XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

# PRINCÍPIOS DA TEORIA TOPOLÓGICA DE COINCIDÊNCIAS

Marcio Colombo Fenille [1]

(mcfenille@gmail.com)

Este minicurso é uma introdução à teoria topológica de pontos fixos, raízes e coincidências, em que, de forma intuitiva e com forte apelo geométrico, apresentamos alguns dos mais notáveis teoremas da área e algumas de suas emblemáticas aplicações.

PALAVRAS-CHAVE: pontos fixos, raízes, coincidências.

[1]Professor do Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal de Uberlândia

# 1 Introdução

A teoria topológica de coincidências teve seu início na segunda década do século XIX, mas seu maior desenvolvimento e consolidação ocorreram na primeira metade do século XX. Podemos citar três matemáticos como os precursores da teoria, os três com sobrenomes que, por coincidência, iniciam com a letra B.

O primeiro é o padre católico, matemático, teólogo e filósofo da antiga Boémia, atual República Checa, Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano. Aquele que data de 1812 e que hoje chamamos Teorema do Anulamento de Bolzano é o primeiro teorema topológico de coincidências de que se tem notícia; na terminologia usual, um teorema de raízes.

O segundo é o matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer, autor de um dos mais célebres resultados de toda a matemática, não apenas da topologia: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, cuja versão geral é de 1912.

O terceiro é Karol Borsuk, matemático polonês que provou, em 1933, o resultado pouco antes formulado por Stanislaw Ulam que passou a ser chamado o Teorema de Borsuk-Ulam, inaugurando uma nova linha de pensamento que atravessou o século XX e segue firme nos nossos dias.

Ao passo que o Teorema do Anulamento de Bolzano consta do programa de todo bom curso inicial de Cálculo, os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e de Borsuk-Ulam raramente comparecem nos currículos de graduação; com sorte nos currículos de mestrado. De fato, as versões mais gerais desses teoremas são assuntos da Topologia Algébrica, disciplina a que estudantes de Matemática normalmente têm acesso apenas no curso de doutorado ou como optativa no mestrado. Aproveitamos o ensejo para recomendar o livro [2], que está no prelo da Editora da Universidade de São Paulo; nele aparecem a versão geral do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 3.2) e a versão geral do Teorema de Borsuk-Ulam (Teorema 5.21).

Não obstante, os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e de Borsuk-Ulam possuem versões em dimensões baixas que podem ser compreendidas por meio de construções e provas de forte apelo geométrico e de pleno alcance à cognição de estudantes de graduação ou início de mestrado. A isto se propõe este minicurso: apresentar de forma intuitiva e acessível esses notáveis teoremas e algumas de suas aplicações.

# 2 Pontos fixos, raízes e coincidências

A teoria topológica de pontos fixos, raízes e coincidências é uma das principais e mais profícuas linhas de pesquisa na área de Topologia Algébrica, com forte inserção em vários ramos da matemática pura e aplicada (como sistemas dinâmicos, equações diferenciais, teoria econômica de jogos etc.).

O tema possui duas indexações específicas na 2020 *Mathematical Subject Classification* da *American Mathematical Society*, a saber:

- 55M20 – Algebraic Topology – Classical topics in algebraic topology – Fixed points and coincidences in algebraic topology.
- 54H25 – General Topology – Connections of general topology with other structures, applications – Fixed point and coincidence theorems (topological aspects).

Além disso, há periódicos especializados nessa linha, por exemplo, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, *Fixed Point Theory and Applications* (Springer) e *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering* (Springer Open). Há também periódicos mais gerais que têm em seu escopo, com destaque, a teoria de pontos fixos e coincidências; é o caso do *Topological Methods in Nonlinear Analysis* (Juliusz Schauder Cent. Nonlinear Stud.) e o *Topology and its Applications* (Elsevier).

Tudo isso deixa evidente a importância da teoria de pontos fixos, raízes e coincidências no universo da matemática contemporânea. Passemos, pois, à definição desses três conceitos centrais.

- Seja $f : X \to X$ uma função de um espaço $X$ em si próprio. Um ponto $x_0 \in X$ chama-se um *ponto fixo* de $f$ se $f(x_0) = x_0$.
- Seja $f : X \to Y$ uma função e seja $y_0 \in Y$ um ponto fixado. Um ponto $x_0 \in X$ chama-se uma *raiz* de $f$ com relação a $y_0$ se $f(x_0) = y_0$.
- Sejam $f, g : X \to Y$ funções. Um ponto $x_0 \in X$ chama-se uma *coincidência* entre $f$ e $g$ se $f(x_0) = g(x_0)$.

É simples notar que os conceitos de *ponto fixo* e *raiz* são casos particulares de *coincidências*. Com efeito:

- Um ponto fixo de uma função $f : X \to X$ é uma coincidência entre $f$ e a função identidade $id : X \to X$.
- Uma raiz de uma função $f : X \to Y$ com relação a um ponto $y_0 \in Y$ é uma coincidência entre $f$ e a função $\kappa_0 : X \to Y$ constante igual a $y_0$.

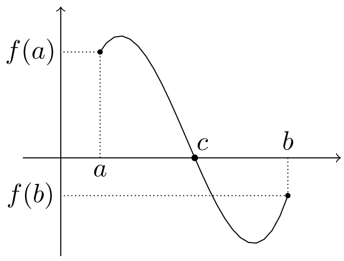
Os três resultados centrais deste minicurso são teoremas que garantem, sob hipóteses apropriadas, a *existência* de raízes, pontos fixos e coincidências, nesta ordem. São teoremas de caráter topológico (como será explicado) e que, de fato, garantem apenas a existência; não assertam sobre a quantidade ou uma maneira para detectar os pontos.

Existem outros aspectos da teoria topológica de pontos fixos, raízes e coincidências em que a ideia central está relacionada à detecção da quantidade mínima de pontos fixos, raízes ou coincidências que certas famílias de funções possuem.

# 3 Teorema do Anulamento de Bolzano

O Teorema do Anulamento de Bolzano, de 1812, é o primeiro teorema topológico sobre existência de raízes de que se tem notícia. Não provaremos este teorema nestas notas, por entendermos tratar-se de resultado amplamente conhecido e que consta de todo bom livro inicial de Cálculo; ver, por exemplo, [3, Capítulo 5].

**Teorema 3.1** (Teorema do Anulamento de Bolzano) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.*

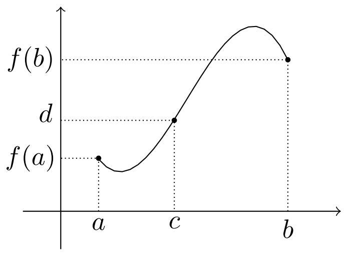



Exemplos utilizando funções definidas por uma regra explícita são pouco interessantes, em geral, mas ilustram bem a aplicabilidade do Teorema do Anulamento de Bolzano. Por exemplo, considere a função (contínua!) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{4 - x^2} - e^x$. Temos que $f(0) = 1$ e $f(2) = -e^2$ tem sinais opostos. Logo, existe um ponto $c \in [0,2]$ tal que $f(c) = 0$, o que significa que $e^c = \sqrt{4 - c^2}$. O ponto $c$ corresponde à abscissa de um (de fato, o único) ponto de intersecção entre os gráficos das funções $y = e^x$ e $y = \sqrt{4 - x^2}$, com $x \in [0,2]$. O teorema não da informações sobre qual seja em $[0,2]$ o ponto $c$; apenas garante sua existência.

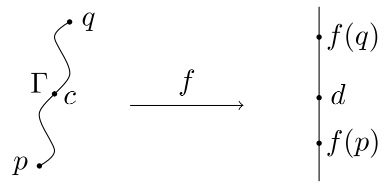
O resultado a seguir é uma consequência direta do Teorema do Anulamento de Bolzano, conhecida como Teorema do Valor Intermediário.

**Corolário 3.1** (Teorema do Valor Intermediário) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $d$ é um ponto da reta que está entre $f(a)$ e $f(b)$, então a equação $f(x) = d$ possui raiz, isto é, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$.*

**Prova:** Dada a função $f$ e o ponto $d$ conforme enunciado, considere a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - d$. Essa função é contínua e satisfaz $g(a) = f(a) - d$ e $g(b) = f(b) - d$. Como $d$ está entre $f(a)$ e $f(b)$, temos que $g(a)$ e $g(b)$ tem sinais opostos. Pelo Teorema do Anulamento de Bolzano, existe $c \in [a,b]$ tal que $g(c) = 0$, o que implica $f(c) = d$. □



Tanto no Teorema do Anulamento de Bolzano quanto no Teorema do Valor Intermediário, não tem qualquer importância o fato do intervalo fechado $[a, b]$ ser "reto", isto é, naturalmente identificado com um segmento de reta. Afinal, esta é apenas uma forma de identificarmos um intervalo fechado. Em vez disso, podemos identificá-lo com um *arco simples* de curva em qualquer espaço euclidiano, como ilustrado na figura a seguir. Ambos os teoremas permanecem válidos nesse cenário, e podemos resumi-los com o seguinte enunciado: *Seja $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ uma função contínua de um arco simples na reta. Sejam $p$ e $q$ os pontos finais do arco. Se $d$ é um ponto da reta entre $f(p)$ e $f(q)$, então existe um ponto $c \in \Gamma$ tal que $f(c) = d$.*




A seguir, mais duas aplicações do Teorema do Anulamento de Bolzano. A primeira é um teorema de ponto fixo, que podemos considerar a versão unidimensional do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. A segunda é um teorema de coincidências para funções da circunferência na reta, que podemos considerar a versão unidimensional do Teorema de Borsuk-Ulam.

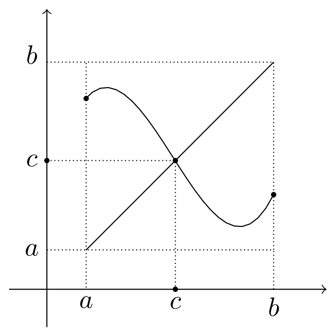
**Teorema 3.2** *Toda função contínua de um intervalo fechado em si próprio possui ponto fixo.*

**Prova:** Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Considere a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$. Essa função é contínua e satisfaz:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{pois} \quad f(a) \in [a, b];$$
$$g(b) = f(b) - b \leq 0 \quad \text{pois} \quad f(b) \in [a, b].$$

Segue do Teorema do Anulamento de Bolzano que existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, o que implica $f(c) = c$. □

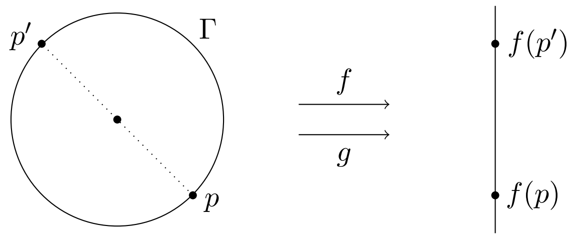
Em termos geométricos, por assim dizer, o Teorema 3.2 assevera que o gráfico de qualquer função contínua $f : [a, b] \to [a, b]$ intercepta a diagonal ascendente do quadrado $[a, b] \times [a, b]$, a qual corresponde ao gráfico da função identidade $id : [a, b] \to [a, b]$. Os pontos fixos de $f$ são as abscisas dos pontos de interseção.



A seguir, passamos a considerar funções cujo domínio é uma circunferência. Pares de pontos sobre uma circunferência $S$ que são diametralmente opostos são chamados pontos *antípodas*. A função $\mathbf{a} : S \to S$ que aplica cada ponto $x \in S$ em seu antípoda $x'$ é chamada função *antipodal*.

**Teorema 3.3** *Toda função contínua de uma circunferência na reta colapsa um par de pontos antípodas.*

**Prova:** Seja $p$ um ponto fixado da circunferência $S$ e seja $p'$ seu antípoda. Se $f(p) = f(p')$, a prova está encerrada. Suponhamos, então, que seja $f(p) \neq f(p')$.




Seja $\Gamma$ um dos arcos em $S$ de $p$ para $p'$ e seja $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(x) - f(x')$. Essa função é contínua e satisfaz $g(p) = f(p) - f(p')$ e $g(p') = f(p') - f(p)$, do que resulta $g(p') = -g(p)$. Pelo Teorema do Anulamento de Bolzano, existe um ponto $c \in \Gamma$ tal que $g(c) = 0$, o que implica $f(c) = f(c')$. $\square$

Observamos que o Teorema 3.3 pode ser considerado um *teorema de coincidência*, pelo fato de que um ponto $c \in S$ que satisfaz $f(c) = f(c')$ é uma coincidência entre a função $f$ e a função composta $f \circ \mathbf{a}$, em que $\mathbf{a}$ é a função antipodal.

## Exercícios

1. Encontre os pontos fixos das funções $f : [0,1] \to [0,1]$ definidas em cada item. Em seguida, identifique-os geometricamente como as abscisas dos pontos de interseção do gráfico de $f$ com a curva $y = x$.

   (a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (b) $f(x) = 4x - 4x^2$ (c) $f(x) = x^2 - x + 1$

2. Verifique que a hipótese de que a função esteja definida em um intervalo *fechado* é essencial para o Teorema 3.3, isto é, o resultado não é verdadeiro para funções contínua definidas em intervalos do tipo $[a, b)$, $(a, b]$ e $(a, b)$.

3. Prove: toda função $f : [a, b) \to [a, b)$ contínua e sobrejetora tem ponto fixo.

4. Exiba $f : (a, b) \to (a, b)$ contínua, sobrejetora e livre de ponto fixo.

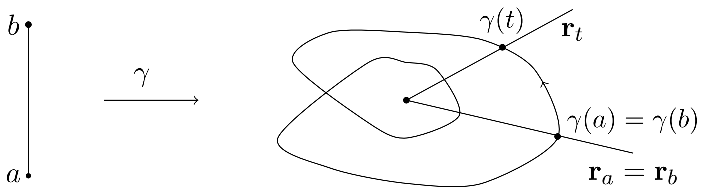
5. Prove: não existe função contínua e injetora de uma circunferência na reta.

6. Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 = 1\}$ a circunferência em $\mathbb{R}^2$ de centro na origem e raio 1. Sejam $S^+$ e $S^-$ as semicircunferências fechadas norte e sul, respectivamente. Seja $f : S^+ \to S^-$ uma função contínua. Prove que existe um ponto $(x_0, y_0) \in S^+$ tal que $f(x_0, y_0) = (x_0, -y_0)$.

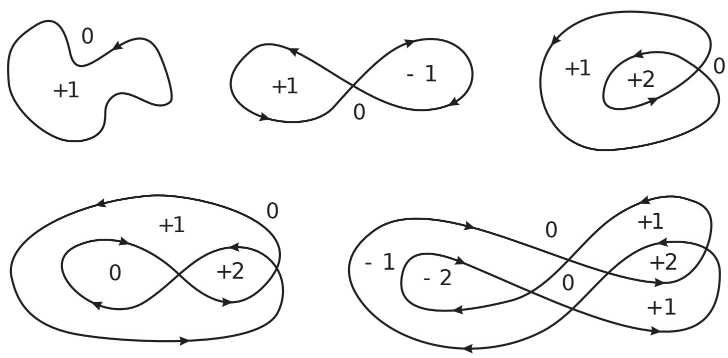
# 4 Número de enrolamento de uma curva

Uma definição formal para o número de enrolamento de uma curva ao redor de um ponto que não pertence à sua imagem requer minuciosos detalhes e pode ser muito exaustiva, a depender do que possamos assumir como familiar. O que apresentamos a seguir é uma definição intuitiva, de fácil compreensão, e que responderá à altura às nossas pretensões. Destalhes podem ser vistos em [1, Seções 17–23].

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva fechada no plano e seja $y \in \mathbb{R}^2 - \mathrm{im}(\gamma)$ um ponto do plano que não pertence à trajetória da curva. Para cada $t \in [a, b]$, seja $\mathbf{r}_t$ a semirreta que parte de $y$ e passa por $\gamma(t)$. Quanto $t$ varia de $a$ até $b$, os pontos $\gamma(t)$ percorrem toda a trajetória da curva $\gamma$ e, por sua vez, as semirretas $\mathbf{r}_t$ rotacionam em torno do ponto $y$. Como a curva é fechada, $\mathbf{r}_t$ retorna, afinal, para a sua posição inicial, ou seja, $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_b$. Portanto, durante o movimento, as semirretas $\mathbf{r}_t$ descrevem um certo número completo de rotações ao redor de $y$. O contador algébrico desse número de rotações completas (atribuindo sinal positivo às rotações anti-horárias e sinal negativo às horárias) é chamado o *número de enrolamento* da curva $\gamma$ ao redor do ponto $y$ e se denota por $w(\gamma, y)$.




Na figura abaixo são apresentadas cinco curvas com indicações do número de enrolamento ao redor de pontos de cada componente de seu complementar.




Dada uma curva fechada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, o número de enrolamento que acabamos de definir pode ser considerado como uma função:

$$w(\gamma, \cdot\,) : \mathbb{R}^2 - \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{Z}$$

A respeito dessa função, valem as propriedades a seguir; ver [1, Seção 25].

**1.** $w(\gamma, \cdot\,)$ é uma função contínua (munido $\mathbb{Z}$ da topologia discreta).

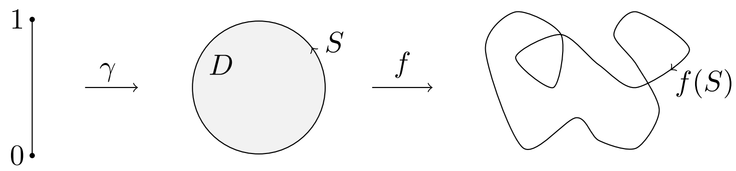
2. $w(\gamma, \cdot\,)$ é constante sobre cada componente de $\mathbb{R}^2 - \mathrm{im}(\gamma)$. Além disso, se $y$ está na componente ilimitada de $\mathbb{R}^2 - \mathrm{im}(\gamma)$, então $w(\gamma, y) = 0$.

3. Se $H : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma *homotopia* que inicia em $\gamma_0$ e termina em $\gamma_1$, e se $y \in \mathbb{R}^2$ não pertence à imagem de $H$, então $w(\gamma_0, y) = w(\gamma_1, y)$.

O conceito de *homotopia* que aparece na propriedade **3** será apresentado e elucidado durante o minicurso. Por ora, antecipamos brevemente a interpretação da propriedade: Iniciamos com uma curva fechada $\gamma_0$ e um ponto $y \in \mathbb{R}^2 - \mathrm{im}(\gamma_0)$. Então, deformamos continuamente a curva $\gamma_0$, assim obtendo uma curva $\gamma_1$. Se, durante a deformação, a curva não passa pelo ponto $y$, então $w(\gamma_0, y) = w(\gamma_1, y)$.

Doravante, denotamos por $D$ o disco unitário de centro na origem no plano $\mathbb{R}^2$, isto é, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sua fronteira é a circunferência de centro na origem e raio 1, a saber, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Dada uma função contínua $f : D \to \mathbb{R}^2$, a imagem $f(S)$ pode ser vista como a trajetória da curva fechada $\gamma_f = f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, em que $\gamma : [0, 1] \to D$ dada por $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ é a parametrização canônica da circunferência $S$.




Dado um ponto $y \in \mathbb{R}^2 - f(S)$, definimos o número $w(f, y)$, chamado o *número de enrolamento de $f$ ao redor de $y$*, por

$$w(f, y) := w(\gamma_f, y).$$

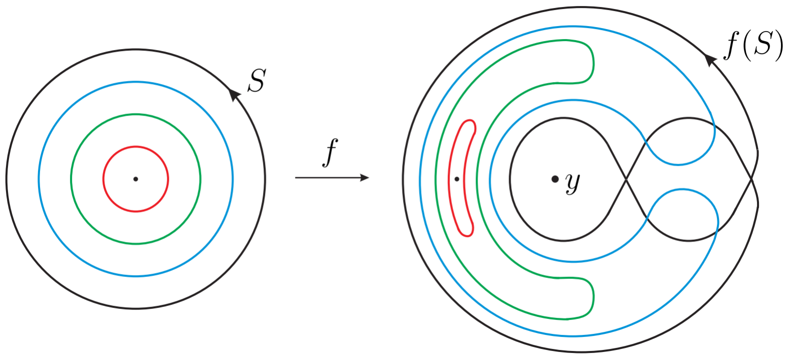
Por exemplo, se $\ell : D \to \mathbb{R}^2$ é a inclusão natural, isto é, $\ell(x) = x$ para todo $x \in D$, então, em termos de parametrização, $\gamma_\ell = \gamma$. E temos:

$$w(\ell, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y \in D - S; \\ 0 & \text{se} \quad y \in \mathbb{R}^2 - D. \end{cases}$$

A seguir, apresentamos aquele que poderíamos chamar o Teorema de Bolzano Bidimensional.

**Teorema 4.1** *Seja $f : D \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua e seja $y$ um ponto de $\mathbb{R}^2 - f(S)$. Se $w(f, y) \neq 0$, então $y \in f(D)$.*

**Prova:** Para cada $t \in [0, 1]$, seja $S_t$ a circunferência de raio $t$ centrada na origem. Note que $S_1 = S$ e $S_0$ consiste apenas da origem. Suponhamos que $y \notin f(D)$. Então $y \notin f(S_t)$ qualquer que seja $t \in [0, 1]$. Logo, quando $t$ decresce de 1 até 0, a família de curvas $f(S_t)$ descreve uma homotopia (uma deformação contínua) que inicia em $\gamma_f$ e termina na curva constante em $f(0)$; veja a figura a seguir.



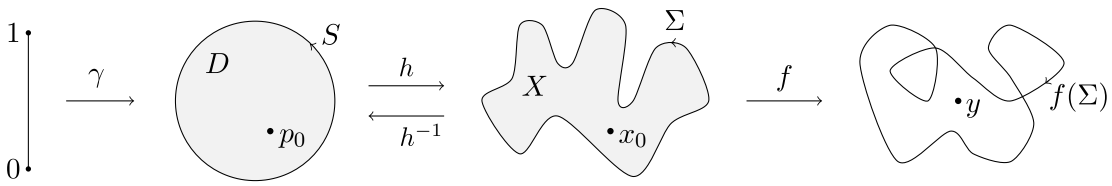

Segue das propriedades 2 e 3 do número de enrolamento que $w(f, y) = 0$. □

Nas duas seções seguintes, utilizaremos o Teorema 4.1 para provar os famosos Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e Teorema de Borsuk-Ulam em dimensão 2.

O Teorema 4.1 estende-se para funções $f : X \to \mathbb{R}^2$, definidas e contínuas em qualquer espaço topológico $X$ que seja *homeomorfo* ao disco $D$, isto é, para o qual existe uma função $h : D \to X$ que seja contínua e bijetora, e cuja inversa $h^{-1} : X \to D$ também seja contínua. Uma tal função, quando existe, é chamada um *homeomorfismo*, e dos espaços $X$ e $D$ diz-se que são homeomorfos.

Suponhamos, pois, que seja este o caso, e fixemos um homeomorfismo $h : D \to X$. Então, a fronteira $\Sigma$ de $X$ é homeomorfa à circunferência $S$, sendo a função $h|_S : S \to \Sigma$, obtida pelas restrições óbvias de $h$, um homeomorfismo.

Seja $f : X \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua e seja $\gamma : [0, 1] \to D$ a parametrização canônica da circunferência $S$. Então $\gamma_f^h = f \circ h \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada em $\mathbb{R}^2$. Veja figura a seguir.




Para um ponto qualquer $y \in \mathbb{R}^2 - f(\Sigma) = \mathbb{R}^2 - \mathrm{im}(\gamma_f^h)$, está definido o número de enrolamento $w(\gamma_f^h, y)$. Definimos o número de enrolamento de $f$ ao redor de $y$ por

$$w(f, y) := w(\gamma_f^h, y).$$

O leitor mais cismado há de questionar, com razão, se essa definição depende ou não do homeomorfismo $h$. A resposta é sim, depende! Mas não é difícil ver que a nulidade do número não depende de $h$; com efeito, se $h, h' : D \to X$ são dois homeomorfismos, então os números $w(\gamma_f^h, y)$ e $w(\gamma_f^{h'}, y)$ têm o mesmo valor absoluto. Já que o que nos importa é apenas saber se o número de enrolamento é nulo ou não, a dependência de $h$ torna-se supérflua.

Suponhamos que o número de enrolamento $w(f, y) \neq 0$. Pelo Teorema 4.1, o ponto $y$ pertence a $f \circ h(D)$, isto é, existe $p_0 \in D$ tal que $(f \circ h)(p_0) = y$. Portanto, para o ponto $x_0 = h(p_0) \in X$, temos $f(x_0) = y$, o que mostra que $y \in f(X)$.

Essa versão mais geral do Teorema 4.1 será utilizada na prova do Teorema de Borsuk-Ulam bidimensional, na Seção 6.

### Exercícios

1. Para cada inteiro $k$, seja $\gamma_k : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma_k(t) = (\cos 2k\pi t, \operatorname{sen} 2k\pi t)$. Verifique que $w(\gamma_k, 0) = k$.

2. Mostre que a recíproca do Teorema 4.1 não é verdadeira, isto é, se $y \in f(D)$, não se tem necessariamente $w(f, y) \neq 0$.

## 5 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é um dos mais famosos e importantes teoremas da matemática. Estima-se que cerca de 95% do matemáticos o conheçam e saibam enunciá-lo com precisão, mas menos de 10% deles sabiam demonstrá-lo. A seguir, apresentamos uma demonstração para a versão desse teorema em dimensão dois. Inciamos com alguns resultados preliminares, que podem ser provados como consequência do Teorema 4.1

Assim como na seção anterior, denotamos por $D$ o disco unitário de centro na origem no plano $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira é a circunferência $S$.

**Proposição 5.1** *Seja $f : D \to \mathbb{R}^2$ é uma função contínua que deixa fixo cada ponto de $S$. Então $D \subset f(D)$.*

**Prova:** Seja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ a parametrização canônica de $S$ e seja $y$ um ponto de $D - S$. Como, por hipótese, $f|_S = \mathit{identidade}$, temos $\gamma_f = \gamma$. Portanto $w(f, y) = w(\gamma, y) = 1$. Pelo Teorema 4.1, $y \in f(D)$. Isso prova que $D - S \subset f(D)$. Como, além disso, $S = f(S) \subset f(D)$, concluímos que $D \subset f(D)$. $\square$

Observamos que, sob as hipóteses da Proposição 5.1, não se pode concluir que se tenha necessariamente $D = f(D)$. Um exemplo simples em que a inclusão $D \subset f(D)$ é estrita pode ser providenciado pelo leitor.

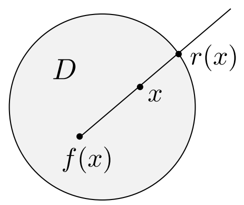
**Corolário 5.1** (Inexistência de Retração) *Não existe função contínua $f : D \to S$ que deixe fixos todos os pontos de $S$.*

**Prova:** Suponha que $f : D \to S$ seja uma função que deixe fixo cada ponto de $S$. Pela Proposição 5.1, devemos ter $D \subset f(D) = S$, o que é absurdo. $\square$

O Corolário 5.1 é conhecido como o Teorema da Inexistência de Retração do disco sobre a circunferência. Seu nome se deve à seguinte terminologia: Seja $A$ um subconjunto de um espaço topológico $X$; uma *retração* de $X$ em $A$ é uma função contínua $\mathbf{r} : X \to A$ que deixa fixo cada ponto de $A$. Se uma tal retração existe, diz-se que $A$ é um *retrato* de $X$. Nessa terminologia, o Corolário 5.1 afirma que a circunferência $S$ não é um retrato do disco $D$.

**Teorema 5.1** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) *Toda função contínua do disco em si próprio possui ponto fixo.*

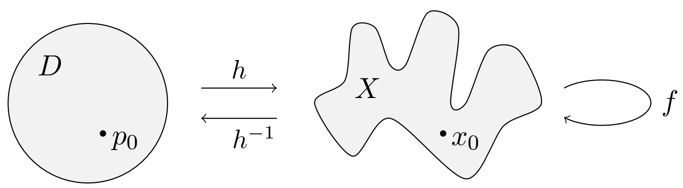
**Prova:** Suponhamos que exista uma função contínua $f : D \to D$ livre de ponto fixo, isto é, $f(x) \neq x$ para todo $x \in D$. Então, para cada $x \in D$, fica bem definida a semirreta que inicia em $f(x)$ e contém $x$. Tal semirreta intercepta a circunferência $S$ em um único ponto $r(x)$, o qual varia continuamente com $x$ (o leitor mais cismado verificará as duas afirmações dessa frase). Ademais, se $x \in S$ então $r(x) = x$. Isso define uma retração $r : D \to S$.




Como uma tal retração não pode existir, devido ao Corolário 5.1, também inexiste função contínua de $D$ em si próprio que seja livre de ponto fixo. $\square$

No Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, não tem qualquer relevância o fato do disco $D$ ser "redondo" ou ser unitário; essas são característica geométricas, ao passo que o teorema tem caráter *topológico*. O que queremos dizer com isso é que o teorema permanece válido se no lugar do disco $D$ colocamos qualquer espaço topológico $X$ que seja *homeomorfo* a $D$, isto é, para o qual exista um homeomorfismo $h : D \to X$.

Suponhamos, pois, que seja este o caso, isto é, que seja $h : D \to X$ um homeomorfismo. Vamos provar que *toda função contínua de $X$ em si próprio possui ponto fixo*. Seja $f : X \to X$ uma função contínua.




Considere a função composta $\varphi = h^{-1} \circ f \circ h : D \to X \to X \to D$. Por ser essa função contínua (claro!), segue do Teorema do Ponto fixo de Brouwer que existe um ponto $p_0 \in D$ tal que $\varphi(p_0) = p_0$. Ponhamos $x_0 = h(p_0)$. Vamos verificar que $x_0$ é um ponto fixo de $f$. Com efeito, $p_0 = \varphi(p_0) = h^{-1}(f(h(p_0))) = h^{-1}(f(x_0))$; aplicando o homeomorfismo $h$ de ambos os lado resulta $x_0 = f(x_0)$.

## Exercícios

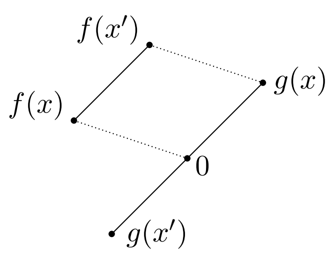
1. Dê exemplo de uma função contínua $f : D \to D$ que:
   (a) Tem o centro do disco como seu único ponto fixo.
   (b) Tem, como único ponto fixo, um ponto do interior diferente do centro.
   (c) Tem, como único ponto fixo, um ponto da fronteira $S$.
   (d) Tem um segmento diametral como conjunto de pontos fixos.
   (e) Tem a fronteira $S$ como conjunto de pontos fixos.
2. Seja $f : X \to X$ uma função contínua, em que $X$ é subespaço de algum espaço euclidiano. Prove que o conjunto dos pontos fixos de $f$ é fechado em $X$.
3. Prove que não existe uma função contínua $f : D \to D$ cujo conjunto de pontos fixos seja o interior do disco.
4. Prove que o Teorema 5.1 implica o Corolário 5.1.
5. Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera em $\mathbb{R}^3$ de centro na origem e raio 1. Sejam $E^+$ e $E^-$ os hemisférios fechados (incluindo a linha do Equador) norte e sul, respectivamente. Seja $f : E^+ \to E^-$ uma função contínua. Prove que existe um ponto $p \in E^+$ tal que $f(p) = -p$.
6. Seja $A$ uma matriz $3 \times 3$ cujas entradas são números reais positivos. Prove que $A$ possui um autovalor real positivo.

# 6 Teorema de Borsuk-Ulam

O Teorema de Borsuk-Ulam, conjecturado por Stanislaw Ulam e demonstrado por Karol Borsuk em 1933, é um dos primeiros e mais famosos teoremas topológicos de coincidência. Provamos sua versão em dimensão um na Seção 2 e agora provaremos sua versão bidimensional utilizando o Teorema 4.1.

**Teorema 6.1** (Teorema de Borsuk-Ulam) *Toda função contínua da esfera no plano colapsa um par de pontos antípodas.*

**Prova:** Seja $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua da esfera no plano. Para cada $x \in S^2$, seja $g(x) \in \mathbb{R}^2$ o ponto final do vetor equipolente a $f(x') - f(x)$ emitido a partir da origem $0 \in \mathbb{R}^2$. Em toda a prova, $x'$ denota o antípoda de $x$.



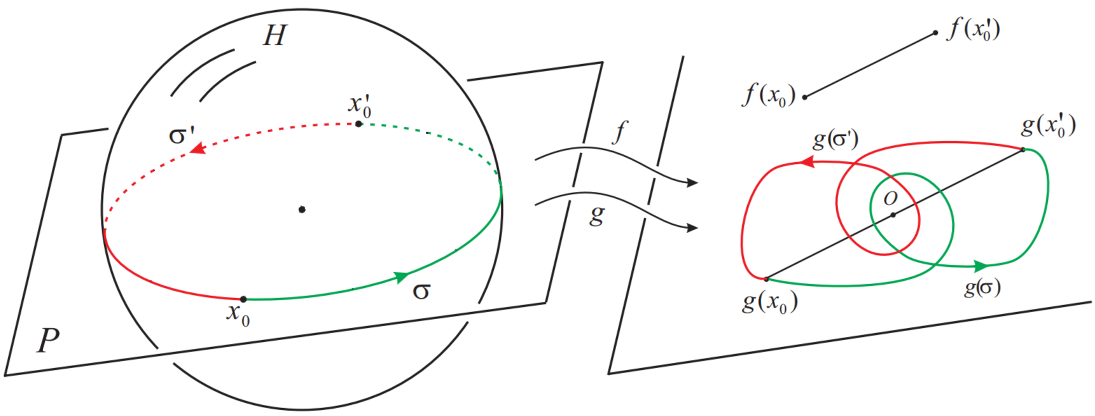
A função $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ é contínua e tem a propriedade que, para cada $x \in S^2$, o ponto $g(x')$ é simétrico a $g(x)$ com relação a origem.

Provar que $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ colapsa um par de pontos antípodas equivalente a provar que existe $x \in S^2$ tal que $g(x) = 0$. É isso o que provaremos.

Seja $P$ um plano fixado contendo o centro da esfera $S^2$ e seja $\Sigma$ a circunferência máxima de $S^2$ correspondente à intersecção $P \cap S^2$. Seja $H$ um dos hemisférios fechados da esfera delimitados pelo corte por $P$. Observamos que $H$ é homeomorfo ao disco $D$, sendo que sua fronteira corresponde à circunferência $\Sigma = P \cap S^2$.

A seguir, aplicaremos a versão mais geral do Teorema 4.1, descrita após sua prova. Para tanto, passamos a considerar a restrição da função $g$ ao hemisfério $H$. Para não sobrecarregar a notação, denotamos essa função ainda por $g : H \to \mathbb{R}^2$.

A simetria a que nos referimos acima quanto aos pontos $g(x)$ e $g(x')$ faz com que a curva $g(\Sigma)$ seja simétrica com relação a origem $0 \in \mathbb{R}^2$; ver figura a seguir. Com efeito, sejam $x_0 \in \Sigma$ um ponto fixado e $x_0' \in \Sigma$ seu antípoda. Seja $\sigma \subset S^1$ o arco de $x_0$ para $x_0'$ e seja $\sigma' \subset S^1$ o arco de $x_0'$ para $x_0$, consecutivo em sentido ao arco $\sigma$, de tal modo que $\sigma \cup \sigma' = \Sigma$. A curva $g(\Sigma)$ é a concatenação do caminho $g(\sigma)$, que vai de $g(x_0)$ para $g(x_0')$, com o caminho $g(\sigma')$, que vai de $g(x_0')$ para $g(x_0)$. Por simetria, o caminho $g(\sigma')$ descreve, ao redor da origem, tantas voltas completas quanto o caminho $g(\sigma)$, com as voltas correspondentes ao mesmo sentido. Além disso, quando concatena-se $g(\sigma)$ com $g(\sigma')$ surge uma volta completa extra (externa). Portanto, o número de enrolamento de $g(\Sigma)$ ao redor da origem é da forma $2k \pm 1$, em que $k$ é o número de voltas completas dadas ao redor da origem pelo caminho $g(\sigma)$.




Por conseguinte, o número de enrolamento $w(g, 0)$ deve obrigatoriamente ser ímpar, o que impõe $w(g, 0) \neq 0$. Pela versão mais geral do Teorema 4.1, existe $p \in H$ tal que $g(p) = 0$, o que implica $f(p) = f(-p)$. $\square$

Se assumimos a superfície da terra como uma esfera (ou como um elipsoide, que é um objeto homeomorfo à esfera) e consideramos as funções temperatura e pressão como funções contínuas no espaço e no tempo, então obtemos, como consequência do Teorema de Borsuk-Ulam, um interessante resultado chamado o Primeiro Teorema da Meteorologia. É claro que as funções temperatura e pressão podem ser substituídas por quaisquer outras que possam ser assumidas contínuas.

**Corolário 6.1** (Primeiro Teorema da Meteorologia) *Em todo instante, existem na superfície da terra pontos antípodas com a mesma temperatura e a mesma pressão.*

**Prova:** Considere a superfície $S$ da terra como sendo uma esfera ou, se preferir, um elipsoide (que é homeomorfo à esfera). Seja $T : S \to \mathbb{R}$ a função que associa a cada ponto $x \in S$ a temperatura $T(x)$ em tal ponto, e seja $P : S \to \mathbb{R}$ a função que associa a cada ponto $x \in S$ a pressão $T(x)$ nesse ponto. Assumindo que essas funções sejam contínuas, também o é a função $F : S \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x) = (T(x), P(x))$. Então, pelo Teorema de Borsuk-Ulam, existem pontos $x_0$ e $x_0'$ antípodas sobre $S$ para os quais se verifica $(T(x_0), P(x_0)) = F(x_0) = F(x_0') = (T(x_0'), P(x_0'))$. □

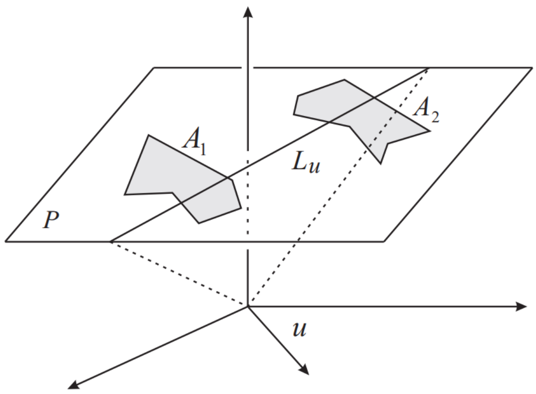
Como uma aplicação do Teorema de Borsuk-Ulam, vamos apresentar um resultado que garante a resolução do seguinte problema:

**O Problema das Panquecas:** Suponha que duas panquecas de formato irregular estejam em um mesmo prato (plano). Será possível cortá-las exatamente ao meio com um único golpe (linear) de faca?

Se, por exemplo, cada panqueca tem a forma de um círculo perfeito, então a reta passando pelos centros de tais círculos é o traço providencial para o corte desejado. O problema torna-se mais difícil, no entanto, se o formato das panquecas não é restrito. Apresentamos, a seguir, a solução para o problema, que pode ser vista em [4].

**Corolário 6.2 (Teorema da Bissecção)** *Dadas duas regiões poligonais em um plano, existe uma linha reta que divide ambas ao meio com relação à área.*

**Prova:** Considere regiões poligonais $A_1$ e $A_2$ no plano $P = \mathbb{R}^2 \times \{2\} \subset \mathbb{R}^3$. Dado $u \in S^2$, considere o plano $P_u \subset \mathbb{R}^3$ que passa pela origem e tem $u$ como vetor normal. O plano $P_u$ divide o espaço $\mathbb{R}^3$ em dois semi-espaços.




Para $i = 1, 2$, seja $f_i(u)$ a área da porção de $A_i$ que está no semi-espaço delimitado por $P_u$ para o qual aponta o vetor $u$. Se $u = \vec{k}$ então $f_i(u) = \text{área}(A_i)$, e se $u = -\vec{k}$ então $f_i(u) = 0$. Por outro lado, se $u \neq \pm\vec{k}$ então $P_u$ corta o plano $P$ ao longo de uma reta $L_u$ que divide $P$ em dois semiplanos, e $f_i(u)$ é a área da porção de $A_i$ que está em um lado específico de $L_u$, a saber, o lado contido no semi-espaço para o qual aponta o vetor $u$. Trocando $u$ por $-u$ obtemos o mesmo plano $P_u$, mas trocamos o semi-espaço. Por essa razão:

$$f_i(u) + f_i(-u) = \text{área}(A_i). \tag{1}$$

Seja $F : S^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(u) = (f_1(u), f_2(u))$. Pelo Teorema de Borsuk-Ulam, existe $u_0 \in S^2$ tal que $F(u_0) = F(-u_0)$. Isso implica que, para cada $i = 1, 2$, tem-se

$$f_i(u_0) = f_i(-u_0). \tag{2}$$

As equações (1) e (2) juntas implicam que $f_i(u) = \frac{1}{2}\text{área}(A_i)$ para $i = 1, 2$. □

A título de generalidade, observamos que as regiões consideradas no Teorema 6.2 não precisam ser poligonais, basta que sejam conexas e mensuráveis.

Há ainda outra aplicação para o Teorema de Borsuk-Ulam, cuja asserção é uma versão tridimensional do problema das panquecas; chama-se Teorema do Sanduíche de Presunto. Ele é apresentado no Exercício 4 desta seção.

## Exercícios

1. Dê exemplo de uma função contínua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ que:
   (a) Colapsa exatamente um par de pontos antípoda.
   (b) Colapsa exatamente dois pares de pontos antípodas.
2. Suponha que seja $f : S^2 \to S^2$ uma função contínua tal que $f(x) \neq f(x')$ para todo $x \in S^2$. Prove que $f$ é sobrejetora.
3. Prove que o Teorema de Borsuk-Ulam é equivalente à seguinte asserção: *Não existe função contínua $f : S^2 \to S^1$ tal que $f(x') = f(x)'$ para todo $x \in S^2$.*
4. Sejam $A$, $B$ e $C$ três polígonos no espaço $\mathbb{R}^3$. Prove que existe um plano que divide os três ao meio com relação ao volume.

# Bibliografia

[1] CHINN, W. G; STEENROD, N. E. **First concepts of topology:** the geometry of mappings of segments, curves, circles and disks. New York: Random House, 1966.

[2] FENILLE, M. C. **Lições de Homologia**. São Paulo: Edusp (no prelo).

[3] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[4] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.