MINICURSO

Integração do século XXI

A integral de Henstock-Kurzweil

Andrade da Silva, Fernanda [1]; da Silva, Márcia R.[2]

Resumo: *Sendo o carro-chefe da análise moderna, a integral é sem dúvida uma das peças mais familiares do Cálculo. Mas a integral com a qual a maioria está familiarizada, a integral de Riemann, é na verdade apenas uma entre várias. Na verdade, a teoria de integração vem se desenvolvendo e, incrivelmente, novas descobertas continuam a enriquecer este ramo da matemática. Aqui, buscamos desenvolver os conceitos primordiais introduzidos por Riemann que fazem de sua teoria tão amplamente aceita pela comunidade em geral. Mas, também, apresentamos pontos falhos da integral de Riemann que fizeram com que suas ideias precisassem de complemento. Com isso, veremos a definição de integral atribuída a Henstock-Kurzweil que generaliza os resultados predecessores e amplia a gama de funções denominadas integráveis. Além disso, exibimos os resultados fundamentais da elegante e moderna definição.*

Palavras-chave: *Integral de Riemann, Integral de Henstock-Kurzweil.*

Carga Horária: 3h

Objetivos: O objetivo deste minicurso é apresentar de modo geral, porém simples, o conceito e as principais propriedades da integral de Henstock-Kurzweil.

1 INTRODUÇÃO

A noção de derivada já era conhecida antes de Isaac Newton e Gottfried Leibniz. A esses dois matemáticos é atribuída a invenção do Cálculo por volta de 1670. Para

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo, ffeandrade@usp.br

[2]Centro de Ciências da Natureza (CCN) da Universidade Federal de São Carlos, Campus Lagoa do Sino, marciars@ufscar.br

Newton, o processo de integração era amplamente visto como um inverso à operação de diferenciação, e a integral era sinônimo da antiderivada. Por volta de 1850, uma nova abordagem surgiu na obra de Augustin-Louis Cauchy e logo depois na obra de Georg Riemann. Eles acreditavam que a integral definida poderia ser interpretada como a área sob curvas contínuas e, assim, ser obtida pela soma de uma série infinita de áreas correspondentes a retângulos aproximados de largura infinitamente pequena, o que torna esta definição de integral, conhecida como Integral de Riemann, independente da derivada.

A Teoria da Integral de Riemann possui algumas limitações. Em primeiro lugar, a classe das funções limitadas Riemann integráveis restringe-se a funções com uma quantidade enumerável de descontinuidades e nem toda derivada é Riemann integrável. Assim, muitas funções importantes não têm uma integral de Riemann, mesmo depois de estendermos ligeiramente a classe de funções integráveis, permitindo integrais de Riemann "impróprias". Além disso, mesmo para funções integráveis, é arduo provar bons teoremas de convergência usando apenas as ferramentas normalmente associadas às integrais de Riemann. Por exemplo, o limite pontual de funções Riemann integráveis não é necessariamente integrável neste sentido. Para superar estas deficiências, Henri Lebesgue propôs uma nova noção de integração, conhecida como integral de Lebesgue. Esta integral é estritamente mais geral do que a integral de Riemann, ou seja, pode-se integrar uma classe maior de funções. Contudo, ao comparar a integral imprópria de Riemann com a integral de Lebesgue, descobrimos que nenhuma é estritamente mais geral que a outra. Ademais, o método de Lebesgue é complexo e é necessário uma quantidade considerável de Teoria da Medida até mesmo para definir sua integral.

Nem a integral imprópria de Riemann nem a integral de Lebesgue geraram uma construção totalmente satisfatória de antiderivadas. Noções um pouco mais gerais de integral foram fornecidas por Arnaud Denjoy (1912) e Oskar Perron (1914). Entretando, suas definições revelaram-se equivalentes.

Décadas mais tarde, de forma independente, Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) criaram uma formulação muito mais simples da integral de Denjoy-Perron. Essa integral é conhecida por vários nomes: integral de Henstock-Kurzweil, integral generalizada de Riemann, integral de Perron e, devido à sua definição, também é chamada de integral de calibre. Por ser uma integral consideravelmente mais simples do que a integral de Lebesgue e por englobar as integrais de Riemann, Newton e até mesmo a de Lebesgue, o interesse por esta integral tem crescido nas últimas décadas, e alguns matemáticos até defendem que devemos ensinar a integral de Henstock-Kurzweil ao lado ou no lugar da integral de Riemann ou da integral de Lebesgue.

A integral Henstock-Kurzweil possui diversas vantagens em relação as demais. Por exemplo, com esse novo conceito, temos finalmente que toda função derivável é integrável. Além disso, a integral de Kurzweil e Henstock nos permite lidar com integrandos que são altamente oscilatórios e apresentam uma quantidade não enumerável de descontinuidades.

Iniciariemos com um breve desenvolvimento histórico da teoria de integração, onde esperamos oferecer algum contexto e foco para os problemas investigados ao longo deste minicurso. Para uma discussão mais abrangente dos primórdios formais do Cálculo e do desenvolvimento da integral, remetemos o leitor a [5, Capítulos 16, 17 e 22]. Em seguida, apresentaremos a terminologia usual para o estudo da integral de Riemann e relembraremos as condições necessárias e suficientes para que uma função seja Riemann integrável, além de apresentarmos algumas deficiências desta integral. Procedendo com o estudo das integrais, introduziremos a partição marcada δ-fina, conceito que atua como base para o estudo da integral de Henstock-Kurzweil. Exploraremos algumas propriedades da integral de Henstock-Kurzweil e veremos que esta integral supera a maior desvirtude da integral de Riemann, ou seja, a incapacidade de integrar todas as derivadas. Por fim, apresentaremos uma discussão dos teoremas de convergência para a integral de Henstock-Kurzweil.

2 O Desenvolvimento Histórico do Integral

O conceito de integral surgiu, inicialmente, de tentativas de determinar a área de figuras geométricas e de curvas. Embora algumas soluções para estes problemas tenham sido conjecturadas antes do século XVII, o primeiro grande avanço em relação aos métodos gerais para resolver problemas de área coincidiu com o desenvolvimento do Cálculo. É importante ressaltar que foi a compreensão da relação fundamental entre o problema da tangente e o problema da área, isto é, entre o cálculo diferencial e o cálculo integral, que proporcionou o maior impulso para a gênese completa da integral moderna.

Historicamente, integração foi definida como o processo inverso da diferenciação, ou seja, uma função F era a integral de uma função f se $F' = f$. Para Gottfried Leibniz, a integral representava a área de curvas.

Embora ambas as noções de integral fossem suficientes para resolver muitos problemas numéricos anteriormente intratáveis, elas possuíam vários pontos fracos. Primeiramente, a classe de curvas integráveis foi limitada não apenas às curvas contínuas, mas também àquelas com anti-derivadas elementares. Em segundo lugar, e talvez mais problemático, nem a integral de Newton nem a integral de Leibniz possuíam uma base teórica rigorosa e nenhum dos matemáticos foram capazes de fornecer uma justificativa sólida para a manipulação destes objetos matemáticos.

No século XIX, o Cálculo sofreu uma reconstituição radical. Em vez de se concentrarem nas soluções de problemas numéricos, ou em métodos de cálculo de integrais, os matemáticos começaram a enfatizar a noção de "rigor" teórico e procuraram fornecer à matemática uma base concreta e, mais importante, logicamente justificada. Foi Augustin-Louis Cauchy, um prolífico matemático do século XIX, quem estabeleceu o Cálculo com base no conceito moderno de limite. Rompendo com a tradição dos séculos XVII e XVIII, Cauchy definiu a integral como o limite de uma soma, e não em termos de antiderivadas. Voltando à noção de que a área sob uma função poderia ser aproximada somando as áreas de retângulos adequadamente selecionados, Cauchy observou que, para funções contínuas, a soma resultante tornou-se mais precisa à medida que mais retângulos de largura menor eram usados. A ideia era considerar uma função real f definida em um intervalo $[a, b]$ e dividir este intervalo em pequenos subintervalos $[t_{i-1}, t_i] \subset [a, b]$, $1 \leq i \leq n$. Assim, o valor $f(t_i)(t_i - t_{i-1})$ (área do retângulo de altura $f(t_i)$ e base com extremos em t_{i-1} e t_i) é então usado para aproximar a área sob o gráfico de f em $[t_{i-1}, t_i]$. A área total sob a curva no intervalo $[a, b]$ é então aproximada por

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

É fácil observar que a aproximação melhora à medida que os retângulos ficam mais finos, ou seja, o comprimento dos subintervalos $[a, b]$ fica menor. Simbolicamente, sua ideia pode ser representado por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

No entanto, a definição de Cauchy garantiu a existência da integral definida apenas para funções com no máximo um número finito de descontinuidades. Por esta razão, Georg Bernhard Riemann procurou generalizar a integral de Cauchy para que uma classe mais ampla de funções pudesse ser integrada. Riemann fez isso permitindo que a altura dos retângulos aproximados fosse determinada por qualquer ponto no subintervalo correspondente, em vez de apenas pelos pontos finais. Assim, a integral de Riemann assumiu a seguinte forma

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}),$$

em que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$. Com esta definição em mãos, Riemann começou então a determinar com precisão quais funções tinham ou não integrais definidas.

Embora a integral de Riemann finalmente tenha fornecido ao Cálculo uma base estável, ela teve seus próprios problemas. Um aspecto importante dessa integral se situa no Teorema Fundamental do Cálculo, que propõe,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

em que F é uma primitiva de f, ou seja, $F'(x) = f(x)$. Entretanto, segundo a definição de integral, esse resultado só é válido segundo hipóteses rigorosas. De fato, nem toda função Rieman integrável possui uma primitiva (veja Exemplo 3.7) e, também, mesmo que uma função possua primitiva, ela pode não ser Riemann integrável (veja Exemplo 4.3).

No final do século XIX e início do século XX, muitos matemáticos procuraram expandir os conceitos de análise para além do conjunto dos números reais e, assim, definições de uma integral mais abstratada foram requisitadas. Talvez a mais famosa delas seja a integral de Lebesgue, desenvolvida no início do século XX por Henri Lebesgue. Essa integral ampliou a gama de funções integráveis, mas, no entanto, não conseguiu suprir o problema do Teorema Fundamental do Cálculo. Ademias, devido à sua complexidade, a integral de Lebesgue é frequentemente estudada extensivamente apenas no nível de pós-graduação.

Na década de 1950, os matemáticos Jaroslav Kurzweil e Ralph Henstock construíram uma nova integral que apresentava uma notável semelhança com a definição de Riemann. Em sua definição, a abordagem intuitiva da integral de Riemann é preservada, mas ao contrário de Riemann que considera partições marcadas de um intervalo com subintervalos cujos comprimentos são limitados por uma constante fixa, Henstock e Kurzweil usaram uma função estritamente positiva δ, chamada de calibre, para medir o comprimento de cada subintervalo, ou seja, o comprimento máximo dos subintervalos pode variar. Ao fazer este pequeno ajuste, descobriu-se que a sua integral, conhecida como integral de Henstock-Kurzweil, também superou as limitações da integral de Riemann, em particular, ela recupera todas as primitivas como integrais. Outra vantagem dessa nova integral é que a classe de funções Henstock-Kurzweil integráveis é estritamente maior do que a classe de funções Riemann (impróprias) integrávies. De fato, a função de Dirichlet é Henstock-Kurzweil integrável. Na verdade, a integral de Henstock-Kurzweil generaliza até mesmo a integral de Lebesgue e também nos permites lidar com integrandos que são altamente oscilatórios e apresentam muitas descontinuidades.

3 Integral de Riemann

Embora o leitor esteja sem dúvida familiarizado com o conceito geral da integral e de vários métodos para realizar a integração a partir de um estudo de Cálculo de nível de graduação, revisaremos nesta seção a definição precisa da integral de Riemann e outros requisitos de notação, antes de mergulharmos em uma investigação das condições necessárias e suficientes para que uma função com valor real seja integrável de Riemann.

Iniciaremos examinando vários conceitos relacionados às subdivisões de intervalos fechados e limitados.

Definição 3.1. *Uma* ***partição*** *de um intervalo* $[a, b]$ *é uma coleção finita de pontos* $P = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ *tal que* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. *Denotamos o conjunto de todas as partições de* $[a, b]$ *por* $D[a, b]$.

Embora, a rigor, uma partição se refira a um conjunto ordenado de pontos, uma vez que este conjunto subdivide naturalmente um intervalo $[a, b]$ no conjunto de intervalos $\{[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]\}$, usaremos frequentemente a palavra partição para denotar o conjunto resultante de subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, $1 \leq i \leq n$. No que segue, apresentamos os conceitos de soma inferior e superior de uma função real.

Definição 3.2. *Sejam* $P = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$, *uma partição de* $[a, b]$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. Definimos a* ***soma inferior***

$$S_{\inf}(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

em que $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ *Analogamente, definimos a* ***soma superior***

$$S_{\sup}(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

onde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Na sequência, discutiremos o que acontece com a soma inferior e superior de uma função, quando tomamos diferentes partições.

Definição 3.3. *Sejam* $P, Q \in D[a, b]$. *Dizemos que* Q *é* ***mais fina*** *do que* P *quando* $P \subset Q$. *Neste caso, também é dito que* Q ***refina*** P.

A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrada em [6, Teorema 1].

Teorema 3.1. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. Quando se refina uma partição* $P \in D[a, b]$, *a soma inferior de* f *não diminui e a soma superior não aumenta. Em outras palavras* $S_{\inf}(f; P) \leq S_{\inf}(f; Q)$ *e* $S_{\sup}(f; Q) \leq S_{\sup}(f; P)$ *para toda partição* $Q \in D[a, b]$ *tal que* $P \subset Q$.

Como consequência do Teorema 3.1, toda soma inferior de f é menor ou igual a qualquer soma superior. A partir desses conceitos, podemos definir integrais.

Definição 3.4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos*

- *a **integral inferior** de f por*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in D[a,b]} S_{\text{inf}}(f; P);$$

- *a **integral superior** de f por*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P \in D[a,b]} S_{\text{sup}}(f; P).$$

Pelas propriedades do ínfimo e do supremo, temos as seguintes propriedades.

Proposição 3.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições $P, Q \in D[a, b]$ tais que*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon < S_{\text{inf}}(f; P)$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon > S_{\text{sup}}(f; Q).$$

A seguir, veremos quando uma função é dita Riemann integrável.

Definição 3.5. *Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita **Riemann integrável** quando*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Sabemos que a integral de Riemann é linear e aditiva em relação aos intervalos. Em outras palavras, é válido

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \left[\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right],$$

para todo $c \in [a, b]$ e toda constante $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função constante, isto é, $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Então, para toda partição $P = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \in D[a, b]$, temos*

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} = c = M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \textit{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Assim, $S_{\text{inf}}(f; P) = c = S_{\text{sup}}(f; P)$ para todo $P \in D[a, b]$ e, consequentemente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = c(b - a).$$

Logo, toda função constante é Riemann integrável.

Exemplo 3.2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função escada, ou seja, existe uma partição $P = \{x_i : 1 \le i \le n\} \in D[a,b]$ tal que $f|_{[x_{i-1} - x_i]}$ é uma função constante. Como*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,$$

segue do Exemplo 3.1 que f é Riemann integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}),$$

em que $f(x) = c_i$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$.

Exemplo 3.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Dada qualquer partição $P = \{x_i : 1 \le i \le n\} \in D[a,b]$, temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$, $1 \le i \le n$, uma vez que todos os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de P contêm números racionais e irracionais. Logo $S_{\text{inf}}(f;P) = 0$ e $S_{\text{sup}}(f;P) = b - a$ para todo $P \in D[a,b]$, o que implica que f não é Riemann integrável, pois

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \quad e \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a.$$

Estamos interessados agora em apresentar alguns critério de integrabilidade.

Teorema 3.2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. As seguinyes afirmações são equivalentes.*

- *f é Riemann integrável.*
- *Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições $P, Q \in D[a,b]$ tais que $S_{\text{sup}}(f;P) - S_{\text{inf}}(f;Q) < \varepsilon$.*
- *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $P \in D[a,b]$ tal que $S_{\text{sup}}(f;P) - S_{\text{inf}}(f;P) < \varepsilon$.*
- *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $P = \{x_i : 1 \le i \le n\} \in D[a,b]$ tal que*

  $$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

  em que $\omega_i = M_i - m_i$.

Demonstração. Veja [6, Teorema 4]. □

Corolário 3.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se existe uma sequência de partições $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} (S_{\text{sup}}(f;P_n) - S_{\text{inf}}(f;P_n)) = 0, \tag{1}$$

então f é Riemann integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_{\text{sup}}(f;P_n) = \lim_{n\to\infty} S_{\text{inf}}(f;P_n).$$

Demonstração. Da condição (1), dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$S_{\text{sup}}(f; P_n) - S_{\text{inf}}(f; P_n) < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > N.$$

Pelo Teorema 3.2, f é Riemann integrável. □

Vejamos agora como podemos aplicar os critérios de integrabilidade para mostrar que uma função é Riemann integrável.

Exemplo 3.4. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas que diferem de apenas um subconjunto finito de $[a, b]$. Então, f é Riemann integrável se, e somente se, g o for. No caso afirmativo, temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Com efeito, a diferença $f - g$ é uma função escada. Logo, $f - g$ é integrável (veja Exemplo 3.2) e

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = 0.$$

Como $f = g + (f - g)$, segue que f é Riemann integrável se, e somente se, g o for e,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo 3.5. *A função identidade $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável. De fato, considere*

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} : 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Como f é crescente, temos

$$m_i = \frac{i-1}{n} \quad e \quad M_i = \frac{i}{n}.$$

Assim,

$$S_{\text{inf}}(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}$$

e

$$S_{\text{sup}}(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}.$$

Desse modo,

$$S_{\text{sup}}(f; P_n) - S_{\text{inf}}(f; P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

que converge para zero quando n tende ao infinito. Pelo Corolário 3.1, f é Riemann integrável.

Exemplo 3.6. *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável. Com efeito, pela continuidade, f assume seus valores máximo e mínimo em todo subintervalo de $[a, b]$, isto é, para toda partição $P = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \in D[a, b]$ temos*

$$m_i = f(c_i) \quad e \quad M_i = f(d_i), \quad c_i, d_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2}$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}. \tag{3}$$

Tome $P = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \in D[a,b]$ *tal que*

$$\|P\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\} < \delta.$$

Então, para todo $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *temos*

$$|t_i - s_i| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta. \tag{4}$$

Combinando (3) *e* (4), *obtemos*

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Em particular, por (2), *concluímos*

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_{\sup}(f;P) - S_{\inf}(f;P) &= \sum_{i=1}^{n}[M_i - m_i](x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

e a conclusão segue do Teorema 3.2.

Nosso próximo objetivo é exibir um dos principais resultados da Teoria da integral de Riemann, conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo. Para tanto, apresentaremos alguns conceitos básicos.

Definição 3.6. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função Riemann integrável. Definimos* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *por*

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Neste caso, chamamos F *de* ***integral indefinida de*** f.

Exemplo 3.7. *Considere* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Então, $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Note que F *é contínua, mas não é derivável em* $t = 1$ *que é a descontinuidade de* f.

Definição 3.7. *Uma função derivável* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é dita uma* ***primitiva*** *da função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sempre que* $F' = f$.

Já vimos (Exemplo 3.7) que nem toda função Riemann integrável possui primitiva. O próximo resultado exibe uma condição suficiente para que a suposição anterior seja verdadeira. Para a sua demostração, remetemos [6, Teorema 8].

Teorema 3.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$, então a sua integral indefinida $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável em c e $F'(c) = c$.*

Corolário 3.2. *Toda função contínua possui primitiva.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.3, uma vez que toda função contínua é Riemann integrável (veja Exemplo 3.6). □

O próximo resultado, estabelece uma relação entre os conceitos de derivada e integral. Em termos práticos, ele fornece um método muito poderoso para calcular integrais sem recorrer a definição como limite de um somatório. Sua prova pode ser encontrada em [6, Teorema 9].

Teorema 3.4 (Teorema Fundamental do Cálculo-Riemann)**.** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrável e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sua primitiva. Então,*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \tag{5}$$

Pelos resultados anteriores, concluímos a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 3.5. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é Riemann integrável e*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

em que $F' = f$.

Utilizando o conceito de conjunto de medida nula prova-se que toda função limitada cujo o conjunto de descontínuidades é enumerável é Riemann integrável. Este fato, bastante interessante, é usado para provar que o limite pontual de funções Riemann integráveis não é necessariamente integrável, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.8. *Seja $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ uma sequência enumerável de números racionais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina*

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$
$$\vdots$$
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \dots, r_n \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Note que cada f_n é Riemann integrável, pois é limitada e descontínua apenas em um número enumerável de pontos. Por outro lado, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função de Dirichlet que não é integrável (veja Exemplo 3.3).

4 Integral de Kurzweil

O objetivo desta seção é apresentar de modo geral, porém simples, o conceito e as principais propriedades da integral de Henstock-Kurzweil. Primeiramente, discutiremos o modo como Hentock e Kurzweil consideraram as partições de um intervalo.

Dada uma partição de um intervalo, muitas vezes é útil escolher um ponto como "marcação" de cada um dos subintervalos da partição. A construção resultante é chamada de partição marcada. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 4.1. *Uma **partição marcada** de $[a, b]$ é qualquer coleção finita de pontos-intervalos $\dot{P} = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]) : 1 \leq j \leq k\}$ tal que $\{t_j : 1 \leq j \leq k\}$ é uma partição de $[a, b]$ e $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j])$ para todo $1 \leq j \leq k$. Neste caso, τ_j, $1 \leq j \leq k$ é chamado de **marca** do intervalo $[t_{j-1}, t_j])$.*

Definição 4.2. *Um calibre é toda função estritamente positiva $\delta\colon [a, b] \to (0, +\infty)$.*

Definição 4.3. *Seja $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ um calibre em $[a, b]$. Dizemos que uma partição marcada $\dot{P} = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]) : 1 \leq j \leq k\}$ é **δ-fina** sempre que a inclusão*

$$[t_{j-1}, t_j] \subset (\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j))$$

é válida para todo $1 \leq j \leq k$.

Pelo Lema de Cousin (veja [1, Teorema 1.4]), para todo intervalo $[a, b]$ e todo calibre $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$, existe uma partição marcada de $[a, b]$ δ-fina.

A seguinte definição descreve a integral de Kurzweil em termos formais.

Definição 4.4. *Seja $U\colon [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais, assumindo valores reais. Dizemos que U é* integrável *sobre $[a, b]$, se existir um número $I \in \mathbb{R}$ que satisfaz: dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a, b]$ tal que,*

$$|S(U, \dot{P}) - I| = \left| \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, t_j) - U(\tau_j, t_{j-1})] - I \right| < \epsilon,$$

para toda partição δ-fina $\dot{P} = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]), 1 \leq j \leq k\}$ de $[a, b]$.

A notação $S(U, \dot{P}) = \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, t_j) - U(\tau_j, t_{j-1})]$ indica a soma de Riemann correspondente à função U e à partição $\dot{P}$ de $[a, b]$.

O número real I é chamado integral **generalizada de Riemann** ou **integral de Kurzweil** de U sobre o intervalo $[a, b]$ e é denotado por $\int_a^b DU(\tau, t)$. Se existir a integral $\int_a^b DU(\tau, t)$, definimos

$$\int_b^a DU(\tau, t) = -\int_a^b DU(\tau, t) \quad \text{e} \quad \int_a^b DU(\tau, t) = 0 \quad \text{quando} \quad a = b.$$

Se considerarmos uma função real $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ e definirmos $U\colon [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ por $U(\tau, t) = f(\tau)t$, na Definição 4.4, então dada uma partição $\dot{P} = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]), 1 \leq j \leq k\}$ de $[a, b]$, obtemos a seguinte soma

$$S(U, \dot{P}) = \sum_{j=1}^{k} [U(\tau_j, t_j) - U(\tau_j, t_{j-1})] = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Assim, $\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^b f(s)ds$ é também chamada de **integral de Henstock-Kurzweil**, **integral de Henstock**, ou de **integral de Perron**.

O próximo resultado descreve a integral de Riemann em termos de partições δ-finas. Essa caracterização será fundamental na comparação da integrais de Riemann e de Henstock-Kurzweil.

Teorema 4.1. *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável se, e somente se, existe um número $R \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ constante tal que*

$$\left| \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - R \right| < \varepsilon,$$

para toda partição marcada $\dot{P} = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]) : 1 \leq j \leq k\}$ δ-fina.

Demonstração. Inicialmente, suponha f Riemann integrável. Tome

$$R = \int_a^b f(x)dx = \sup_{P \in D[a,b]} S_{\inf}(f;P) = \inf_{P \in D[a,b]} S_{\sup}(f;P).$$

Por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existem partições $P_1, P_2 \in D[a,b]$, tal que

$$-\varepsilon < S_{\inf}(f;P_1) - R \quad \text{e} \quad S_{\sup}(f;P_2) - R < \varepsilon. \tag{6}$$

Tomando $P = P_1 \cup P_2 = \{t_j : 1 \leq j \leq k\}$, temos

$$S_{\inf}(f;P_1) \leq S_{\inf}(f;P) \quad \text{e} \quad S_{\sup}(f;P_2) < S_{\sup}(f;P) \tag{7}$$

(veja Teorema 3.1). Combinando (6) e (7), obtemos

$$-\varepsilon < S_{\inf}(f;P) - R \quad \text{e} \quad S_{\sup}(f;P) - R < \varepsilon. \tag{8}$$

Defina $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $\delta(x) = \delta_0$, em que

$$\delta_0 = \max\{|t_j - t_{j-1}| : 1 \leq j \leq k\}.$$

Então, para todo $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, temos

$$|t_j - t_{j-1}| < \delta_0 \Rightarrow \begin{cases} t_j < \delta_0 + t_{j-1} < \delta(\tau_j) + \tau_j \\ t_{j-1} > t_j - \delta_0 > \tau_j - \delta(\tau_j) \end{cases}$$

o que implica que $\dot{P} = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]) : 1 \leq j \leq k\}$ é δ-fina para todo $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Por fim, como $m_j < f(\tau_j) < M_j$, temos

$$-\varepsilon \overset{(8)}{<} S_{\inf}(f;P) - R < \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - R < S_{\sup}(f;P) - R \overset{(8)}{<} \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left| \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - R \right| < \varepsilon.$$

A recíproca é deixada para o leitor. $\square$

Em outras palavras, o Teorema 4.1 nos diz que ao tomarmos na Definição 4.4 o calibre como sendo uma função constante δ_0 proveniente de um $\epsilon > 0$ dado, concluiremos que toda função Riemann integrável é Henstock-Kurzweil integrável. Entretando, a recíproca desse fato não é verdadeira, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 4.1. *A função de Dirichlet* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}). \end{cases}$$

não é Riemann integrável (veja Exemplo 3.3).

Afirmamos que f *é Henstock-Kurzweil integrável em* $[0,1]$ *e* $\int_0^1 f(s)ds = 0$. *Com efeito, dados* $\epsilon > 0$ *e* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência dos racionais em* $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, *defina o calibre* δ *por*

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, & t = a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ 1, & t \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Seja $\dot{P} = \{(\tau_j, [t_{j-1}, t_j]), 1 \leq j \leq k\}$ *uma partição* δ*-fina em* $[0,1]$. *Então,*

$$\begin{aligned} |S(f,\dot{P}) - 0| &= \left| \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ \tau_j \in [0,1]\cap\mathbb{Q}}}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \right| + \left| \sum_{\substack{j=1 \\ \tau_j \in [0,1]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})}}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ \tau_j \in [0,1]\cap\mathbb{Q}}}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \right| = \sum_{j=1}^{k}(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{k} 2\delta(\tau_j) \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} 2\delta(\tau_j) = \sum_{j=1}^{\infty} 2\frac{\epsilon}{2^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

O Exemplo 4.1 também evidência uma das vantagem de se trabalhar com o calibre: ele permite incluir conjuntos de pontos finitos ou enumeráveis da união de intervalos que tem comprimento total pequeno e cujas parcelas não contribuem muito nas somas de Riemann.

Uma outra vantagem do calibre, talvez uma das mais interessantes, é que podemos forçar a escolha de uma marca. Isso é muito útil, pois permite controlar certos pontos em que a função é "mal comportada". Veja o seguinte exemplo, retirado de [1].

Exemplo 4.2. *Considere a função*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Note que $g(x) \to \infty$ quando $x \to 0$, ou seja, g é ilimitada e, portanto, não é Riemann integrável em $[0,1]$. Claramente, o ponto de dificuldade neste caso é $x = 0$. Então, contornamos esta situação definindo convenientemente um calibre

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in (0,1] \\ \frac{1}{4}, & t = 0, \end{cases}$$

que força a primeira marca τ_1 ser igual a zero. Assim, o primeiro termo da soma de Riemann será nulo e, nos demais subintervalos, a função g é limitada e contínua, não havendo, portanto, outras dificuldades de manipulação.

Finalmente, um dos mais importantes benefícios da função calibre diz respeito ao fato de que ela permitiu aperfeiçoar o clássico Teorema Fundamental do Cálculo, garantindo que toda função (mesmo não sendo integrável no sentido de Riemann) que possui uma primitiva seja Henstock-Kurzweil integrável.

Teorema 4.2 (Teorema Fundamental do Cálculo-Henstock-Kurzweil)**.** *Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função e $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f, isto é, $f(x) = F'(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então, f é Henstock-Kurzweil integrável e*

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, temos para cada $\tau \in [a,b]$, $F'(\tau) = f(\tau)$. Logo, para cada τ, existe uma constante $\delta(\tau) = \delta(\tau,\epsilon) > 0$, tal que

$$|F(r) - F(\tau) - f(\tau)(r-\tau)| < \epsilon|r-\tau|$$

e

$$|F(\tau) - F(s) - f(\tau)(s-\tau)| < \epsilon|\tau - s|,$$

desde que $\tau - \delta(\tau) < s < \tau < r < \tau + \delta(\tau)$. Portanto,

$$|F(r) - F(s) - f(\tau)(r-s)| < \epsilon|r-s|, \tag{9}$$

sempre que $\tau - \delta(\tau) < s < \tau < r < \tau + \delta(\tau)$. Defina o calibre $\delta\colon [a,b] \to (0,+\infty)$ pondo, para cada $\tau \in [a,b]$, o valor $\delta(\tau)$.

Seja $\dot{P} = \{(\tau_j,[t_{j-1},t_j]); 1 \leq j \leq k\}$ uma partição δ-fina em $[a,b]$. Assim, pela desigualdade (9) temos

$$\begin{aligned} &\left| F(b) - F(a) - \sum_{j=1}^{k} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{k} [F(t_j) - F(t_{j-1}) - f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})] \right| < \sum_{j=1}^{k} \epsilon(t_j - t_{j-1}) = \epsilon(b-a). \end{aligned}$$

Portanto, pela arbitrariedade de ϵ, segue que a função f é Henstock-Kurzweil integrável. $\square$

A integral de Kurzweil estende também a integral de Stieltjes. Com efeito, basta tomar na Definição 4.4 a função U definada por $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$, onde $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Assim, $\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^b f(s)dg(s)$.

A classe das funções Kurzweil integráveis é mais ampla do que a classe daquelas integráveis no sentido de Lebesgue. Para provar este fato, é necessário uma quantidade considerável de Teoria da Medida e, portanto, omitimos aqui. O leitor interessado, pode consultar [3, Seção 8]. O próximo exemplo exibe uma finção Henstock-Kurzweil integrável que não é Lebesgue integrável.

Exemplo 4.3. *Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

A função f é diferenciável, com

$$f'(t) = \begin{cases} 2t\cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right) + \frac{2\pi}{t}\sin\left(\frac{\pi}{t^2}\right), & t \in (0,1] \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Segue do Teorema 4.2 que a função f' é Henstock-Kurzweil integrável em $[0,1]$ e sua integral é

$$\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = -1 - 0 = -1.$$

Vamos mostrar que f' não é Lebesgue integrável em $[0,1]$. Com efeito, sejam $a,b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b \leq 1$. Como a função f' é contínua em $[a,b]$, então pelo Teorema 4.2, temos f' Riemann integrável e

$$(R)\int_a^b f'(t)dt = b^2\cos\left(\frac{\pi}{b^2}\right) - a^2\cos\left(\frac{\pi}{a^2}\right).$$

Tomando sequências $s_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$ e $t_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$(R)\int_{s_k}^{t_k} f'(t)dt = t_k^2\cos\left(\frac{\pi}{t_k^2}\right) - s_k^2\cos\left(\frac{\pi}{s_k^2}\right) = \frac{1}{2k}.$$

Note que $\{[s_k,t_k]_{k\in\mathbb{N}}\}$ é uma família de intervalos em $[0,1]$ dois a dois disjuntos, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[s_k,t_k] \subset [0,1]$ e

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(R)\int_{s_k}^{t_k}|f'(t)|dt \geq \sum_{k=1}^{+\infty}(R)\int_{s_k}^{t_k} f'(t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k} = +\infty$$

de onde segue que $|f'|$ não é Lebesgue integrável, pois

$$(L)\int_0^1|f'(t)|dt \geq \sum_{k=1}^{+\infty}(L)\int_{s_k}^{t_k}|f'(t)|dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(R)\int_{s_k}^{t_k}|f'(t)|dt \geq +\infty.$$

Uma vez que f' não absolutamente integrável em $[0,1]$ concluímos que f' não é Lebesgue integrável em $[0,1]$, como queríamos demonstrar.

Observe ainda que o Exemplo 4.3 também nos fornece outra função que é Henstock-Kuzweil integrável, mas não é Riemann integrável. Ressaltamos ainda que o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser modificado a ponto de permitir alguns pontos de não diferenciabilidade para f.

Teorema 4.3. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável quase sempre em $[a,b]$, então, f' é Henstock-Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a).$$

Exemplo 4.4. *Vamos retornar ao Exemplo 4.2 e aplicar o Teorema 4.3 para obter $\int_0^1 g(x)dx$. Observe que a função $G(x) = 2\sqrt{x}$ é contínua em $[0,1]$ e $G'(x) = g(x)$, para todo $x \in (0,1]$, mas $G'(0)$ não existe. Assim, g é diferenciável quase sempre em $[0,1]$ (a menos do conjunto enumerável de medida nula $E = \{0\}$). Então, pelo Teorema 4.3*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = G(1) - G(0) = 2 - 0 = 2.$$

4.1 Propriedades da Integral de Henstock-Kurzweil

Esta seção é dedicada à apresentação de algumas propriedades principais da integral de Henstock. Suas demosntrações podem ser encontradas em [1] e [7].

Teorema 4.4. *Sejam f e g funções Henstock-Kurzweil integráveis sobre $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então,*

1. *a integral de Henstock-Kurzweil de f sobre $[a,b]$ é única;*
2. *$f + kg$ é Henstock integrável sobre $[a,b]$ e*
$$\int_a^b (f(s) + kg(s))ds = \int_a^b f(s)ds + k\int_a^b g(s)ds;$$
3. *se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então*
$$\int_a^b f(s)ds \leq \int_a^b g(s)ds;$$
4. *se $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então*
$$\left|\int_a^b f(s)ds\right| \leq M(b-a).$$

O próximo resultado garante que se f for integrável no intervalo $[a,b]$, então também o será sobre cada um de seus subintervalo compactos.

Teorema 4.5. *Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in (a,b)$. Então f é Henstock-Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ se, e somente se, f é Henstock-Kurzweil integráveil sobre $[a,c]$ e $[c,b]$. E ainda,*

$$\int_a^b f(s)ds = \int_a^c f(s)ds + \int_c^b f(s)ds.$$

O Teorema 4.6 fornece um critério de integrabilidade para Henstock-Kurzweil.

Teorema 4.6 (Critério de Cauchy)**.** *A função f é Henstock-Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre $\delta\colon [a,b] \to (0,\infty)$ tal que*

$$|S(f,\dot{P}_1) - S(f,\dot{P}_2)| < \epsilon, \tag{10}$$

para quaisquer partições marcadas δ-finas $\dot{P}_1$ e $\dot{P}_2$ de $[a,b]$.

O Lema de Saks-Henstock afirma que a aproximação das somas generalizadas de Riemann $S(f,\dot{P})$ satisfazendo $|S(f,\dot{P}) - \int_a^b f| < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ e toda partição $\delta-$fina $\dot{P}$ de $[a,b]$ é válida também para uma coleção arbitrária de subintervalos de $[a,b]$.

Lema 4.1 (Saks-Henstock)**.** *Seja f uma função Henstock-Kurzweil integrável sobre $[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, assuma que o calibre δ em $[a,b]$ é tal que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} [f(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) - \int_a^b f(s)ds \right\| < \epsilon,$$

para toda partição δ-fina $\dot{P} = \{t_0, \tau_1, t_1, ..., t_{k-1}, \tau_k, t_k\}$ em $[a,b]$.

Se $a \leq \beta_1 \leq \xi_1 \leq \gamma_1 \leq \beta_2 \leq \xi_2 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \beta_m \leq \gamma_m \leq b$ representa uma partição δ-fina $\{(\xi_j, [\beta_j, \gamma_j]), j = 1, ..., m\}$. Então,

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [f(\xi_j)(\gamma_j - \beta_j)] - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} f(s)ds \right\| < \epsilon.$$

Por fim, o Teorema 4.7 evidencia que a técnica de integração por partes é válida também para funções Henstock-Kurzweil integráveis, como era de se esperar.

Teorema 4.7. *Sejam F e G primitivas de f e g, respectivamente em $[a,b]$. Então fG é Henstock integrável se e somente se Fg é Henstock integrável. Além disso,*

$$\int_a^b fG = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b Fg.$$

4.2 Convergência da Integral de Henstock-Kurzweil

Embora a integral de Henstock-Kurzweil nos permita integrar com sucesso todas as derivadas, esta não é a única deficiência da integral de Riemann que ela supera. Como já vimos (Exemplo 3.8), o limite pontual de funções Riemann integráveis não é necessariamente integrável. Como pode ser consultado na maioria dos textos de análise real, a condição mais estrita para mostrar que o limite de uma sequência de funções Riemann integráveis continua sendo integrável é a convergência uniforme.

Nesta seção, veremos teoremas de convergência para a integral de Henstock-Kurzweil. Antes de iniciarmos nossa investigação, definiremos integrabilidade uniforme no contexto da integral de Henstock-Kurzweil. Em seguida, apresentaremos nosso primeiro teorema de convergência que envolverá esse novo conceito. O próximo resultado será sobre convergência uniforme e integrabilidade de Henstock-Kurzweil. Além disso, examinaremos o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada e ilustraremos que, apesar desses teoremas serem verdadeiros para a integral de Henstock-Kurzweil, não são para a integral de Riemann. As demonstrações de todos os resultados presentes nesta seção podem ser consultadas, por exemplo, em [2].

Definição 4.5. *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a,b]$. Dizemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é **uniformemente Henstock-Kurzweil integrável** em $[a,b]$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que*

$$\left|S(f_n,\dot{P}) - \int_a^b f_n(s)ds\right| \leq \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e toda partição marcada $\dot{P}$ δ-fina.

Em outras palavras, se pudermos encontrar um calibre δ que funcione para todo f_n, então sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada uniformemente Henstock-Kurzweil integrável. Provemos, a seguir, nosso primeiro teorema de convergência.

Teorema 4.8. *Suponha que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a,b]$ que converge pontualmente para f. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente Henstock-Kurzweil integrável em $[a,b]$, então f é Henstock-Kurzweil integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(s) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(s)ds. \tag{11}$$

O próximo resultado lida com a convergência uniforme.

Teorema 4.9. *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a,b]$ que converge uniformemente para f em $[a,b]$, então f é Henstock-Kurzweil integrável em $[a,b]$ e vale* (11)*.*

No que segue, apresentamos o Teorema da Convergência Monótona. Destacamos que sua demonstração utiliza o Lema de Saks-Henstock (Lema 4.1) e a propriedade descrita no Teorema 4.4-item 4.

Teorema 4.10 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona de funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a,b]$ que converge pontualmente para f. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(s)ds$$

existe, então f é Henstock-Kurzweil integrável em $[a,b]$ e vale (11)*.*

Ressaltamos que o Exemplo 3.8 também mostra que o Teorema da Convergência Monótona não é válido para a integral de Riemann. Outro resultado importante é o Teorema da Convergência Dominada que fornece outras condições para que limite pontual f de uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja integrável no sentido de Henstock-Kurzweil. Novamente, não existe um resultado semelhante para a integral de Riemann.

Teorema 4.11 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona de funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a,b]$ que converge pontualmente para f. Se g e h são funções Henstock-Kurzweil integráveis em $[a,b]$ tais que*

$$g(s) \leq f_n(s) \leq h(s), \quad \textit{para todo}\, n \in \mathbb{N},$$

então f é Henstock-Kurzweil integrável em $[a,b]$ e vale (11)*.*

Para mostrar que o Teorema da Convergência Dominada não é verdadeiro para funções Riemann integráveis, invocamos novamente o Exemplo 3.8. Com efeito, as funções f_n assumem apenas os valores 0 e 1 e, assim, basta tomar $g(s) = c \in \mathbb{R}$ com $c \leq 0$ e $h(s) = d \in \mathbb{R}$ com $d \geq 1$.

5 Conclusão

Vimos que uma pequena alteração na definição da integral de Riemann resultou em uma integral mais geral: a integral de Henstock-Kurzweil. Também constatamos que usar um calibre em vez de uma constante para mensurar o tamanho dos subintervalos de uma partição nos trouxe certos benefícios em relação à integral de Riemann. Exibimos funções Henstock-Kurzweil integráveis, mas que não são Riemann e/ou Lebesgue integráveis. Assim, ao utilizar a definição da integral de Henstock-Kurzweil, ampliamos o leque de funções integráveis. Além disso, evidenciamos algumas falhas da integral de Riemann. Uma delas é que nem toda derivada é Riemann integrável. Portanto, no Teorema Fundamental do Cálculo, temos que incluir a condição extra de que $f = F'$ é Riemann integrável. Quando examinamos esse teorema no contexto da integral de Henstock-Kurzweil, concluímos que não precisamos dessa condição adicional e descobrimos que toda derivada é Henstock-Kurzweil integrável. Por fim, vimos que existem alguns bons teoremas de convergência para a integral de Henstock-Kurzweil. De fato, verificamos diversas condições para que o limite (pontual ou uniforme) de uma sequência de funções Henstock-Kurzweil integráveis ainda seja integrável nesse sentido, além de examinarmos o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada. Destacamos ainda que esses últimos teoremas são válidos para integrais de Henstock-Kurzweil, mas não para integrais de Riemann.

Bibliografia

[1] Bartle, R. G. *A Modern Theory of Integrations*. Graduate Studies in Methematics, Vol. 32, American Mathematical Society, Province, Rhode Island, 2001.

[2] Gordon, R. A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. American Mathematical Society, 1994.

[3] Hönig, C. S. *As integrais de Gauge*, Minicurso, Seminario Brasileiro de Análise, v. 37, 1993.

[4] Henstock, R. *The General Theory of Integration*. Oford Mathematical Monographs, 2.ed, 1991.

[5] Katz, V. *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley Higher Mathematics, 3.ed, 2009.

[6] Lima, E. L. *Curso de análise 1*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, vol.1, 14.ed, 2014.

[7] McLeod, R. M. *The Generalized Riemann Integral*. The Mathematical Association of America. 1980.

[8] McShane, E. J. *Integration*. Princeton University Press, 1947.