dividindo os termos do segundo membro da expressão por K-1, teremos:

$K^{n+1} > K^n + K^{n-1} + K^{n-2}... K^1 + K^0$

Exemplos

1. $7^3 > 7^2 + 7$

2. $2^5 > 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2$

Outra consequência imediata é que se a, b, c ... são números inteiros, tais que n > a> b > c >... temos, que:

$K^{n+1} > K^n + K^a + K^b + K^c...$

Significa que se retirarmos alguns termos da soma do segundo membro da expressão, a soma entre eles, continua sendo menor que K^{n+1}. Esta conclusão tem aplicações na resolução de problemas.

Exemplos

1. $6^4 > 6^3 + 6$

2. $4^5 > 4^4 + 4^2 + 4^{-1} + 4^{-3} + 4^{-4}$

Suponha um número escrito na base K, conforme definido anteriormente com n, a, b, c,... números inteiros tais que n > a> b > c >... temos, então, que:

$K^{n+1} > K^n + K^a + K^b + K^c... > K^n$

Como K^{n+1} é um número inteiro, automaticamente se identifica K^n, subtraindo K^n , temos:

$(K^n + K^a + K^b + K^c...) - K^n = K^a + K^b + K^c...$

Repetindo o processo, temos:

$K^{a+1} > K^a + K^b + K^c... > K^a$

$(K^a + K^b + K^c...) - K^a = K^b + K^c...$

Continuando o processo encontramos todos os termos K^n, K^a ,K^b ,K^c....

Exemplo:

Mudar 841 para base 2

Vamos primeiro escrever as potências de 2 até encontrar a primeira maior que 841 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024)

Note que:

$1024 > 841 > 512$

Então:

$841 - 512 = 329$

$512 > 329 > 256$

$329 - 256 = 73$

$128 > 73 > 64$

73-64 =9

$16 > 9 > 8$

$9 - 8 = 1$

Os números subtraídos e o último resultado da subtração são os termos que compõe o número que escrito na forma não posicional ou ED fica da seguinte maneira:

$841 = 512 + 256 + 64 + 8 + 1$

$$841 = 29 + 28 + 26 \;\; + 23 + 20$$

Escrevendo na forma posicional temos que 841 na base 2 é:

$$841 = (1101001001)2$$

A vantagem do MSS é permitir fazer as transformações mentalmente e facilitar resolução das questões de múltipla escolha. Mas este método não deve substituir totalmente o método das divisões sucessivas para transformações de bases numéricas, sua utilidade é ser uma alternativa que facilita a solução de alguns problemas.

É possível com MSS resolver problemas de Progressão geométrica, Equações Exponenciais, Análise Combinatória e Aritmética e outros, desde que envolvam soma de potências de mesma base.

1.3 “Matemágica”: Como adivinhar soma de potências.

A brincadeira consiste em pedir para alguém somar termos de uma Progressão Geométrica com razão inteira positiva maior que 1 e depois adivinhar quais foram os números somados. Lembrando que ao contrário dos truques de mágicos, que não devem ser revelados, o professor deve mostrar como este truque funciona, a fim de que o aluno possa utilizar o método na solução de problemas.

Este truque já foi mostrado para os alunos da Educação Básica e Superior, obtendo um resultado satisfatório, pois todos se encantaram. Santos(2022)

Suponha que o aluno some duas potências do número K, ao fazer isso, ele ficará sem perceber, escrevendo um número na base K, na forma não posicional, pois teremos $K^n + K^x$, com n e x números inteiros, podendo, inclusive, ser inteiros negativos ou um deles ser zero.

Exemplo:

1. $2^3 + 2^2 = (1100)_2$

2. $3^0 + 3^3 = 3^3 + 3^0$ $(1001)_3$

3. $5^2 + 5^{-2} = (100{,}01)_5$

Mudando a base do número apresentado pelo aluno, para a base da potência já é possível encontrar as potências escolhidas, mas para fazer isso mentalmente, utilizamos a seguinte propriedade: Tomemos n e x números inteiros, tais que n>x e um número inteiro K>2, dessa forma, somando $K^n + K^2$ teremos, conforme mostrado no corolário 2.3, um número tal que:

$K^{n+1} > K^n + K^x > K^n$

Sabendo o valor de K^{n+1}, encontra-se facilmente o valor de K^n, subtraindo K^n do número sugerido pelo aluno encontramos o valor de K^x.

Primeiro, o professor decora um pequeno conjunto de potências de números naturais, digamos, tipos 2^0, 2^1, 2^2,..., 2^{11}. Depois ele pede aos alunos que somem duas potências distintas de base dois de modo que o resultado fique entre 1 e 2000 e fale apenas o resultado final. Digamos que um aluno diga 80 como:

$128 > 80 > 64$

Basta mentalmente subtrairmos:

$80 - 64 = 16 => 80 = 2^6 + 2^4$

Chegamos a conclusão de que as potências somadas foram 2^6 e 2^4.

O único cuidado com a base 2 é garantir que os alunos somem potências diferentes, já que:

$$2n + 2n = 2n + 1.$$

É possível ir dificultando o desafio pedindo mais números ou números aparentemente mais difíceis como 3 ou 5, que na verdade são mais fáceis, pois o número de potências é menor além de ser possível usar potência iguais. Suponha que um dos alunos fale 250.

$625<250<125$

$250-125 = 125$

Descobre-se, portanto, que o aluno somou 125 + 125 ou 5^3 $+5^3$.

Outro aumento de dificuldade é pedir mais potências, “some três potências de 5”, digamos que os alunos digam 175, temos, então:

$625 > 175 > 125 => 175 -125 = 50$

$125> 50 > 25 => 50 - 25 = 25$

Logo, as potências somadas foram 5^3, 5^2, 5^2. Note que potências repetidas não foram um problema nesse caso. O segredo é evitar que a soma de potências iguais forme uma nova potência, caso o aluno some cinco potências de 4 teremos, então:

$$42 + 42 + 42 + 42 + 42 = 43 + 42$$

Neste caso não é possível saber se foram somadas 5 potências de 4^2 ou as duas potências: 4^3+ 4^2.

É possível, também, descobrir termos de uma progressão geométrica (P.G) com razão inteira K maior que 1.

$a_n = (a_1, a_1K, a_1K^2, a_1K^3, ...)$

Nas aulas sobre PG, é pedido que os alunos somem termos de uma progressão com as características acima, e o professor tenta descobrir os terrmos escolhidos pelos alunos. Neste caso, primeiro se divide o número apresentado pelo aluno por a_1. Suponha que o aluno some dois termos de uma PG com as características citadas, teremos:

a_1K^x + a_1K^n

Divindindo o número por $a_{1,}$ teremos:

K^n $+K^x$

Usando subtrações encontram-se K^n e K^x, multiplicando cada termo por a_1, os termos escolhidos pelos alunos são encontrados. A soma da PG finita utilizada no Ensino Médio, possibilita encontrar termos em sequência, esta estratégia permite encontrá-los aleatoriamente ou em sequência, e como foi exposto, mesmo que o aluno escolha mais termos, se forem distintos, é possível encontra todos.

Truques matemáticos devem sempre ser revelados, pois encantam os alunos que depois de aprender como realizar a mágica, podem usá-la para solução de problemas.

1.4 Propriedades dos Números na forma ED

Para trabalhar com bases maiores que 10, na escrita tradicional, é necessário a criação de novos símbolos, geralmente utiliza-se letras para representar novos algarismos, para escrever 11 na base 12 por exemplo temos a letra B. Na escrita ED isto é desnecessário, o que facilita a solução de Problemas e Equações em qualquer base, vejamos algumas comparações:

$(2B)_{12} = 2\bullet 12 + 11$ Número na base 12

$(30C)_{15} = 3\bullet 15^2 + 12$ Número na base 15

Esta é uma grande vantagem da escrita ED, pois permite trabalhar com qualquer base, sem precisar criar novos símbolos, mas vejamos as propriedades dos números com esta forma.

1.4.1 Comutatividade dos Termos

Na forma ED, os termos são comutativos, note que $\mathbf{n} = c_1K^{p1} + c_2K^{p2} + ... + c_nK^{pn} + c$ não se altera caso mudemos alguns termos de posição $n = c + c_2K^{p2} + ... + c_nK^{pn} + c_1K^{p1}$.

Na escrita Hindu $23 \neq 32$, porém na ED $2\bullet 10 + 3 = 3 + 2\bullet 10$. Quando o número estiver com seus expoentes em ordem decrescente, vamos denominar de forma "Ideal" e as demais de formas "Permutadas".

1.4.2 Fatoração

Na forma ED, os termos podem ser fatorados: $K = aH^n + bH^{n-1} = H^{n-1}(aH+b)$, exemplo:

$2\bullet 5^4+3\bullet 5^3+4\bullet 5^2 = 5^2\ (2\bullet 5^2+3\bullet 5+4)$

1.4.3 Relação Expoente Coeficiente (CE)

Através da relação Expoente Coeficiente de cada termo, é possível quebra o principio dos números Hindus Arábicos de que o coeficiente deve ser menor que a base:

$aH^n = HaH^{n-1} = H^2aH^{n-2} = ... = H^2aH^{n-p} = K$

Observe o exemplo:

$2\bullet3^2 = 6\bullet3 = 18\bullet3^0 = 54\bullet3^{-1} = 18$

1.4.4 Partição

Na forma ED o número pode sofrer partições produzindo termos com expoentes iguais, suponha m+p = a, temos então que;

$K = aH^n + bH^{n-1} = (m+p)\ H^n + bH^{n-1} = mH^n + pH^n + bH^{n-1}$

A Partição pode ser combinada com a relação Coeficiente Expoente:

$K = aH^n + bH^{n-1} = (m+p)\ H^n + bH^{n-1} = (Hm+Hp)\ H^{n-1} + bH^{n-1} = HmH^{n-1} + Hp\ H^{n-1} + bH^{n-1}$.

Exemplos:

a) $3\bullet4^2 + 2\bullet4 + 1 = 2\bullet4^2 + 4^2 + 2\bullet4 + 1$

b) $3\bullet4^2 + 2\bullet4 + 1 = 12\bullet4 + 2\bullet4 + 1 = 7\bullet4 + 5\bullet4 + 2\bullet4 + 1$

1.5 Onde usar Números com a forma ED ?

Se os Números participassem de um seriado policial, o papel dos números ED, seriam de Informantes. Com eles é possível desvendar problemas que hoje são resolvidos através de Métodos Numéricos, Métodos Algébricos mais complicados ou nem mesmo são propostos.

A condição necessária para o uso de números ED, é que o problema ou situação a ser resolvido envolva "**soma de potencias inteiras de mesma base.**" Vejamos alguns problemas que podem ser resolvidos com estes números.

2 Problemas e Aplicações.

3

Problema 1

(PROFMAT-2012) Prove que $7^n - 1$ é divisível por 6.

Utilizando a Propriedade Fundamental das bases numéricas temos que :

$7^n = (6x7^{n-1} + 6x7^{n-2} ... + 6x7 + 6) + 1$

$7^n = 6x(7^{n-1} + 7^{n-2} ... + 7 + 1) + 1$

$7^n - 1 = 6\ x\ (7^{n-1} + 7^{n-2} ... + 7 + 1)$

Temos, portanto, que 7^n - 1 é múltiplo de 6, logo é divisível por 6.

Problema 2

Prove que se K é natural e maior que 2, então K^n -1 não é primo.

$K^{n+1} = \{(K\text{-}1)K^n + (K\text{-}1)K^{n-1} + (K\text{-}1)K^{n-2}...\ (K\text{-}1)K^1 + (K\text{-}1)K^0\ \} + 1$

K^{n+1} -1 $= (K\text{-}1)K^n + (K\text{-}1)K^{n-1} + (K\text{-}1)K^{n-2}...\ (K\text{-}1)K^1 + (K\text{-}1)K^0$

K^{n+1} -1 $= (K\text{-}1)(K^n + K^{n-1} + K^{n-2}...\ K^1 + K^0\ )$

Temos, portanto, que K^{n+1} -1 é múltiplo de K-1, tendo portanto K-1 como seu divisor.

Problema 3

Escreva 403 na base 5

Primeiro vamos escrever os termo da PG 5^{n-1} até encontrar um temo maior que 403 (1, 5, 25, 125, 625,..), como 125< 403 < 625 então:

$403 - 125 = 278$

Como 125< 278< 625, então:

$278 - 125 = 153$

Repetindo o procedimento, temos:

$153 - 125 = 28$

$28 - 25 = 3$

Temos, então, que:

$403 = 125 + 125 + 125 + 25 + 3$

$$403 = 53 + 53 + 53 + 52 + 3$$

$403 = 3x5^3 + 5^2 + 3$ (Note que esta é a forma não posicional),

Completando com zeros as posições, teremos entre o primeiro termo e o útimo, o seguinte exemplo:

$403 = 3x5^3 + 5^2 + 0x5^1 + 3$

$$403 = (3103)5$$

Concluímos que 403 na base 5 é $(3103)_5$.

Problema 4

Dante (2009, p. 148), Quantos termos da PG (3,6,...) devemos considerar para obter uma soma igual a 765?

Solução:

765:3= 255

Como a razão é 2, vamos escrever 255 na base 2 e teremos:

$255 = 2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ => 8 termos.

Este é um problema comum no Ensino Médio, em que os termos somados estão em uma sequência, resolvido de forma alternativa, mas também é possível resolver problemas em que os termos são somados aleatoriamente, que estão fora do alcance da Matemática do Ensino Médio como no problema a seguir.

<u>Problema 5</u>

Um menino escolheu aleatoriamente termos da PG { 2, 10, 50, ...} e somou tudo, totalizando 1302, e depois perguntou ao tio, quais os termos somados?

Começamos dividindo a soma por 2, teremos então 651, como:

3125> 651> 625 => $651 - 625 = 26$

De forma análoga temos:

26- 25 = 1

Multiplicando 625, 25 e 1 por dois, temos que os termos somados foram 1250, 50 e 2.

<u>Problema 6</u>

Em uma aula sobre triângulo de Pascal, é pedido aos alunos que escolham linhas do triângulo, depois somassem todos os números das linhas escolhidas e falassem apenas o resultado final. Suponha que um dos alunos fale 104.

A soma dos números de cada linha do triângulo de Pascal é 2^n, onde n é a ordem da linha. Quando o aluno soma todos os números e escreve a partir da forma $2^n + 2^{\text{ª}} + 2^b$ +... com n > a> b>... todos os expoentes são números inteiros positivos. Temos, então, que:

128< 104 <64

104-64 = 40 e 40 − 32= 8 => $104 = 2^6+2^5+2^3$

Obtemos, então, todos os números de cada linha:

$$23 = 1 + 3 + 3 + 1$$

$$25 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

$$26 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$$

<u>Problema 7</u>

(PM Canavieiras-PI, 2015) Se x é a raiz da equação $2^{x-1} + 2^{x+2} = 36$, então o valor de x^{-1} é:

Usando a MSS temos que 36 – 32 = 4, então 36 = 32 + 4 temos, portanto, que 36 = $2^5 + 2^2$

$2x-1$ + $2x+2$ = 25 +22

Note que $2^{x-1} < 2^{x+2}$ temos, então que $2^{x-1} = 2^2$ e $2^{x+2} = 2^5$ resolvendo qualquer uma das equações obteremos a resposta correta.

$2x-1$ =22

x-1 = 2

x = 3

x^{-1} =(**??**)$^{-1}$ = 1/3

Esta questão é comum em livros do ensino médio, concursos e vestibulares, vejamos uma equação que não é comum na matemática básica.

Problema 8

Resolver a equação $2^{7x} + 2^{3x\ +1} - 2^{3x} = 136$

Este método busca soluções inteiras e pode não ser eficiente, caso a solução não seja inteira, outra limitação é que está sendo definido por meio de somas, em caso de diferenças entre termos na equação, é preciso fazer manipulações com os termos para alterar a diferença ou teremos que usar outro método.

$$27x + 23x + 1 - -23x = 136$$

2^{7x} + 2 x $2^{3x} - 2^{3x} = 136$

$$27x + 23x = 136$$

Usando o MSS encontramos:

$$27x + 23x = 27 + 23$$

$2^{7x} = 2^7$ e $2^{3x} = 2^3$

Resolvendo qualquer uma das equações teremos que x= 1

Problema 9

Uma doença começou a se espalhar em uma ilha, durando os respectivos 15 dias em cada paciente e uma pessoa infectada, transmite a doença em média para outra pessoa não infectada a cada dia, a vigilância sanitária descobriu que três moradores da ilha foram infectados em outros países, mas não soube informar a identidade deles, sabem, apenas, que viajavam separados uns dos outros e que chegariam em datas diferentes. Após testar toda população da ilha, foram encontradas 164 pessoas infectadas. Sabendo que na ilha não havia ninguém infectado antes da volta de pelo menos um dos viajantes pergunta-se:

-Os três moradores já chegaram à ilha?

-A quanto tempo começou a epidemia na ilha?

Se uma pessoa infecta outra a cada dia, teremos um doente no 1º dia, no segundo serão dois, no terceiro dia estes dois infectam mais 2, gerando uma progressão:
$\{1, 2, 4, 8, ,2^{n-1}\}$
Temos, então, que a doença se espalha segundo a progressão $a_n = 2^{n-1}$, onde n é o número de dias contados a partir do momento que cada infectado chega à ilha.
Como 128 <164<256 usando MSS temos, que:

164 -128 = 36

De forma análoga, temos

36 - 32 =4

164 = 128 + 32 +4

$$164 = 27 + 25 + 22$$

Como temos três termos da progressão geométrica, podemos concluir que os três viajantes já voltaram para ilha.

Separando os termos e igualando ao termo geral da progressão, temos:

$2^{n-1} = 2^7 \Rightarrow$ n = 8

$2^{n-1} = 2^5 \Rightarrow$ n = 6

$2^{n-1} = 2^2 \Rightarrow$ n = 3

Como n é o número de dias, temos que o primeiro viajante voltou ao 8º dias. Portanto, a epidemia começou na ilha há, exatos, oito dias.

Problema 10

Sejam A, B e C três conjunto finitos com cardinalidade(quantidade de elementos) distintas entre si, se somarmos a totalidade de subcontjuntos de A, de B e de C obtemos 4640, qual a cardinalidade de cada um dos três conjuntos?

Usando MSS temos:

4640 = 4096 + 512 +32

$$4640 = 212 + 29 + 25$$

Observando os expoentes concluímos que havia um conjunto 12 elementos, outro 9 e o último com 5 elementos.

<u>Problema 11</u>

Os monges de um mosteiro secreto desafiaram o campeão mundial do jogo Torre de Hanói a jogar com as quatro torres sagradas e obter sempre a solução com o menor número de movimentos, eles entregavam uma torre de cada vez e contavam os movimentos feitos pelo campeão para ver se ele conseguia com o mínimo de movimentos, somando sempre o resultado de uma torre com a posterior, começando da menor até a última, ao final do dia o campeão fez 21.756 movimentos, como estava previsto nos escritos sagrados, e os monges declaram a vitória do campeão. Quantos discos tinha cada torre?

Em seu livro Scheinerman(2006,p. 166), estudou o jogo torre de Hanói que consiste em um tabuleiro com três espigões e discos com raios de diferentes tamanhos. O número mínimo de movimentos para solução do desafio varia com a quantidade de discos, sendo determinado pela expressão 2^n-1, onde "n" é quantidade de discos. Uma moça resolveu o desafio três vezes, com quantidade de discos diferentes e com o mínimo de movimentos. Se a garota executou 333 movimentos, qual a quantidade de discos de cada desafio?

Suponha x, y e z as varíaveis de uma equação, utilizando a expressão proposta por Scheinerman temos:

$$2x - 1 + 2y - 1 + 2z - 1 = 333$$

$$2x + 2y + 2z = 333 + 3$$

$$2x + 2y + 2z = 336$$

Utilizando o MSS temos:

$$2x + 2y + 2z = 256 + 64 + 16$$

$$2x + 2y + 2z = 28 + 26 + 24$$

Observando as potências, temos que a menina resolveu os desafios da torre com 4, 6 e 8 discos.

4 Considerações sobre esta etapa

Para a pesquisadora internacional em Educação Matemática, a chinesa Liping Ma (2014, p. 16-19), o estudo de Aritmética contribui para o aprendizado de outras áreas da Matemática, esta é a opinião publicada em um trabalho da SBM (2015) sobre o ensino de Matemática que defende a inclusão da Aritmética na educação básica. O uso das estratégias propostas neste trabalho para resolver questões comuns no Ensino Médio podem contribuir com este propósito.

Na BNCC (Base Nacional Comum Curricular), o estudo das operações é proposto para o ensino fundamental, cabendo ao Ensino Médio a utilização destes conceitos na solução de problemas (BRASIL, 2017). No entanto, criar estratégias de resolução de problemas já estava presente nos PCNs (Parametros Curriculares Nacional) de Matemática que apresenta como objetivo: "Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo".(BRASIL,1997, P. 42). Para alcançar estes propósitos utilizar estratégias com manipulação de bases numéricas podem ser muito útil, uma vez que possibilita resoluções criativas e lúdicas para problemas comuns na Educação Básica.

Para Santos(2016), as definições de Bases Numéricas podem resolver problemas que envolvem "somas de potência de mesma base". Este mostra aplicabilidade na Matemática Básica e Superior de manipular bases numéricas para solucionar problemas. Ele, também, utiliza suas descobertas sobre bases numéricas em um artigo sobre a "Conjectura de Collatz", Santos(2018), mostrando o potencial de suas descobertas na investigação de problemas em aberto.

No Ensino Fundamental as "Matemágicas" já foram usadas, por este autor, para encantar e motivar os alunos em aulas sobre potenciação, foi um sucesso produzindo muitas palmas e gritos. No Ensino Médio, as estratégias propostas, neste trabalho, podem ser um instrumento a mais na solução de questões de vestibulares, concursos, olimpíadas do conhecimento e ENEM.

Segundo Carpes e Carpes (2020), um licenciado em Matemática deve ter boas habilidades para resolver problemas e, também, obter a capacidade de criar e resolver problemas, neste sentido as estratégias propostas neste trabalho podem ajudar, uma vez que propõem métodos criativos de solução e possibilitam a criação de problemas inéditos, envolvendo somas aletória de potências inteiras de mesma base, conforme já foram mostrados nos problemas acima.

Outra possibilidade no Ensino Superior é a pesquisa em Matemática pura, como fez Santos(2018), que combinou números binários e manipulação de bases numéricas em sua pesquisa sobre a conjectura de Collatz. Estas estratégias podem ser usadas no estudo de problemas abertos como mais uma estratégia.

Conclui-se que o estudo das Bases Numéricas tem um grande potencial a ser explorado para solução de problemas, que envolvem somas de potências de mesma base, na Educação Básica e Superior.

2.Investigando a Conjectura de Collatz com Binários

2.1 Introdução

Neste Trabalho utilizaremos Teoria dos Conjuntos e Números Binários com a forma ED(Escritos pela Definição), para investigar a Conjectura de Collatz, pelos resultados obtidos. Fica demonstrado que a órbita de cada número é determinada pela sua forma binária. Este trabalho mostra também como obter números em que a operação 3n+1 não aconteça, aconteça apenas uma vez ou em que esta operação apareça no mínimo "n" vezes.

A Conjectura de Collatz foi anunciada pela primeira vez em 1937 pelo Matemático Alemão Lothar Collaz, Trata-se de uma suposição matemática, algo que se imagina ser verdadeiro, mas não se conseguiu ainda provar nem rejeitar.

Ela afirma que tomando um número inteiro positivo, devemos dividir por 2 se o número for par ou multiplicar por 3 e adicionar 1 se o número for Impar, repetindo estas operações, teremos uma sequência de números que terminara sempre no número 1, se iniciarmos no numero 10, teremos {10,5,16,8,4,2,1}.

Caso as operações continuem após atingir o número 1, temos uma sequência repetitiva infinita 1,4,2,1,4,2,1...

Muitos Matemáticos se dedicaram a esta Conjectura e acabaram tendo seus nomes associados a ela, os mais famosos foram:

-Stanislaw Ulam(1909-1984), notável Matemático Polonês que trabalhou no projeto Manhattan, ele se dedicou tanto a esta problema, que depois dele o desafio ficou conhecido como Conjectura de Ulam.

-Shizuo Kakutani(1911-2004) Matemático Japonês , criador do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, após seu trabalho o desafio passou a ser conhecido como problema de Kakutani.

-Helmut Hesse(1898-1979)- Este matemático alemão de origem judaica, conhecido pelas pesquisas na Teoria dos Números Algébricos, também pesquisou a conjectura Collatz, e após seu trabalho o problema passou a ser conhecido como algoritmo de Hass.

A conjectura recebeu ainda outros nomes, um muito comum e apropriado é Sequência Granizo, devido ao crescimento e decrescimento acentuado que semelhante ao comportamento do granizo, números maravilhosos e problema de Siracusa. Mas o nome mais técnico utilizado para identificar o problema é 3n+1, porém por uma questão de justiça o nome utilizado neste trabalho é Conjectura de Collatz, afinal foi ele quem propôs a questão.

Paul Erdos(1913-1996) afirmou "A Matemática não estar pronta para tais problemas" esta é a mesma opinião do matemático brasileiro Walter Carnielli, que acredita que a conjectura vai continuar sem resposta até o fim da humanidade e até o matemático americano Jeffrey Lagarias, professor da universidade de Michigan, que pesquisa o tema atualmente, afirma; " Este é um problema extraordinariamente difícil e completamente fora do alcance da Matemática atual".

O investigador português Tomás Oliveira e Silva, da Universidade de Aveiro em Portugal, explorou um grande número de hipóteses, começando no número 1 e ultrapassando o número $19x2^{58}$ e não encontrou nenhum caso em que a sequência não atingisse 1. Graças a trabalhos como o de Silva, os matemáticos supõem que a afirmação é verdadeira, enquanto aguardam uma demonstração final.

Um aspecto importante sobre conjecturas é que sua pesquisa pode levar a descobertas, o que de fato aconteceu durante esta pesquisa, na tentativa de demonstrar a Conjectura, por acidente acabei descobrindo uma Equação Diofantina capaz de resolver muitos problemas da Educação Básica e Superior e um sistema rudimentar de Criptografia, que pode ser útil para introduzir e divertir estudantes de qualquer nível, estas descobertas foram publicadas por Santos (2016).

Segundo Filho (2010) "Chama-se de Órbita do Número $\boldsymbol{n}$ a sequência de números gerada através deste processo até chegar ao número 1. Trata-se de uma sequência obtida através de recorrência, para Lima et al (2006) "Uma sequência é definida recursivamente quando obtida por uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediatos."

Denomina-se Cz(n) como a órbita de um número natural $n > 1$, a Sequência obtida pela aplicação da função Collatz recursivamente, iniciando pelo número natural n, aplicando-se a função C(n) sucessivamente até que a sequência atinja o número 1.

Cz(n) é uma forma de identificar as órbitas sem ambiguidades com outros assuntos Matemáticos, utilizando a primeira e última letra do nome Collatz, o que permite a fácil identificação das órbitas em qualquer idioma, vejamos três órbitas:

Cz(**??**) = { 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1}

Cz(**??**) = {7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1}

Cz(**??**) = { 8, 4, 2, 1}

Um desafio contido neste problema é compreender a Órbita de cada número. Como explicar que números próximos produzam sequências tão distintas? Ao final deste texto veremos que o que determina a Órbita de cada número é sua forma binária.

Esta pesquisa começou após a leitura de uma reportagem na revista Cálculo, Osone (2013) , em que a conjectura foi divulgada. Depois da leitura o autor pesquisou na Internet as tentativas anteriores de demonstrar a Conjectura, e nesta fase se destacou o trabalho do matemático americano Lagarias (2013) que organizou todos os avanços sobre esta conjectura até aquele momento. Em seguida foi buscada na literatura sobre Teoria dos Números e Sequencias ferramentas que pudessem ser utilizadas para resolver o problema, em autores como Carvalho (2000), Chaves(2013), Hefez (2011) , Coutinho (2011), Neto (2012) e Scheinerman, (2006).

Um autor que ajudou a criar estratégias de demonstração foi Sing [14], pois as estratégias descrita por ele para demonstração do Teorema de Fermat ajudaram na escolha de caminhos para esta pesquisa.

Depois foi feita a tentativa de demonstração que levaram aos resultados expostos neste trabalho.

3 Propriedades de Cz(n)

3.1 Proposição : Se um número natural **n** é da forma 2^n o conjunto Cz(n) não possui a operação 3n+1.

Demonstração:

Como 2^n:2 é par, temos:

Cz (2^n)={2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2},...$2^{\text{º}}$ }, logo Cz (2^n) = {2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2},...1 }.

3.2 Proposição: Os últimos elementos da sequência da Collatz anteriores ao número 1 formam uma subsequência de Collatz.

Esta propriedade permite escrever de forma mais elegante os Conjuntos de Collatz e também testar mais rapidamente se a Conjectura vale para um número ainda não testado. Esta propriedade aparece no trabalho de outros matemáticos como Lagarias (2013) na forma de organograma e no gráfico de CASSINI ET ALL(2015).

Demonstração:

Cz(a) = {a, a_1,a_2,a_3,...,16,8,4,2,1}.

Usando associatividade começando pelo termo a_3 temos:

Cz(a) = {a, a_1,a_2,Cz(a_3)}

Exemplo;

Cz(76x2^{58})= {76x 2^{58}, 38x2^{58}, Cz(19x2^{58})}

3.3 Proposição: Se a interseção de duas sequências de Collatz é não vazia, eles possuem pelo menos um subconjunto de Collatz.,

Demonstração:

Cz(a) = {a,a_1,a_2,a_3,...,16,8,4,2,1}.

Cz(b) = {b, b_1,b_2,b_3,b_4...,16,8,4,2,1}.

Suponha que a_3=b_4, temos então que:

Cz(a) = {a, a_1,a_2,Cz(a_3)}

Cz(b) = {a, b_1,b_2,b_3 , Cz(a_3)}

Esta propriedade pode diminuir o trabalho nas operações com os conjuntos de Collatz.

Exemplo

Cz(**??**)={**5**,16,8,4,2,1}

Cz(**??**)={3,**10**,Cz(**??**)}

Cz(**??**)={17,52,26,13,40,20,Cz(**??**)}

3.4 Proposição: Se n é um número natural ímpar Cz(n) é subconjunto de Cz(2^pn) natural, ou seja, os conjuntos Collatz de números ímpares são subconjuntos de números pares.

Demonstração:

Pelo teorema fundamental da aritmética um número natural par pode ser escrito como um produto de primos incluindo 2^p, temos, portanto, que se K é um número natural par, ele pode ser escrito da seguinte forma: K=2^px3^qx5^tx....V^z. Tomemos que 3^qx5^tx....V^z = M=> M é um número formado pelo produto de números ímpares portanto ele é ímpar, aplicando as operações de Collatz temos Cz(K)={2^pM,2^{p-1}M,...,$2^{º}$ M,.....,2,1} =>

Cz(K)={2^pM,2^{p-1}M,...,Cz(M)}.

Esta propriedade traz uma conclusão interessante: que para provar ou negar a conjectura basta trabalhar com números ímpares.

3.5 Proposição: Se dados dois números ímpares A e B, onde B é múltiplo de A, não se pode afirmar que Cz(A) seja subconjunto de Cz(B).

Exemplo:

Cz(**??**)={3,10,5,16,8,4,2,1}

Cz(**??**)={21,64,32,16,8,4,2,1}

4. Propriedade dos números na base dois com a forma 2^n $+2^{n-1}$+...+1

4.1 Proposição

2^p $+2^p$ =2x 2^p $=2^{p+1}$

Exemplo:

$$23 + 23 = 24$$

4.2 Proposição

Se n é natural e maior que 1

2^n>2^{n-1}+2^{n-2}+...+1

Propriedade fundamental das bases numéricas.

4.3 Proposição

Utilizando o mesmo n anterior temos

$$(2n - 1 + 2n - 2 + ... + 2 + 1) + 1 = 2n$$

Propriedade fundamental das bases numéricas.

5 Operações de Collatz com Binários ED

A vantagem de fazer operações de Collatz na base 2 com a forma ED é que com este formato é possível ver muitas propriedades ocultas na base 10.

Antes de começarmos as operações de Collatz, transformamos o número na base 2 na forma ED, vejamos os exemplo do número 17 = 2^4+1

17x3 +1= (2^4 +1)x(2+1) +1 = 2^4x2 +2^4x1+2x1+1x1+1

$$25 + 24 + 2 + 1 + 1 = 25 + 24 + 2 + 2 = 25 + 24 + 22$$

É possível continuar as operações de Collatz até obter o número 1 e determinar todos os números da órbita ou dividir tudo pela menor potência se quisermos apenas o próximo número ímpar. Neste exemplo vamos determinar todos os termos:

$$(25 + 24 + 22) : 2 = 24 + 23 + 2$$

$$(24 + 23 + 2) : 2 = 23 + 22 + 1$$

$(2^3+2^2 +1)x(2+1)+1 = 2^4+2^3 +2^3+2^2+2+1+1 = 2^4+2^4+2^2+2+2=$

$$25 + 22 + 22 \ = 25 + 23$$

$(2^5 + 2^3){:}2 = ()$

$$(24 + 22) : 2 = 23 + 2$$

$$(23 + 2) : 2 = 22 + 1$$

$(2^2+1)x(2+1)+1 = 2^3+2^2+2+1+1= 2^3+2^2+2+2 = 2^3+2^2+2^2=$

$$23 + 23 = 24$$

$$24 : 2 = 23$$

$$23 : 2 = 22$$

$$22 : 2 = 2$$

$2{:}2 = 1$

$Cz(2^4 +1) = \{2^4 +1,\ 2^5+2^4 +2^2 ,2^4+2^3 +2^1,\ 2^3+2^2 +1,\ 2^5+2^3,\ 2^4+2^2\textbf{,}\ 2^3+2\textbf{,}\ 2^2+1,\ 2^4 ,\ 2^3,\ 2^2,\ 2{,}1\}$.

Exemplo 2

Vamos usar o algoritmo de forma a determinar apenas os termos ímpares, começando por $13 = 2^3+2^2+1$.

$(2^3+2^2 +1)x(2+1)+1 =2^4+2^3 +2+2^3+2^2 +1+1=2^5+2^3$

$$(25 + 23) : 23 = 22 + 1$$

$(2^2+1)x(2+1)+1= 2^3+2+2^2+1+1= 2^4$

$$24 : 24 \ = 1$$

Vamos denominar ICz(n) para o subconjunto de números ímpares de um conjunto de Collatz, temos portanto:

ICz(**??**) = { 13, 5, 1}

ou

ICz(2^3+2^2+1) = {2^3+2^2+1, 2^2+1, 1}.

O conjunto ICz(n) explicita o número de vezes que a operação 3n+1 acontece, no caso de ICz(**??**) este operador é usado 2 vezes, denominaremos que cada operação 3n+1 seguida de divisão por 2^n, por movimento, e que o expoente de 2^n de ICz de grau do movimento, portanto o ICz(**??**) possui um movimento de terceiro grau e um movimento de quarto grau.

Portanto ICz(n) é subsequência de números Impares de Cz(n).

Exemplos;

ICz(**??**) = {3, 5, 1}

ICz(**??**) = {13, 5, 1}

ICz(**??**) = {1}

As vantagens do ICz(n) em relação ao Cz(n), é que o comportamento do gráfico é menos caótico e mais fácil de analisar.

6. Movimentos de Collatz

Como já foi definido o Movimento de Collatz, é a operação 3n+1 seguida pela divisão por 2^n, para obtenção do conjunto ICz(n). Este movimento será classificado também de acordo com seu divisor 2^n, o expoente "n" será o grau do movimento, portanto se a divisão for por 2, será um movimento de primeiro grau, se for por 2^3 será um movimento de terceiro grau. Portanto o ICz(**??**) possui um movimento de terceiro grau e um movimento de quarto grau.

O movimento de segundo grau é o que aparece com maior frequência por isso será denominado de "Movimento Monótono".

6.1 Análise do Movimento de Collatz

Um movimento de Collatz pode ser dividido em três fases: multiplicação, adição e divisão.

Na etapa da multiplicação cada termo 2^n produz um novo termo $2^{n+1,}$ este termo será denominado termo novo, isto faz com que a quantidade de termos dobre.

$(2^n +1)x(2+1) +1 = \mathbf{2}^{n+1}+2^n+\mathbf{2}+1+1$

Na adição, os termos semelhantes são somados e a quantidade dos termos diminui. Temos então:

$$2n + 1 + 2n + 2 + 1 + 1 = 2n + 1 + 2n + 2 + 2 = 2n + 1 + 2n + 22$$

Na divisão, temos uma redução nos expoentes de cada termo:

$$(2n + 1 + 2n + 22) : 22 = 2n - 1 + 2n - 2 + 1$$

6.2 Proposição: O movimento de primeiro grau é crescente, os demais movimentos são decrescentes.

Demonstração:

Tomemos um número natural "n" maior que dois, temos então que

3n+1>2n

Dividindo os dois termos por 2 temos:

(3n+1):2 > n.

Note que (3n+1):2 é o movimento de primeiro grau.

Suponha "p" um número natural maior ou igual a 1 temos então que

3n+1< 2^px2n

Dividindo os dois termos por 2^px2 temos então:

(3n+1):2^px2 < n

=> (3n+1):2^{p+1} < n

Novamente note que (3n+1):2^{p+1} é o movimento de grau maior ou igual a dois.

Exemplo

$$11 = 23 + 2 + 1$$

$(2^3+2+1)x(2+1) + 1= 2^4+2^3+2^2+2+2+2 = 2^5 + 2$

$(2^5 + 2):2 = 2^4+1$ (Movimento de primeiro grau)

$(2^4+1)x(2+1)+1 =2^5+2^4+2+2= 2^5+2^4+2^2$

$(2^5+2^4+2^2):2^2 = 2^3+2^2+1$ (Movimento de segundo grau)

$(2^3+2^2+1)x(2+1)+1 = 2^4+2^3+2^3+2^2+2+2 = 2^5+2^3$

(2^5+2^3):(2^3) = (2^2+1) (Movimento de terceiro grau)

(2^2+1)x$(2+1)+1$= 2^3+2^2+2+2 = 2^4

2^4:2^4 = 1 (Movimento de quarto grau)

ICz(**??**) = {11,17,13,5,1}

Os movimentos de grau superior a dois causam uma redução muito grande nos termos e no modulo do números da sequência ICz(n), por isso serão chamados de "Reduções Fortes".

6.3 Proposição: O movimento monótono ocorre sempre que o penúltimo termo possui grau superior a 2 dois, se o grau do penúltimo termo for 2 temos uma redução forte, se o grau for 1 teremos um movimento aumentativo.

Demonstração

(2^p+2+1)x$(2+1)+1$ = $2^{p+1}+2^p+2^2+2+2+1+1$= $2^{p+1}+2^p+2^2+2$

$(2^{p+1}+2^p+2^2+2)$:2 = $2^p+2^{p-1}+2+1$ (Movimento Crescente).

Tomemos o 2^p+2^2+1, temos então:

(2^p+2^2+1)x$(2+1)+1$ = $2^{p+1}+2^p+2^3+2^2+2+1+1$ = $2^{p+1}+2^p+2^4$

$(2^{p+1}+2^p+2^4)$:2^4 = $2^{p-3}+2^{p-4}+1$ (Redução forte)

Por último tomemos 2^p+1, com $p>2$:

(2^p+1)x$(2+1)+1$= $2^{p+1}+2^p+2+1+1$ = $2^{p+1}+2^p+2^2$

$(2^{p+1}+2^p+2^2)$:2^2 = $2^{p-1}+2^{p-2}+1$ (Movimento Monótono)

6.4 Proposição: A menor redução forte ocorre quando os três últimos termos são 2^3+2^2+1 e o termo anterior tem expoente maior que 4.

Demonstração:

$(2^p+2^3+2^2+1)$x$(2+1)+1$ = 2^{p+1} $+2^p+2^4+2^3+2^3+2^2+2+1+1$== $2^{p+1}+2^p+2^5+2^3$

$(2^{p+1}+2^p+2^5+2^3)$:2^3 = $2^{p-2}+2^{p-3}+2^2+1$ (Redução forte de grau 3).

7 Teorema: *Os números de um movimento na base dois possuem expoentes pares decrescentes na forma ED.*

Demonstração:

Tomemos o número N=$2^{2p}+2^{2p-2}+2^{2p-4}+...+2^6+2^4+2^2+1$ = $(101010...101)_2$. Na etapa de multiplicação temos:

$(2^{2p}+2^{2p-2}+2^{2p-4}+...+2^4+2^2+2^0)x(2+1)$ + 1= (obs: note que 1= 2^0).

$$22p+1+22p+22p-1+22p-2+22p-3+22p-4+...+25+24+23+22+2+1+1=$$

Usando a propriedade dos binários, na fase da adição temos que:

$$22p+1+22p+22p-1+22p-2+22p-3+22p-4+...+25+24+23+22+2+1+1 = 22p+2$$

$$(22p+2) : 22p+2 \ = 1$$

Portanto o número possui um movimento de grau 2p+2

Exemplo:

$5 = 2^2 + 2^0$, Cz(**??**) = {5,16,8,4,2,1}

$21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$, Cz(**??**) = { 21,64,32,16,8,4,2,1}

7.1 Corolário: *Os números ímpares de um movimento são obtidos pela série:*

Note que estes números são formados pela soma dos termos de uma Progressão Geométrica $a_n = 2^{2n}$

$21 = 2^4 + 2^2 + 2^0 => 2^4 : 2^2 = 2^2 : 2^0 \ => 2^2=2^2$

Usando a soma da PG finita, com $a_n = 1$, temos:

Exemplo

Tomemos n=4, temos então:

$$(28-1)/3 = 85$$

Cz(**??**) = {85, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1}

8 Movimento Aumentativo

8.1 Proposição Se os dois últimos termos de um número forem 2+1, o próximo movimento deste número é aumentativo.

Demonstração

(2^n+2+1)x$(2+1)+1=2^{n+1}+2^n+2^2+2+2+1+1$

$$2n+1+2n+23+2$$

Note que como o menor termo é 2, haverá uma divisão por dois, determinando um movimento de 1º grau, denominado movimento aumentativo.

8.2 Teorema: *Se os expoentes dos "N" termos de um número estiverem em ordem decrescente, este número terá pelo menos "N" movimentos aumentativos que serão os primeiros n movimentos de ICz.*

Demonstração:

Tomemos o número 2^n+2^{n-1}+2^{n-2}....2^3+2^2+2+1.

(2^n+2^{n-1}+2^{n-2}....2^3+2^2+2+1)x(2+1)+1 =

Após a fase de multiplicação teremos

$$2n + 1 + 2n + 2n + 2n - 1 + 2n - 1 + 2n - 2....24 + 23 + 23 + 22 + 22 + 2 + 2 + 1 + 1$$

Somando os termos novos em negrito com os dois últimos termos e usando a propriedade dos binários teremos:

$$2n + 1 + 2n + 2n - 1....23 + 22 + 1 + 1 = 2n + 2$$

Vamos adicionar este novo termo aos demais e teremos:

$$2n + 2 \ \ + 2n + 2n - 1 + 2n - 2....23 + 22 + 2$$

Como o menor termo é 2, este número é divisível por dois, dividindo temos:

$$2n + 1 + 2n - 1 + 2n - 2 + 2n - 3....22 + 2 + 1.$$

Ao repetir as operações de Collatz teremos:

(2^{n+1}+2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+....+2^2+2+1)x(2+1)+1 =

$$2n + 2 + 2n + 1 + 2n + 2n - 1 + 2n - 1 + 2n - 2... + 23 + 22 + 22 + 2 + 2 + 1 + 1$$

Somando os termos novos em negrito com segundo termo e os dois últimos termos temos :

$$2n + 2 + 2n + 1 + 2n + ... + 23. + 22 + 2 + 1 + 1. = 2n + 3$$

Aplicando a divisão teremos:

$$(2n + 3 + 2n - 1 + 2n - 2...23 + 22 + 2) : 2 = 2n + 2 + 2n - 2 + 2n - 3...22 + 2 + 1$$

Note que as operações não mudam os dois últimos termos que continuam sendo 2+1, e enquanto eles não forem alterados, os movimentos serão aumentativos. Note também que a cada novo movimento, os termos com expoentes em ordem decrescentes diminuem, após o segundo movimento passou de n, para n-2, se continuarmos aplicando os movimentos aumentativos, após n movimentos o penúltimo termo será afetado e não haverá mais um movimento de primeiro grau, acontecerá então um movimento monótono, portanto a afirmação é correta.

8.2.1 Corolário: *Os números com a forma $2^n+2^{n-1}+2^{n-2}...2+1=(1111...1)_2$ podem ser escritos na forma 2^{n+1}-1.*

Demonstração

Usando a propriedade fundamental das bases numéricas com binários temos que:

$$(2n + 2n - 1 + 2n - 2....23 + 22 + 1+) + 1 = 2n + 1$$

$$(2n + 2n - 1 + 2n - 2.... + 23 + 22 + 1) = 2n + 1 - 1$$

8.2.2 Corolário: *Os números cujos últimos n termos tenham expoentes ordenados em ordem decrescente, também possuem n movimentos aumentativos iniciais.*

Demonstração:

Suponha p-n>2 temos então:

$(2^p+2^n+2^{n-1}+2^{n-2}....2^3+2^2+2+1)x(2+1)+1$ =

$(2^{p+1}+2^p+2^{n+1}++2^{n-1}+2^{n-1}++...2^3+2^2+2)$:2 = $2^{p+1}+2^p + 2^{n+2}+2^{n-2}+2^{n-3}...2^2+2+1$

Note que não houve alteração nos movimentos de Collatz, que continuam aumentativos e reduzindo a quantidade de termos ordenados, portanto a afirmação é válida.

Quando os expoentes de dois ou mais termos de um número estiverem com uma diferença de apenas uma unidade em relação ao termo anterior ou posterior, estes termos serão denominados “termos alinhados ou alinhamento de termos”.

8.3 Movimento Aumentativo x Movimentos Monótonos

Suponha um numero K>30 ímpar que na ICz(K), ele sofra inicialmente dois movimentos aumentativos seguidos de três movimentos monótonos:

K x 3 + 1 = 3K + 1

(3K + 1): 2 = 1,5K + 0,5

(1,5K + 0,5)x3 + 1 = 4,5K + 2,5

(4,5K + 2,5):2 = 2,25K +1,25

(2,25K +1,25)x3+1 = 6,75K + 4,75

(6,75K + 4,75):4 = 1,6875 K+ 1,1875

(1,6875 K+ 1,1875) x 3 +1 = 5,0625K + 4,5625

(5,0625K + 4,5625):4 = 1,2656K + 1,1406

(1,2656K + 1,1406)x3 + 1 = 3,7968K + 4,4219

(3,7968K + 4,4219):4 = 0,9492K + 1,1055

Note que 1 – 0,9492 = 0,0508, então K = 0,9492K+ 0,0508K e como K>30 então:

0,0508K > 0,0508x30

0,0508K > 1,524 > 1,1055

K > 0,9492K + 1,1055

Como as órbitas dos números menores que 30, e do próprio 30 são bem conhecidas, vamos afirmar apenas que se um número é maior que 30, e sofre dois movimentos aumentativos seguido de três movimentos monótonos ela terá um modulo menor que o inicial, Ou seja é preciso três movimentos monótonos para anular dois movimentos crescentes.

9. Os Efeitos da multiplicação e Adição sobre os Termos

Como na etapa de multiplicação é criado um novo termo com um expoente que é uma unidade maior que o termo que o originou, os termos vão se "aproximando" ou seja a diferença entre seu termos diminui e na soma eles podem se juntar formando um termo único, esta consequência das operações de multiplicação e adição será chamada "Fusão" e independe do tipo de movimento.

Existem dois tipos de fusão, a primeira é quando os expoentes dos termos estão com uma unidade de diferença.

$(2^n+2^{n-1}+1)$x$(2+1) + 1=$

$$2n + 1 + 2n + 2n + 2n - 1 + 2 + 1 + 1 =$$

Note em negrito os termos novos.

$$(2n + 1 + 2n + 2n) + 2n - 1 + (2 + 1 + 1) =$$

Note que três termos se tornam um antes da divisão

$$(2n + 2 + 2n - 1 + 22) : (22) = 2n + 2n - 3 + 1$$

A outra fusão é quando estão com duas unidades de diferença entre os expoentes dos termos precedidos de um termo que esteja com uma unidade.

$(2^{n+4}+2^{n+2}+2^{n}+2^{n-1}+2+1)x(2+1)+1 =$

$$2n+5+2n+4+2n+3+2n+2+2n+1+2n+2n+2n-1+22+2+2+1+1 =$$

$$(2n+5+2n+4+2n+3+2n+2+2n+1+2n+2n)+2n-1+(22+2+1+1)+2 =$$

$$(2n+6+2n-1+23+2):2 =$$

$$2n+5+2n-2+22+1$$

Note que mesmo sendo um movimento aumentativo, o efeito da multiplicação e adição sobre os termos foi o mesmo, houve uma redução na quantidade de termos, ao mesmo tempo que a diferença entre os expoentes dos termos seguidos aumentou. Este efeito é fundamental para garantir que a proposição de Collatz é verdadeira, pois estas operações ao distanciarem os termos, impedem que eles formem alinhamentos que levariam a novos movimentos aumentativos.

Uma consequência muito importante destas operações, é que os primeiros termos sofrem mais fusões que os últimos, pois a cada multiplicação é criado um termo novo com uma unidade a mais que o termo que sofre a multiplicação e a cada dois movimentos este termo sofre uma fusão criando um termo com expoente ainda maior o processo se repete até que os novos termos sofram fusão com termos a sua frente.

Outro efeito importante das operações de multiplicação e adição é a mudança na paridade, é isto que explica as mudanças súbitas nas órbitas.

Suponha que "n" é um número par, então n+1 e n-1 é impar, de forma análoga se "n" é impar n+1 e n-1 é par então, aplicando as operações de Collatz no numero $2^{n}+ 2^{2}+2+1$ temos:

$(2^{n}+ 2^{2}+2+1)$x$(2+1)+1=$

$$2n+1+2n+23+22+22+2+2+1+1 =$$

$$(2n+1+2n+24+22+2):(2) =$$

$$2n+2n-1+23+2+1$$

Note que os dois primeiros termos já possuem paridades diferentes, prosseguindo temos:

$(2^n+2^{n-1}+ 2^3+2+1)\text{x}(2+1) + 1 =$

$$2n + 1 + 2n + 2n + 2n - 1 + 24 + 23 + 22 + 2 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(2n + 2 + 2n - 1 + 25 + 2) : (2) =$$

$$2n + 1 + 2n - 2 + 24 + 1$$

A combinação das operações de multiplicação e adição garantem que mesmo combinando movimentos decrescentes e crescentes, a diferença entre os expoentes deverá aumentar principalmente entre os primeiros e os últimos termos, o que impede que o número que iniciou a sequência se repita, o que negaria a Conjectura.

Exemplo:

Destacando os termos originais em negrito temos:

$(\mathbf{2}^{n+5}+ \mathbf{2}^n+2+1)\text{x}(2+1)+1=$

$$2n + 6 + 2n + 5 + 2n + 1 + 2n + 22 + 2 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(2n + 6 + 2n + 5 + 2n + 1 + 2n + 23 + 2) : (2) =$$

$(2^{n+5}+\mathbf{2}^{n+4}+ 2^n+\mathbf{2}^{n-1}+2^2+1)\text{x}(2+1) + 1 =$

$$2n + 6 + 2n + 5 + 2n + 5 + 2n + 4 + 2n + 1 + 2n + 2n + 2n - 1 + 23 + 22 + 2 + 1 + 1 =$$

$$2n + 7 + 2n + 4 + 2n + 2 + 2n - 1 + 23 + 22 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(2n + 7 + 2n + 4 + 2n + 2 + 2n - 1 + 24) : (24) =$$

$(2^{n+3}+\mathbf{2}^n+ 2^{n-2}+\mathbf{2}^{n-5}+1)\text{x}(2+1) +1=$

$$2n + 4 + 2n + 3 + 2n + 1 + 2n + 2n - 1 + 2n - 2 + 2n - 4 + 2n - 5 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(2n + 4 + 2n + 3 + 2n + 1 + 2n + 2n - 1 + 2n - 2 + 2n - 4 + 2n - 5 + 22) : (22) =$$

$$(2n + 2 + 2n + 1 + 2n - 1 + 2n - 2 + 2n - 3 + 2n - 4 + 2n - 6 + 2n - 7 + 1) : (2 + 1) + 1 =$$

Somando os termos em negrito temos:

$$2n+3+2n+2+2n+2+2n+1+2n+2n-1+2n-1+2n-2+2n-2+2n-3+2n-3+2n-4+2n-5+2n-6+2$$

$$2n+4+2n+2\ +2n-1+2n-2+2n-3+2n-7\ +2+1+1=$$

$$2n+4+2n+2\ +2n-1+2n-2+2n-3+2n-7\ +22\ =$$

Note que neste momento o termo original é afetado por termos novos criados pelo termo original anterior, o que acarreta inclusive uma mudança na paridade. Completando o movimento temos:

$$(2n+4+2n+2+2n-1+2n-2+2n-3+2n-7\ +22):(22)=$$

$$2n+2+2n+2n-3+2n-5+2n-6+2n-9\ +1=$$

10. Análise do Movimento Monótono

I Movimento

(2^n+1)x$(2+1)\ +\ 1=$

$$2n+1\ +2n+2+1+1=$$

$$2n+1\ +2n+22=$$

$$(2n+1\ +2n+22):22\ =$$

$$2n-1\ +2n-2+1$$

II Movimento

$(2^{n-1}\ +\ 2^{n-2}+1)$x$(2+1)\ +1\ =$

$$2n\ +2n-1+2n-1+2n-2\ +2+1+1=$$

$$2n+1+2n-2+22=$$

$$(2n+1+2n-2+22):(22)=$$

$$2n-1+2n-4+1=$$

III Movimento

$(2^{n-1} + 2^{n-4}+1)$x$(2+1) + 1 =$

$$2n \ + 2n - 1 + 2n - 3 + 2n - 4 \ + 2 + 1 + 1 =$$

$$2n \ + 2n - 1 + 2n - 3 + 2n - 4 \ + 22 =$$

$$(2n \ + 2n - 1 + 2n - 3 + 2n - 4 \ + 22) : (22) =$$

$$2n - 2 \ + 2n - 3 + 2n - 5 + 2n - 6 \ + 1$$

IV Movimento

$(2^{n-2} + 2^{n-3}+2^{n-5} +2^{n-6} +1)x(2+1) +1 =$

$$2n - 1 \ + 2n - 2 + 2n - 2 + 2n - 3 \ + 2n - 4 \ + 2n - 5 + 2n - 5 + 2n - 6 \ + 2 + 1 + 1 =$$

$$2n \ + 2n - 2 + 2n - 6 \ + 22 =$$

$$(2n \ + 2n - 2 + 2n - 6 \ + 22) : (22) =$$

$$2n - 2 \ + 2n - 4 + 2n - 8 \ + 1 =$$

Observa-se que o expoente do penúltimo termo diminuí duas unidades a cada novo movimento monótono, $\{2^n,2^{n-2},2^{n-4},2^{n-6},2^{n-8}\}$, então se "n" for um número par, após n/2 -1 movimentos os dois últimos termos serão $2^2 +1$, e teremos uma redução forte.

Exemplo:

(2^6+1)x$(2+1) + 1 =$

$$27 + 26 \ + 2 + 1 + 1 =$$

$$(27 + 26 \ + 22) : (22) =$$

$$25 + 24 \ + 1$$

II Movimento

$(2^5 +2^4 +1)$x$(2+1) =$

$$26 + 25 \ + 25 + 24 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(27 + 24 \ + 22) : (22) =$$

$$25 + 22 \ + 1$$

Note que o próximo movimento será uma redução forte

III Movimento

$(2^5 \ +2^2 \ +1)$x$(2+1) + 1 =$

$$26 + 25 \ + 23 + 22 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(26 + 25 \ + 24) : (24) =$$

$$22 + 2 \ + 1$$

ICz(**??**) = {65, 49, 37, ICz{7}}

Caso "n" seja um número impar, após (n-1)/2 movimentos teremos que os últimos termos serão: 2+1, então teremos um ou mais movimentos aumentativos, dependendo do alinhamento dos últimos termos.

Exemplo

(2^5+1)x$(2+1) + 1 =$

$$26 + 25 \ + 2 + 1 + 1 =$$

$$(26 + 25 \ + 22) : (22) =$$

$$24 + 23 \ + 1$$

II Movimento

$(2^4 \ +2^3 \ +1)$x$(2+1) =$

$$25 + 24 \ + 24 + 23 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(26 + 23 \ + 22) : (22) =$$

$2^3 \ +2 \ +1$ Note que o próximo movimento será aumentativo.

III Movimento

$(2^3 \ +2 \ +1)$x$(2+1) + 1 =$

$$24 + 23 \ + 22 + 2 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(25 \ \ + 2) : (2) =$$

$$24 + 1$$

ICz = {33, 25, 19, ICz{29}}

Note também que a cada dois movimentos a diferença entre o penúltimo e ao antepenúltimo termo é de apenas uma unidade $2^{n-1} + 2^{n-2}$ e 2^{n-5} $+2^{n-6}$, isto é fundamental para compreender as órbitas, pois provoca novos alinhamentos entre os últimos termos o que leva a novos movimentos aumentativos, o que torna a órbita de alguns números tão complicada, pois a sequência decresce e depois volta a crescer, pois os últimos termos sofrem repetidos realinhamentos. Mas como já foi mostrado no item anterior as operações de multiplicação e adição, produzem termos com paridade diferente, por isso, após uma alternância de movimentos aumentativos seguida de movimentos monótonos, haverá uma sequência de movimentos monótonos iniciada pelo penúltimo termo com expoente par, que terminará em uma redução forte. Se após a redução forte o penúltimo termo for de expoente ímpar haverá movimentos monótonos seguido de movimentos aumentativos, se for par haverá movimentos monótonos e depois uma redução forte.

Exemplo

$$9 = 23 + 1$$

$(2^3 + 1)$x$(2+1) + 1 =$

$$24 + 23 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(24 + 23 + 22) : (22) =$$

$$22 + 2 + 1$$

Note que os termos estão alinhados e teremos dois movimentos aumentativos.

$$(22 + 2 + 1) : (2 + 1) + 1 =$$

$$23 + 22 + 22 + 2 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(24 + 22 + 1) : (2) =$$

(2^3+2+1)x(2+1)+1=

$$24 + 23 + 22 + 2 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(25 + 2) : (2) =$$

Note que a paridade do penúltimo termo mudou para par, então teremos movimentos monótonos seguido de redução forte.

(2^4+1)x(2+1) + 1=

$$25 + 24 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(25 + 24 + 22\ ) : (22) =$$

(2^3+2^2+1)x(2+1) +1 =

$$24 + 23 + 23 + 22 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(25 + 23) : (23) =$$

(2^2+1)x(2+1) =

$$23 + 22 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(24) : (24) = 1$$

Esta capacidade de realinhamento é o motivo de alguns possuírem uma órbita tão fantástica como o número 129, note os trechos em que após um ou mais movimentos decrescentes os últimos termos sofrem alinhamento e voltam a crescer.

ICz(**??**) = {129, 97, 73, (55, 83, 125,) (47, 71, 107, 161), 121, (91, 137), (103, 155, 233,) (175, 263, 395, 593), 445, (167, 251, 377), (283, 425, 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429), (911, 1367, 2051, 3077), 577, 433, 325, 61, 23, 35, 53, 5}

11. Análise do Movimento Aumentativo

Tomemos um numero com termos alinhados 2^n+2^{n-1}....2^3+2^2+1, aplicando um movimento teremos:

(2^n+2^{n-1}....2^3+2^2+1)x(2+1) +1 =

Após a fase de multiplicação teremos os termos novos em negrito

$$2n + 1 + 2n + 2n + 2n - 1 + 2n - 1 + 2n - 2....24 + 23 + 23 + 22 + 22 + 2 + 2 + 1 + 1$$

Somando separadamente os termos novos em negrito com os dois últimos termos teremos:

$$2n + 1 + 2n + 2n - 1....23 + 22 + 2 + 1 + 1 = 2n + 2$$

Vamos adicionar este novo termo aos demais e dividir por 2:

$$(2n + 2\ \ + 2n + 2n - 1 + 2n - 2....23 + 22 + 2) : 2 =$$

$$2n + 1\ \ + 2n - 1 + 2n - 2 + 2n - 3....22 + 2 + 1$$

Produzindo outros movimentos teremos:

$(\mathbf{2}^{n+1}\ +2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}....2^2+2+1)\text{x}(2+1)+1 =$

$$2n + 2 + 2n + 1 + 2n + 2n - 1 + 2n - 1\ \ + 2n - 2....24 + 23 + 23 + 22 + 22 + 2 + 2 + 1 + 1 =$$

$$(2n+3\ +2n-1+2n-2+2n-3....22+2) : (2) = 2n+2\ +2n-2+2n-3+2n-4....22+2+1$$

$(\mathbf{2}^{n+2}\ +\ 2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}....2^2+2+1)\text{x}(2+1)\ +1 =$

$$2n + 3\ \ + 2n + 2\ \ + 2n - 1 + 2n - 2 + 2n - 2 + 2n - 3....22 + 2 + 2 + 1 + 1$$

$$(2n+3\ +2n+2\ +2n+2n-2+2n-3....23+22+2) : (2) = 2n+2\ +2n+1\ +2n-1+2n-3+2n-4....22+2+1$$

$(\mathbf{2}^{n+2}\ +\ \mathbf{2}^{n+1}\ +\mathbf{2}^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-4}....2^2+2+1)\text{x}(2+1)\ +1=$

Utilizando associatividade para destacar as fusões temos:

$$(2n+3\ +2n+2\ +2n+2\ )+(2n+1\ +2n+2n-1+2n-2+2n-3\ +2n-3+2n-4+....22+22+2+2+1+1) =$$

$$2n + 4\ \ + 2n + 2\ \ + 2n - 3 + 2n - 4....22 + 2 =$$

$$(2n + 4\ \ + 2n + 2\ \ + 2n - 3 + 2n - 4....22 + 2) : (2) =$$

$$2n + 3\ \ + 2n + 1\ \ + 2n - 4 + 2n - 5....22 + 2 + 1$$

Note que a cada novo movimento a quantidade de termos enfileirados diminui, este processo vai ocorrer "n" vezes até que o penúltimo termo seja afetado, depois disso teremos um ou mais movimentos monótonos.

Se após "n" movimentos o penúltimo termo tiver expoente par, teremos movimentos monótonos seguidos de uma redução forte, já se o penúltimo termo for Impar, teremos um ou mais movimentos monótonos seguido de um alinhamento que vai provocar uma sequência crescente na órbita.

Porem os efeitos das operações de multiplicação e adição farão com que os termos se separem, a diferença entre os expoentes dos termos que saírem do alinhamento será cada vez maior impossibilitando novos alinhamentos, fazendo predominar os movimentos decrescentes, note que a diferença entre os expoentes dos termos que saíram do alinhamento aumentou a cada novo movimento.

12.Conclusão

O que garante que a conjectura de Collatz é um Teorema, é que os movimentos decrescentes, predominam em relação aos crescentes, mesmo em um número formados por termos de expoentes ímpares e um grande alinhamento inicial, os efeito das operações de multiplicação e adição farão com que os termos tenham expoentes com diferenças cada vez maiores, e as fusões farão mudanças nas paridades dos expoentes, isto leva a movimentos monótonos seguidos de reduções fortes.

Mesmo que alguém monte um numero muito complicado, utilizando todo o conhecimento sobre órbitas e números binários, esta sequencia vai ter órbitas decrescentes com movimentos monótonos e reduções fortes que juntos vão predominar em relação aos movimentos crescentes que vai levar sempre a sequência a terminar no número 1.

Bibliografia

BELLOS, Alex**. Alex no País dos Números.** São Paulo: Cia de Letras, 2011.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 1997.

CARPES, Patricia Pujol Gulart; CARPES Charles Quevedo. **Criar e Resolver Problemas: Habilidades a serem mobilizadas com Licenciandos de Matemática.** REMAT: Revista Eletrônica de Matemática. Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 2, p. 1-15.

CARVALHO, M.C.C.S. **Padrões Numéricos e Sequências.** São Paulo, 2000.

CASINI, A et all. **Um Problema di Convergerza de Tipo Collatz.** <http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2010/04/Un-problema-di-convergenza-di-tipo-Collatz.pdf> Acesso em 03/06/2015

CHAVES, A.P.A. **Equações Diofantinas Envolvendo Potências de Termos de Sequências Recorrentes.** Brasília: Universidade de Brasília (UNB), p. 1. 2013.

COUTINHO, S.C. **Números Inteiros e Criptografia RSA**. Rio de Janeiro, IMPA,. p. 80, 2011

DANTE,L.R. **Matemática**. São Paulo: Editora Atica 2009, p. 148.

FILHO,A.C.S **Formulações Alternativas para Conjectura de Collatz** In XI ENCONTRO DE PESQUISADORES, Franca, 2010. P. 161-169

HEFEZ, M. **Elementos de Aritmética.** Rio de Janeiro,SBM,2011, p. 43-52.

IEZZI, G.; DOLCE O.; MURAKAMI C. **Fundamentos de Matemática Elementar, volumes 2 e 4**: Atual Editora. São Paulo 1995.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, MARCELO. **Os Números na História da Civilização**. São Paulo: Editora Scipione. 2000.

LAGARIAS, J.C. **The 3x+1 Problem An Overview** <http://www.ams.org/bookstore/pspdf/mbl 78-prev.pdf> Acesso Em 20/08/2013.>

LIMA, et all **Matemática do Ensino Medio, Volume 2**. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

LIPING,M. **Sem a Pele as Penas Caem.** Revista Calculo, p.16-19, Março de 2014. Editora Segmento. São Paulo.2014.

NETO, A.C.M. **Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números.** Rio de Janeiro, 2012.

OSONE, M. **Problemão Disfarçado de Probleminha.** Revista Calculo,, p.20-26, fevereiro de 2013. Editora Segmento. São Paulo.2013.

PAIVA,M. **Matemática.** São Paulo: Editora Moderna 2013. Volume 1, p. 271.

RIBEIRO,R. **Equações Diofantinas: Uma Abordagem para o Ensino Médio.** Brasília: Universidade de Brasília (UNB), 2014.

SANTOS, Olinto de Oliveira Santos **A Magia das Bases Numéricas**. In: GONÇALVES, Maria Celia da Silva; PIMENTA, Daniela Cristina Freitas Garcia. Educação Contemporânea Vol. 41, Belo Horizonte. Editora, 2022.

SANTOS, Olinto de Oliveira Santos **Bases Numéricas Equações e Criptografia**. São Paulo. All Print Editora, 2016.

SANTOS, Olinto de Oliveira Santos **Proving the Collatz Conjecture with Binary Numbers.** International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 7, Issue 5, October 2018, Pages: 68-77

SANTOS, Olinto de Oliveira. **How to Manipulate Numerical Bases to Solve Problems.** International Journal of Innovative Studies in Sciences and Engineering Technology (IJISSET). Volume: 6 Issue: 2 | 2020. Pag. 31-33.

SBM. **Diretrizes Curriculares para o Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM 2015

SCHEINERMAN, E.R. **Matemática Discreta.** São Paulo, Câmara Brasileira do Livro, p. e p. 166. 2006.

SINGH, S**O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro. Editora Record, 1998.