MINICURSO

Métodos da Álgebra Matricial para o Estudo dos Números de Lucas e de Fibonacci

Caritá, Lucas A. [1] e Quirino, Maria Eduarda S. C. [2]

Resumo: *Neste minicurso, exploraremos as relações entre os números de Lucas e Fibonacci usando matrizes. Analisaremos as sequências de Fibonacci* (F_n) *e de Lucas* (L_n) *sob a ótica das* $Q-$*matrizes de Fibonacci e de Lucas, representadas por* $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$*, uma vez que através da potenciação dessas matrizes, obtemos os termos das sequências mencionadas. Com o auxílio da álgebra matricial, demonstraremos conexões fascinantes entre os termos das sequências* (F_n) *e* (L_n)*, além de relações com o número de ouro. O minicurso será dividido em três aulas: (1) Fundamentos de álgebra matricial, (2) Introdução às sequências e algumas identidades, e (3) Demonstração de várias conexões usando álgebra matricial. Os interessados devem estar familiarizados com técnicas de demonstração, principalmente indução finita. Noções básicas sobre Teoria dos Números são desejáveis, mas não obrigatórias.*

Palavras-chave: *Números de Lucas, Números de Fibonacci, Álgebra Linear, Matrizes.*

1 Aula 01: Matrizes Quadradas de Ordem 2

1.1 Matrizes 2×2

Uma matriz quadrada de ordem 2 com entradas reais é basicamente uma tabela de números reais com duas linhas e duas colunas, denotada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

[1] Instituto Federal de São Paulo - IFSP
[2] Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP

onde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. De modo geral, se pode definir uma matriz com entradas reais tipo $m \times n$ (lê-se m por n) como uma tabela retangular de números reais, com m linhas e n colunas. No caso em que $m = n$, a matriz é dita quadrada de ordem n. Em nosso estudo, focaremos no caso em que $m = n = 2$, pois apenas este tipo de matriz nos será útil neste minicurso, mas, o leitor interessado em se aprofundar no estudo de matrizes gerais, pode consultar a obra didática [1]. O conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais será denotado neste texto como $M_2(\mathbb{R})$.

Dada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, definimos como diagonal principal da matriz A, o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i = j$. Podemos[3] definir como diagonal secundária de A, o conjunto dos elementos que não pertencem à diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

Definimos como traço de A, denotado por $tr(A)$, a soma dos elementos da diagonal principal, isto é, $tr(A) = a_{11} + a_{22}$.

Dizemos que duas matrizes $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$.

Considerando o corpo $\mathbb{R}$, podemos definir o produto de um escalar real por uma matriz como
$$\beta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix},$$
onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Também, podemos definir duas operações internas em $M_2(\mathbb{R})$: adição e produto entre matrizes. Dadas $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, definimos
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$
e
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Aqui podemos observar, com facilidade, que o produto entre matrizes não é comutativo. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

[3] O leitor deve ficar atento, pois essa definição só vale para matrizes quadradas de ordem 2.

e

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

dessa forma, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Obviamente existem exceções, mas, de forma geral, não podemos afirmar que o produto comuta.

Existe um elemento neutro multiplicativo com relação ao produto de matrizes em $M_2(\mathbb{R})$, chamado matriz identidade, a saber,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto significa que $A \cdot I = I \cdot A = A$, para qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$. Em relação à adição, o elemento neutro é chamado de matriz nula, a saber,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o que significa que $A + O = O + A = A$, para qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$.

1.2 A estrutura de $M_2(\mathbb{R})$

Com a adição entre matrizes e o produto por escalar, o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ forma um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, ou seja, valem as propriedades:

1. $A + B = B + A, \quad \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$
3. $\exists! O \in M_2(\mathbb{R}) \mid A + O = A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$
4. $\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \exists! -A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A + (-A) = O$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
8. $1A = A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

Considerando as 4 primeiras propriedades apresentadas anteriormente, podemos afirmar que o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ é um grupo abeliano com relação à operação aditiva. Além disso, complementando com o produto entre matrizes apresentado, temos que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um anel, não comutativo, com unidade. Isso ocorre porque também valem:

(a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

(b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

(c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

(d) $\exists! I \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot I = I \cdot A = A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

Um ponto interessante a ser observado sobre o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ é que, com as operações usuais apresentadas, ele não possui estrutura de corpo. Além da não comutatividade em relação ao produto de matrizes, existem mais dois impeditivos:

(i) $M_2(\mathbb{R})$ possui divisores de zero. Isto significa dizer que é possível encontrar duas matrizes não nulas $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tais que seu produto resulte na matriz nula, isto é, $A \cdot B = O$.

Por exemplo, considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, obviamente nenhuma delas é nula. Todavia, perceba que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

(ii) Nem toda matriz de $M_2(\mathbb{R})$ é simetrizável (inversível) com relação ao produto de matrizes.

Dizemos que uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é inversível, quando existe outra matriz em $M_2(\mathbb{R})$, denotada por A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. As matrizes A e A^{-1} são ditas inversas uma da outra.

Vejamos um exemplo de matriz que não é inversível. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Para que A seja inversível, teria que existir uma outra matriz em $M_2(\mathbb{R})$, digamos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I$. Porém, nesse caso, note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a+c=1 \\ a+c=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b+d=0 \\ b+d=1 \end{cases}.$$

Como os sistemas não possuem solução, segue que a inversa de A não existe, isto é, A não é inversível

O leitor interessado em conhecer mais sobre tópicos em estruturas algébricas como grupos, anéis e corpos, pode conferir o livro [2]. Seguindo o nosso conteúdo, existe uma forma prática para verificar se uma matriz 2×2 é inversível, e, em caso afirmativo, calcular rapidamente a matriz inversa, como veremos na seção a seguir.

1.3 Matrizes inversíveis e determinante

Vamos supor que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ seja inversível. Determinemos os valores de x, y, z e t na matriz inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. Sabemos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo assim, temos

$$\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Da equação (1), segue o sistema

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}, \tag{2}$$

o qual, multiplicando a primeira equação por c e a segunda por a, é equivalente à

$$\begin{cases} acx+bcz=c \\ acx+adz=0 \end{cases}.$$

Subtraindo as equações, chegamos em $(ad-bc)z=-c$. Existe solução única deste sistema se, e somente se, $ad-bc \neq 0$. Assim,

$$z = \frac{-c}{ad-bc}.$$

Substituindo o valor de z na segunda equação do sistema (2) e isolando o x, temos

$$x = \frac{d}{ad-bc}.$$

Da equação (1), também segue o sistema

$$\begin{cases} ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}, \tag{3}$$

o qual, multiplicando a primeira equação por c e a segunda por a, é equivalente à

$$\begin{cases} acy+bct=0 \\ acy+adt=a \end{cases}.$$

Subtraindo as equações, chegamos em $(ad-bc)t=a$. Como já estamos supondo $ad-bc \neq 0$, ocorre

$$t = \frac{a}{ad-bc}.$$

Substituindo o valor de t na primeira equação do sistema (3) e isolando y, temos

$$y = \frac{-b}{ad-bc}.$$

Desse modo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Com a dedução anterior, acabamos de estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Uma matriz* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *é inversível se, e somente se,* $ad - bc \neq 0$*. Nesse caso, calcula-se a inversa fazendo* $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

O número real $ad - bc$, que figura no Teorema 1.1, é chamado de determinante da matriz A. Para uma matriz quadrada de ordem qualquer, uma bela e acessível discussão sobre a existência e a forma do determinante pode ser conferida em [3]. Mas, observe que, no caso das matrizes em $M_2(\mathbb{R})$, ele é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz menos o produto dos elementos da diagonal secundária. Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$, denotamos o determinante de A como $\det(A)$. No caso em que a matriz está na forma explícita, entre colchetes, para denotar o determinante trocamos os colchetes por barras, como segue:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Segue, portanto, que uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Em caso afirmativo, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

No caso da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, apresentada anteriormente, temos que seu determinante é igual à zero, o que confirma o que discutimos sobre ela não ser inversível. Agora, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, possui como determinante o número -1, o que nos indica que ela é inversível e possui como inversa a matriz $\dfrac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Como confirmação, note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma série de propriedades sobre determinantes pode ser demonstrada. O leitor pode encontrar uma lista interessante delas no apêndice do livro [4]. Provaremos aqui, para matrizes quadradas de ordem 2, uma importante propriedade no teorema seguinte.

Teorema 1.2. *Dadas* $A, B \in M_2(\mathbb{R})$*, então* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Demonstração. Considere $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Assim,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\det(A\cdot B) &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})\\ &= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+\cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}}\\ &\quad -\cancel{a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}}-a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}-a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}-\cancel{a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}}\\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}-a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}-a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}+a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}\\ &= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

□

Exercícios para praticar

1. Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$, prove que:
   (a) $\det(\beta A) = \beta^2 \det(A)$, onde $\beta \in \mathbb{R}$;
   (b) Se A for inversível, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
2. Se A e B forem matrizes em $M_2(\mathbb{R})$ inversíveis, então o produto $A \cdot B$ também o é. Além disso, $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

1.4 Potenciação e semelhança de matrizes

Ao se multiplicar uma matriz por ela mesma, é comum utilizar a notação de potenciação da seguinte forma: $A^0 = I$, $A^1 = A$ e $A^{n+1} = A^n \cdot A$, onde A é uma matriz não nula qualquer em $M_2(\mathbb{R})$. Se A for inversível, também podemos estabelecer $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que duas matrizes $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ são semelhantes, se existir uma matriz $S \in M_2(\mathbb{R})$ inversível, tal que $A = S\cdot B\cdot S^{-1}$. Nomearemos a matriz S de matriz de similaridade entre A e B.

Outra observação útil que podemos fazer é que se duas matrizes A e B são semelhantes, e uma delas for inversível, a outra também será. Suponha que $A = S\cdot B\cdot S^{-1}$ e que existe B^{-1}. Sendo assim, existe a matriz oriunda do produto $S\cdot B^{-1}\cdot S^{-1}$ e, como $(S\cdot B\cdot S^{-1})^{-1} = (S^{-1})^{-1}\cdot B^{-1}\cdot S^{-1} = S\cdot B^{-1}\cdot S^{-1}$, segue que $A^{-1} = (S\cdot B\cdot S^{-1})^{-1} = S\cdot B^{-1}\cdot S^{-1}$ existe.

Envolvendo potenciação e semelhança de matrizes, estabelecemos o seguinte resultado: se A é semelhante à B, então A^n é semelhante à B^n, para todo n inteiro. Adicionalmente, a matriz de similaridade entre A e B é a mesma entre A^n e B^n.

Teorema 1.3. *Considere $A, B, S \in M_2(\mathbb{R})$, onde S é inversível. Se $A = S\cdot B\cdot S^{-1}$, então $A^n = S\cdot B^n\cdot S^{-1}$, para todo n inteiro.*

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial. Provaremos usando indução finita para n inteiro positivo.

(i) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois temos que $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$ (por hipótese) e também

$$\begin{aligned} A = S \cdot B \cdot S^{-1} &\implies A \cdot A = S \cdot B \cdot S^{-1} \cdot A \\ &\implies A^2 = S \cdot B \cdot S^{-1} \cdot (S \cdot B \cdot S^{-1}) \\ &\implies A^2 = S \cdot B \cdot (S^{-1} \cdot S) \cdot B \cdot S^{-1} \\ &\implies A^2 = S \cdot B^2 \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

(ii) Suponha que o resultado é válido para $n = k$, isto é, $A^k = S \cdot B^k \cdot S^{-1}$.

(iii) Provemos para $n = k + 1$. Partindo da hipótese de indução (ii), temos:

$$\begin{aligned} A^k = S \cdot B^k \cdot S^{-1} &\implies A^k \cdot A = S \cdot B^k \cdot S^{-1} \cdot A \\ &\implies A^{k+1} = S \cdot B^k \cdot S^{-1} \cdot (S \cdot B \cdot S^{-1}) \\ &\implies A^{k+1} = S \cdot B^k \cdot (S^{-1} \cdot S) \cdot B \cdot S^{-1} \\ &\implies A^{k+1} = S \cdot B^{k+1} \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii), segue o resultado para n positivo. Para n inteiro negativo, basta notar que $n = -m$, onde $m \in \mathbb{N}$. Neste caso, sabemos, pela indução anterior, que $A^m = S \cdot B^m \cdot S^{-1}$ e, então,

$$A^n = A^{-m} = (A^m)^{-1} = (S \cdot B^m \cdot S^{-1})^{-1} = (S^{-1})^{-1} \cdot B^{-m} \cdot S^{-1} = S \cdot B^n \cdot S^{-1},$$

isto é,

$$A^n = S \cdot B^n \cdot S^{-1}.$$

□

Exercícios para praticar

1. Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\det(A^n) = (\det(A))^n$.
2. Dadas $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ semelhantes, prove que:
   (a) $\det(A) = \det(B)$;
   (b) $tr(A) = tr(B)$.
3. Mostre que a semelhança entre matrizes em $M_2(\mathbb{R})$ é uma relação de equivalência, isto é, neste contexto:
   (a) Uma matriz é sempre semelhante com ela mesma;
   (b) Se a matriz A é semelhante à B, então a matriz B é semelhante à A;
   (c) Se A é semelhante à matriz B e B é semelhante à matriz C, então A é semelhante à C.

1.5 Polinômio e equação característica

Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$, o polinômio na variável x resultante da operação $\det(A - xI)$ é chamado de polinômio característico da matriz A, denotado neste texto por $p_A(x)$. Por sua vez, a equação $\det(A - xI) = 0$ recebe o nome de equação característica de A. As raízes da equação característica são chamadas de autovalores da matriz em questão.

Considerando $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, observe que

$$\begin{aligned} p_A(x) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - x)(a_{22} - x) - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{11}x - a_{22}x + x^2 - a_{12}a_{21} \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = x^2 - tr(A)x + \det(A), \end{aligned}$$

isto é, o polinômio característico de A é dado por

$$p_A(x) = x^2 - tr(A)x + \det(A).$$

Assim, a respectiva equação característica é $x^2 - tr(A)x + \det(A) = 0$.

Um dos resultados mais importantes referente a equações características de matrizes é um teorema produzido pelos matemáticos A. Cayley (inglês) e W. R. Hamilton (irlandês) no século 19 [5]. Para entender o teorema, antes precisamos explicar o que significa dizer que uma matriz verifica uma equação. Focando em equações do segundo grau (pois são as que aparecerão no contexto em que estamos), dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, dizemos que uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ verifica tal equação quando $aA^2 + bA + cI = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Uma vez estabelecido isto, segue o resultado comentado.

Teorema 1.4 (Cayley-Hamilton)**.** *Toda matriz de $M_2(\mathbb{R})$ verifica a sua própria equação característica.*

Demonstração. Dada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos $p_A(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - (a_{11} + a_{22})\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $A \in M_2(\mathbb{R})$ verifica a sua própria equação característica. □

Agora demonstraremos um resultado que garante que matrizes semelhantes possuem polinômios característicos iguais.

Teorema 1.5. *Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ são semelhantes, então $p_A(x) = p_B(x)$.*

Demonstração. Temos que $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$, para alguma matriz S inversível em $M_2(\mathbb{R})$. Assim,

$$\begin{aligned} A - xI = S \cdot B \cdot S^{-1} - xI \implies S^{-1} \cdot (A - xI) &= B \cdot S^{-1} - S^{-1} \cdot (xI) \\ S^{-1} \cdot (A - xI) \cdot S &= B - S^{-1} \cdot (xI) \cdot S. \end{aligned}$$

Porém, note que $S^{-1} \cdot (xI) \cdot S = xI$, ou seja,

$$S^{-1} \cdot (A - xI) \cdot S = B - xI.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} p_B(x) &= \det(B - xI) = \det(S^{-1} \cdot (A - xI) \cdot S) \\ &= \frac{1}{\det(S)} \det(A - xI) \det(S) = \det(A - xI) = p_A(x). \end{aligned}$$

□

Observe que o Teorema 1.5 adicionalmente garante que os autovalores de matrizes semelhantes também são os mesmos.

1.6 Diagonalização

Dizemos que uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é diagonalizável quando ela é semelhante a uma matriz diagonal $D \in M_2(\mathbb{R})$. Nesta seção, provaremos que toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que possua dois autovalores distintos é diagonalizável. Encontraremos, também, uma forma explícita para a matriz de similaridade. Para isso, introduziremos o conceito de autovetores.

Considere $A \in M_2(\mathbb{R})$ e λ um autovalor de A. Um autovetor de A associado à λ é uma matriz coluna, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, onde a e b não são simultaneamente nulos, tal que $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$.

O produto $\lambda \boldsymbol{v}$ é definido como $\lambda \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$. Por sua vez, considerando $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A \cdot \boldsymbol{v}$ é definido como $A \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_{11}a + a_{12}b \\ a_{21}a + a_{22}b \end{bmatrix}$.

Lema 1.1. *Sejam $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ autovetores de uma matriz A, associados à λ_1 e λ_2, respectivamente. Se $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{w}$, então $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Demonstração. Como $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}$ e $A \cdot \boldsymbol{w} = \lambda_2 \boldsymbol{w}$,

$$\lambda_1 \boldsymbol{v} = A \cdot (\alpha \boldsymbol{w}) = \alpha(A \cdot \boldsymbol{w}) = \alpha(\lambda_2 \boldsymbol{w}) = \lambda_2(\alpha \boldsymbol{w}) = \lambda_2 \boldsymbol{v}.$$

Assim,

$$\lambda_1 \boldsymbol{v} = \lambda_2 \boldsymbol{v} \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Uma vez que $\boldsymbol{v}$ não possui todas as entradas nulas, segue que $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Lema 1.2. *Sejam* $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ *autovetores de uma matriz* A*, associados à* λ_1 *e* λ_2*, respectivamente. Considere a matriz* $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$*, então* $A \cdot P = \begin{bmatrix} A \cdot \boldsymbol{v} & A \cdot \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$.

Demonstração. Denotando $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos

$$A \cdot P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 & a_{11}w_1 + a_{12}w_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 & a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$A \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix}$$

e

$$A \cdot \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A \cdot P = \begin{bmatrix} A \cdot \boldsymbol{v} & A \cdot \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$. □

Agora, temos as ferramentas para provar o seguinte resultado:

Teorema 1.6. *Seja* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *com 2 autovalores distintos,* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*, com autovetores* $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$*, respectivamente associados à* λ_1 *e* λ_2*. Então as matrizes* $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ *são tais que* $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Demonstração. Usando o Lema 1.2, como $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}$ e $A \cdot \boldsymbol{w} = \lambda_2 \boldsymbol{w}$, segue que

$$\begin{aligned} A \cdot P = A \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A \cdot \boldsymbol{v} & A \cdot \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{v} & \lambda_2 \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 w_1 \\ \lambda_1 v_2 & \lambda_2 w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P \cdot D. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1, a matriz P é inversível. Assim,

$$A \cdot P = P \cdot D \implies P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot P \cdot D \implies D = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

□

O Teorema 1.6 nos diz que se uma matriz 2×2 possuir 2 autovalores distintos, então ela será diagonalizável, uma vez que será semelhante a matriz diagonal, cuja a diagonal principal é formada pelos autovalores em questão. Nesse caso, a matriz de semelhança P, exibida no teorema, é chamada de matriz diagonalizadora.

Exercícios para praticar

1. Dado um autovalor λ de uma matriz A, mostre que se $\boldsymbol{v}$ for um autovetor associado à λ, então $\alpha\boldsymbol{v}$ também será.
2. Dados a e b não nulos e $n \in \mathbb{Z}$, prove que $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$.
3. Prove que os autovalores de uma matriz A^n são da forma λ^n, onde λ são autovalores de A.

Há muitos conceitos interessantes sobre matrizes quadradas que poderíamos explorar no caso específico de matrizes 2×2. No entanto, nosso objetivo neste momento é apenas fornecer os pré-requisitos necessários para conectar a teoria matricial com as sucessões de Lucas e de Fibonacci. Convidamos o leitor mais curioso, que deseja aprofundar seus conhecimentos sobre matrizes, a consultar a obra [3], por exemplo.

2 Aula 02: Números de Fibonacci e de Lucas

2.1 Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci foi um matemático do século XIII. Nasceu em Pisa, Itália, e por isso também era conhecido como Leonardo Pisano, ou Leonardo de Pisa. Era filho de um rico mercador e encarregado de negócios nas cidades de Veneza, Gênova e Pisa. Viveu parte de sua juventude no norte da África, onde aprendeu o idioma e a cultura árabe, viajou pelo Mediterrâneo durante grande parte de sua vida, conhecendo a Grécia, a Síria, o Egito, a Sicília, Constantinopla e o sul da França, aprendendo a matemática e os sistemas numéricos locais.

Em 1202, publicou, por volta dos 30 anos de idade, sua obra *Liber Abaci*, cujo principal feito foi introduzir os números indo-arábicos na Europa. Os algarismos divulgados no livro prevalecem até os dias atuais sobre os algarismos romanos utilizados na época.

Seu legado consiste em quatro livros: *Liber Abaci*, escrito em 1202, mas que somente se preservou na edição ampliada e revisada de 1228; *Practica Geometriae*, escrito em 1220, um compêndio com aplicações da álgebra à solução de problemas de geometria e trigonometria; *Flos*, escrito em 1225, onde soluciona desafios matemáticos escritos por João de Parma; *Liber Quadratorum*, escrito também em 1225, sobre equações diofantinas, em homenagem ao imperador Frederico II Hohenstaufen (1194-1250).

Entretanto, apesar das inúmeras contribuições matemáticas, Fibonacci é especialmente lembrado pela sequência de Fibonacci, que ficou assim conhecida, no século XIX, graças ao matemático francês Édouard Lucas [5]. A sequência de Fibonacci surgiu para auxiliar a resolução de um problema sobre o crescimento de uma suposta população de coelhos em *Liber Abaci*. Tal problema é como segue:

"Um homem coloca um casal de coelhos em um cercado a fim de que estes se reproduzam. Determine quantos casais de coelhos existirão neste cercado ao final de um ano sabendo que a natureza destes coelhos é tal que a cada mês cada casal produz um novo casal que se torna produtivo do segundo mês em diante".

Para resolução do problema fictício proposto por Fibonacci, suponha que os coelhos não morram no período em questão. Denote por n o número do mês, A um casal apto a reprodução, A_n o número de casais aptos a reprodução em n, B um casal inápito a reprodução, B_n o número de casais inápitos a reprodução em n e T_n o total de casais de coelho em n. A seguinte tabela exibe os casais de coelhos no avançar dos primeiros 5 meses:

n	**Casais**	A_n	B_n	T_n
1	A	1	0	1
2	AB	1	1	2
3	ABA	2	1	3
4	ABAAB	3	2	5
5	ABAABABA	5	3	8
6	ABAABABAABAAB	8	5	13

Tab. 1: Primeiros meses de casais de coelhos no problema de Fibonacci.

Note que A_{n+1}, na Tabela 1, é a soma de A_n e B_n, que também é igual ao total de casais de coelhos no n-ésimo mês T_n. E B_{n+1}, na mesma tabela, é igual a A_n, o número de coelhos aptos a reprodução do mês anterior. Logo, podemos expandir a tabela para solucionar o problema proposto por Fibonacci:

n	A_n	B_n	T_n
1	1	0	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	3	2	5
5	5	3	8
6	8	5	13
7	13	8	21
8	21	13	34
9	34	21	55
10	55	34	89
11	89	55	144
12	144	89	233
13	233	144	377

Tab. 2: Um ano de casais de coelhos no problema de Fibonacci.

Assim, observando a Tabela 2, decorrido 1 ano após o 1º mês do problema, haverá 377 casais de coelhos.

A sequência numérica que representa os números de casais de coelhos aptos a reprodução a cada mês, é conhecida como sequência de Fibonacci e é dada como segue:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

cada termo também é chamado de número de Fibonacci. O n-ésimo termo da sequência é denotado por F_n. Podemos formalmente definir a sucessão (F_n):

Definição 2.1. *A sequência de Fibonacci* (F_n) *é definida por* $F_1 = 1$*,* $F_2 = 1$ *e* $F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$*.*

2.2 Édouard Lucas

François Édouard Anatole Lucas foi um matemático do século XIX. Nasceu em Amiens, França. Trabalhou como professor de matemática do ensino médio e foi um matemático bastante ativo, tendo publicado mais de 180 artigos sobre as mais diversas áreas da matemática. Suas maiores contribuições ocorreram em Teoria dos Números. Estudou extensamente sequências de recorrência, foi o responsável por batizar a sequência de Fibonacci, e a relacionou diretamente com uma outra sucessão correlata, atualmente conhecida como sequência de Lucas.

Dois artigos de Lucas se destacam para nosso propósito: *Recherches Sur Plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise*, escrito em 1877, um copilado sobre suas várias descobertas sobre a sequência de Fibonacci; e *Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques*, escrito em 1878, texto sobre a teoria geral das sequências de recorrência de segunda ordem e suas principais propriedades. Também se destaca um livro: *Théorie des Nombres, Tome Premier*, escrito em 1891, onde relatou que observando a sequência de Fibonacci provou uma recíproca do pequeno teorema de Fermat e dela deduziu corolários sobre números primos com trinta dígitos, e ainda afirmou que "A teoria de sequências de recorrência é uma inesgotável mina que contém todas as propriedades dos números" [6]. Com essas pesquisas foi capaz de estabelecer um número primo de 39 dígitos, o maior número primo por 75 anos e ainda hoje o maior número primo encontrado sem auxílio computacional.

A sequência de Fibonacci é definida determinando os dois primeiros termos inteiros e respeitando a lei de recorrência. Muitas sequências diferentes podem ser determinadas variando os dois primeiros termos inteiros e mantendo a lei. Por exemplo, começando com 1 e 3, respectivamente, cria-se a sequência de Lucas. O n-ésimo termo da sequência é denotado por L_n e cada termo desta sequência é chamado de número de Lucas. Podemos formalmente definir a sucessão (L_n):

Definição 2.2. *A sequência de Lucas* (L_n) *é definida por* $L_1 = 1$*,* $L_2 = 3$ *e* $L_{n+2} = L_n + L_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$*.*

Dada de forma explícita por:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$$

Dentre as sequências que podem ser obtidas alterando-se os valores iniciais da sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas é a mais notável. Um dos motivos é que a sequência formada pelos números de Lucas possui uma fórmula de Binet mais simples que a dos números de Fibonacci. As fórmulas de Binet estão entre os resultados mais importantes e versáteis sobre os números de Fibonacci e de Lucas, pois relacionam seus termos, que são inteiros, com potências do número de ouro e de seu conjugado, que são irracionais.

2.3 Jacques Binet

Jacques Philippe Marie Binet foi um matemático, físico e astrônomo do século XIX. Nasceu em Rennes, França. Estudou na *École Polytechnique* em Paris, onde se tornou professor, trabalhando ao lado de notórios matemáticos como Joseph Fourier, Joseph-Louis Lagrange e, seu amigo próximo, Augustine Louis Cauchy. Seus estudos são de significante contribuição para teoria dos números, álgebra linear e mecânica celeste.

Dentre as muitas publicações, traremos destaque ao artigo *Mémoire Sur L'Intégration des Équations Linéaires Aux Différences Finies et Leur Application à La Théorie des Suites*, escrito em 1843, quando Binet formalizou e divulgou a fórmula que permite expressar os termos de sequências de recorrência em termos de potência de números irracionais. Apesar da fórmula ser historicamente atribuída à Binet, os resultados já eram conhecidos por Daniel Bernoulli, Leonard Euller e Abraham de Moivre.

Considere $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o irracional conhecido como número de ouro, e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, como o seu conjugado. Não é nosso objetivo neste minicurso explorar a natureza do número de ouro por si só, muito embora verificaremos como é grande a sua relação com a sucessão de Fibonacci de várias formas diferentes. Para o leitor que deseja se aprofundar um pouco mais sobre o número ϕ, recomendamos a leitura do livro [7]. Para nosso texto, as seguintes igualdades serão úteis em muitas demonstrações mais adiante:

$$\phi\phi_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\phi_2; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{-1} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{2(1+\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\phi; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\phi; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\phi_2^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1+\phi_2;\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\phi^2+\phi_2^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{12}{4} = 3;\end{aligned} \tag{9}$$

$$\phi-\phi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}} = \sqrt{5}. \tag{10}$$

Segue o Teorema de Binet, em sua versão para (F_n) e (L_n):

Teorema 2.1 (Binet)**.** *Para $n \in \mathbb{N}$, considerando $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,*

(a) o n-ésimo número de Fibonacci é dado por

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi-\phi_2};$$

(b) o n-ésimo número de Lucas é dado por

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n.$$

Demonstração. Vamos provar o teorema por indução:

(a) (i) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é válido, pois

$$\frac{\phi^1-\phi_2^1}{\phi-\phi_2} = \frac{\phi-\phi_2}{\phi-\phi_2} = 1 = F_1$$

e

$$\frac{\phi^2-\phi_2^2}{\phi-\phi_2} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{\cancel{4}\sqrt{5}}{\cancel{4}}}{\sqrt{5}} = 1 = F_2.$$

(ii) Assumimos verdadeiro para $n = k$ e $n = k+1$, ou seja,

$$F_k = \frac{\phi^k-\phi_2^k}{\phi-\phi_2}$$

e

$$F_{k+1} = \frac{\phi^{k+1}-\phi_2^{k+1}}{\phi-\phi_2}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= F_{k+1} + F_k \\ &= \frac{\phi^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi - \phi_2} + \frac{\phi^k - \phi_2^k}{\phi - \phi_2} \\ &= \frac{\phi^{k+1} - \phi_2^{k+1} + \phi^k - \phi_2^k}{\phi - \phi_2} \\ &= \frac{\phi^k \phi^1 + \phi^k - \phi_2^k \phi_2^1 - \phi_2^k}{\phi - \phi_2} \\ &= \frac{\phi^k(\phi + 1) - \phi_2^k(\phi_2 + 1)}{\phi - \phi_2}. \end{aligned}$$

Pelas equações (7) e (8), temos:

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= \frac{\phi^k \phi^2 - \phi_2^k \phi_2^2}{\phi - \phi_2} \\ &= \frac{\phi^{k+2} - \phi_2^{k+2}}{\phi - \phi_2}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii) provamos a igualdade para F_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) (i) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é válido, uma vez que

$$\phi^1 + \phi_2^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1 = L_1$$

e

$$\phi^2 + \phi_2^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3 = L_2.$$

(ii) Assumimos verdadeiro para $n = k$ e $n = k + 1$, ou seja,

$$L_k = \phi^k + \phi_2^k$$

e

$$L_{k+1} = \phi^{k+1} + \phi_2^{k+1}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} L_{k+2} &= L_{k+1} + L_k \\ &= \phi^{k+1} + \phi_2^{k+1} + \phi^k + \phi_2^k \\ &= \phi^k \phi^1 + \phi^k + \phi_2^k \phi_2^1 + \phi_2^k \\ &= \phi^k(\phi + 1) + \phi_2^k(\phi_2 + 1). \end{aligned}$$

Pelas equações (7) e (8), temos:

$$\begin{aligned} L_{k+2} &= \phi^k \phi^2 + \phi_2^k \phi_2^2 \\ &= \phi^{k+2} + \phi_2^{k+2}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii) provamos a igualdade para L_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

2.4 Índices não positivos

Podemos também expandir as sequências de Fibonacci e de Lucas para índices não positivos, supondo que a lei de recorrência continua válida. Para Fibonacci, podemos reescrever:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Assim, dados quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos, podemos encontrar o número de Fibonacci antecedente. Veja:

$$\begin{aligned}
&F_0 = F_2 - F_1 = 0;\\
&F_{-1} = F_1 - F_0 = 1;\\
&F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1;\\
&F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

sendo estes os valores encontrados para índices não positivos, respeitando a relação de recorrência original, fica estabelecida a sequência (F_n) para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A Tabela 3 exibe uma lista de alguns valores de F_n com índices inteiros:

n	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
F_n	...	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	...

Tab. 3: Números de Fibonacci F_n, com $n \in \mathbb{Z}$.

É possível notar empiricamente que, dado n natural, $F_{-n} = \begin{cases} -F_n, & \text{se } n \text{ par} \\ F_n, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$, ou seja, $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$. Dessa forma, somos motivados a completar a Definição 2.1, considerando índices não positivos, com $F_0 = 0$ e $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Comprovaremos, a seguir, que a fórmula de Binet para os números de Fibonacci continua valendo, mesmo com essa definição mais completa, agora englobando índices inteiros não positivos. De fato,

- Para $n = 0$:
$$\frac{\phi^0 - \phi_2^0}{\phi - \phi_2} = \frac{1-1}{\phi - \phi_2} = 0 = F_0.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$, para $-n$:
$$\begin{aligned}
\frac{\phi^{-n} - \phi_2^{-n}}{\phi - \phi_2} &= \frac{\frac{1}{\phi^n} - \frac{1}{\phi_2^n}}{\phi - \phi_2} = \frac{\frac{\phi_2^n - \phi^n}{(\phi\phi_2)^n}}{\phi - \phi_2}\\
&= (-1)^n\left(\frac{\phi_2^n - \phi^n}{\phi - \phi_2}\right) = (-1)^{n+1}\left(\frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}\right) = (-1)^{n+1}F_n = F_{-n}.
\end{aligned}$$

Com os índices definidos para qualquer inteiro, podemos relacionar os números de Fibonacci buscando fatores comuns, apenas atentos a lei de recorrência.

Por exemplo, tome a soma $F_{n+1} + F_{n-1}$, podemos reescrever F_{n+1} como a soma de seus antecessores

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n,$$

tendo agora um termo comum entre F_{n+1} e F_{n-1}, temos

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_{n-1} &= (F_{n-1} + F_n) + F_{n-1} \\ &= F_n + 2F_{n-1}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos expandir a sequência de Lucas para índices não positivos, reescrevendo a lei de recorrência como

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}.$$

Assim, dados quaisquer dois números de Lucas consecutivos, podemos encontrar o número de Lucas antecedente.

$$\begin{aligned} &L_0 = L_2 - L_1 = 2; \\ &L_{-1} = L_1 - L_0 = -1; \\ &L_{-2} = L_0 - L_{-1} = 3; \\ &L_{-3} = L_{-1} - L_{-2} = -4; \\ &\vdots \end{aligned}$$

sendo estes os valores encontrados para índices não positivos, respeitando a relação de recorrência original, fica estabelecido L_n para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Na Tabela 4, segue uma lista de alguns valores de L_n com índices inteiros:

n	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
L_n	...	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	...

Tab. 4: Números de Lucas L_n, com $n \in \mathbb{Z}$.

É possível notar empiricamente que, dado n natural, $L_{-n} = \begin{cases} L_n, & \text{se } n \text{ par} \\ -L_n, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$, ou seja, $L_{-n} = (-1)^n L_n$. Utilizaremos tais observações para completar a Definição 2.2, da mesma maneira como fizemos com os números de Fibonacci, ou seja, definimos $L_0 = 2$ e $L_{-n} = (-1)^n L_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Verificaremos agora que a fórmula de Binet para os números de Lucas também permanece funcionando com os índices inteiros não positivos. De fato,

- Para $n = 0$:
$$\phi^0 + \phi_2^0 = 1 + 1 = 2 = L_0.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$, para $-n$:
$$\phi^{-n} + \phi_2^{-n} = \frac{1}{\phi^n} + \frac{1}{\phi_2^n} = \frac{\phi_2^n + \phi^n}{(\phi\phi_2)^n} = (-1)^n(\phi^n + \phi_2^n) = (-1)^n L_n = L_{-n}.$$

Dessa forma, conseguimos estabelecer o Teorema de Binet para todo n inteiro.

Teorema 2.2 (Binet)**.** *Para $n \in \mathbb{Z}$, considerando $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,*

(a) o n-ésimo número de Fibonacci é dado por

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2};$$

(b) o n-ésimo número de Lucas é dado por

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n.$$

2.5 Identidades

Giovanni Domenico Cassini foi um astrônomo, engenheiro e matemático do final do século XVII, nascido em Perinaldo, Itália. Foi professor de Astronomia na Universidade de Bolonha, Itália, e diretor do Observatório de Paris.

Dois artigos famosos: *Lettre de M. Cassini, à M. Hevelius sur la Découverte de deux Nouvelles Planètes autour de Saturne*, escrito em 1676 e publicado na revista Journal des Sçavans, divulgou a descoberta de quatro satélites que orbitam Saturno e a faixa escura que separa esses anéis, que é chamada atualmente de divisão de Cassini, em sua homenagem; e *De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii*, escrito em 1680, Cassini investigou as propriedades dos números de Fibonacci e derivou várias identidades, incluindo a que atualmente é conhecida como identidade de Cassini, a qual demonstraremos a seguir.

Propriedade 2.1 (Identidade de Cassini)**.** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \; n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Considerando F_{n-1}, F_{n+1} e F_n conforme o Teorema 2.2, temos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi_2^{n+1}}{\phi - \phi_2}\right)\left(\frac{\phi^{n-1} - \phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2}\right) - \left(\frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}\right)^2 \\
&= \frac{\phi^{n+1}\phi^{n-1} - \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} - \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + \phi_2^{n+1}\phi_2^{n-1}}{(\phi - \phi_2)^2} - \frac{\phi^{2n} - 2\phi^n\phi_2^n + \phi_2^{2n}}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{\cancel{\phi^{2n}} - \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} - \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + \cancel{\phi_2^{2n}} - \cancel{\phi^{2n}} + 2\phi^n\phi_2^n - \cancel{\phi_2^{2n}}}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{-\phi^{n+1}\phi_2^{n-1} - \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + 2\phi^n\phi_2^n}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{-\phi^n\phi^1\phi_2^n\phi_2^{-1} - \phi_2^n\phi_2^1\phi^n\phi^{-1} + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{(\phi\phi_2)^n(-\phi\phi_2^{-1} - \phi^{-1}\phi_2) + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2}.
\end{aligned}$$

Pelas equações (5) e (6), temos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \frac{(\phi\phi_2)^n(-\phi(-\phi) - \phi_2(-\phi_2)) + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{(\phi\phi_2)^n(\phi^2 + \phi_2^2) + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2}.
\end{aligned}$$

Pelas equações (9) e (10), temos:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \frac{3(\phi\phi_2)^n + 2(\phi\phi_2)^n}{5} = \frac{\cancel{5}(\phi\phi_2)^n}{\cancel{5}} = (\phi\phi_2)^n.$$

Pela equação (4), concluímos:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

□

Assim podemos demonstrar outras identidades relacionadas.

Propriedade 2.2. $(F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2,\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Usando a Propriedade 2.1, temos:

$$\begin{aligned}
(F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4(-1)^n &= (F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) \\
&= F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} + F_{n+1}^2 - 4F_{n+1}F_{n-1} + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_{n-1} + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}F_{n-1} + F_{n+1}F_{n+1} - 2F_{n-1}F_{n+1} + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}(F_{n-1} - F_{n+1}) + F_{n+1}(F_{n+1} - F_{n-1}) + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}(F_{n-1} - (F_{n-1} + F_n)) + F_{n+1}((F_{n-1} + F_n) - F_{n-1}) + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}(-F_n) + F_{n+1}F_n + 4F_n^2 \\
&= F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) + 4F_n^2 \\
&= F_n((F_{n-1} + F_n) - F_{n-1}) + 4F_n^2 \\
&= F_nF_n + 4F_n^2 \\
&= F_n^2 + 4F_n^2 \\
&= 5F_n^2.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Propriedade 2.3. $L_{n+1}L_{n-1} - L^n = -5(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Considerando L_{n-1}, L_{n+1} e L_n conforme o Teorema 2.2, temos:

$$\begin{aligned}
L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 &= (\phi^{n+1} + \phi_2^{n+1})(\phi^{n-1} + \phi_2^{n-1}) - (\phi^n + \phi_2^n)^2 \\
&= \phi^{n+1}\phi^{n-1} + \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} + \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + \phi_2^{n+1}\phi_2^{n-1} - (\phi^{2n} + 2\phi^n\phi_2^n + \phi_2^{2n}) \\
&= \cancel{\phi^{2n}} + \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} + \phi^{n-1}\phi_2^{n+1} + \cancel{\phi_2^{2n}} - \cancel{\phi^{2n}} - 2\phi^n\phi_2^n - \cancel{\phi_2^{2n}} \\
&= \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} + \phi^{n-1}\phi_2^{n+1} - 2\phi^n\phi_2^n \\
&= \phi^n\phi^1\phi_2^n\phi_2^{-1} + \phi^n\phi^{-1}\phi_2^n\phi_2^1 - 2(\phi\phi_2)^n \\
&= \phi^n\phi_2^n(\phi\phi_2^{-1} + \phi^{-1}\phi_2) - 2(\phi\phi_2)^n.
\end{aligned}$$

Pelas equações (5) e (6), temos:

$$\begin{aligned}
L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 &= \phi^n\phi_2^n(\phi(-\phi) + \phi_2(-\phi_2)) - 2(\phi\phi_2)^n \\
&= (\phi\phi_2)^n(-\phi^2 - \phi_2^2) - 2(\phi\phi_2)^n \\
&= -(\phi\phi_2)^n(\phi^2 + \phi_2^2) - 2(\phi\phi_2)^n.
\end{aligned}$$

Pela equação (9), temos:

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -3(\phi\phi_2)^n - 2(\phi\phi_2)^n = -5(\phi\phi_2)^n.$$

Pela equação (4), temos:

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n.$$

$\square$

A identidade acima é uma versão da identidade de Cassini para números de Lucas, e foi demonstrada pelo próprio Édouard Lucas em seu livro *Théorie des Nombres, Tome Premier*.

Exercícios para praticar

1. Dado $n \in \mathbb{Z}$, prove as seguites identidades usando indução ou o Teorema de Binet:

   (a) $\phi^n = \phi F_n + F_{n-1}$;

   (b) $\phi_2^n = \phi_2 F_n + F_{n-1}$;

   (c) $F_{2n} = F_n L_n$;

   (d) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$;

   (e) $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$;

   (f) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$;

   (g) $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$;

   (h) $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$;

   (i) $L_{4n} + 2 = L_{2n}^2$;

   (j) $L_{4n} - 2 = 5F_{2n}^2$;

   (k) $L_{4n+2} + 2 = 5F_{2n+1}^2$;

   (l) $L_{4n+2} - 2 = L_{2n+1}^2$;

   (m) $2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2$;

   (n) $F_n F_{n+1} F_{n+2} = F_{n+1}^3 + (-1)^n F_{n+1}$

   (o) $F_n L_{n+k} - F_{n+k} L_n = 2(-1)^{n+1} F_k$;

   (p $F_k F_{k+1} F_{k+3} F_{k+4} = F_{k+2}^4 - 1$;

   (q) $L_{2n} L_{2n+2} - 1 = 5F_{2n+1}^2$;

   (r) $L_n L_{n+1} - L_{2n+1} = (-1)^n$;

   (s) $5F_n = L_{n+2} - L_{n-2}$;

   (t) $L_n^2 + 4L_{n-1} L_{n+1} = 25F_n^2$;

   (u) $L_{n-1} L_{n+1} + F_{n-1} F_{n+1} = 6F_n^2$;

   (v) $F_n^2 + 4F_{n-1} F_{n+1} = L_n^2$;

   (x) $F_{n+1}^2 - 4F_n F_{n-1} = F_{n-2}^2$;

   (y) $L_n F_{m-n} + F_n L_{m-n} = 2F_m$;

   (z) $F_{2m}^2 = 5F_m^4 + 4(-1)^m F_m^2$.

3 Aula 03: Conexões entre Matrizes e Números de Fibonacci e de Lucas

3.1 Q_F-matriz de Fibonacci

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pode se tornar uma excelente ferramenta para estudar números de Fibonacci. Isso ocorre pois, ao calcularmos suas potências, suas entradas passam a ser preenchidas por estes números. Neste texto, denotaremos essa matriz por Q_F e a nomearemos de Q_F-matriz de Fibonacci. Observe que:

$$Q_F^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix};$$

$$Q_F^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix};$$

$$Q_F^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix};$$

$$Q_F^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix};$$

de forma geral, é possível estabelecer que, para n inteiro, vale

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Com base neste resultado podemos estabelecer várias identidades envolvendo números de Fibonacci, através da manipulação da matriz Q_F. Iniciaremos sua demonstração no lema a seguir e a completaremos no Teorema 3.1.

Lema 3.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de Q_F é dada por:*

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Provaremos via indução finita.

(i) Para $n = 1$, o resultado é válido, pois

$$Q_F^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, isto é,

$$Q_F^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k+1$. De fato,

$$Q_F^{k+1} = Q_F^k Q_F = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}.$$

Por (i), (ii) e (iii), provamos o lema. □

O Lema 3.1, nos permite demonstrar, de forma bastante simples, a identidade de Cassini para n natural, através do cálculo de $\det(Q_F^n)$. Vejamos:

Propriedade 3.1 (Identidade de Cassini)**.** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Demonstração. Basta observar que $\det(Q_F^n) = (\det(Q_F))^n$. Sendo assim, do Lema 3.1:

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n, \tag{11}$$

o que implica

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

□

Agora, podemos generalizar o Lema 3.1 para n inteiro.

Teorema 3.1. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a n-ésima potência de Q_F é dada por:*

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, uma vez que

$$Q_F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{0+1} & F_0 \\ F_0 & F_{0-1} \end{bmatrix}.$$

O caso em que n é inteiro positivo está provado no Lema 3.1. Analisemos quando n é inteiro negativo. Nesse caso, $n = -k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Então, $Q_F^n = Q_F^{-k} = (Q_F^k)^{-1}$ e, pelo Lema 3.1, segue que

$$Q_F^n = (Q_F^k)^{-1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Calculando a inversa usando o Teorema 1.1 e aplicando a identidade de Cassini (Propriedade 3.1), temos

$$\begin{aligned} Q_F^n &= \frac{1}{F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2} \begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{(-1)^k} \begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^k \begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k F_{k-1} & (-1)^{k+1} F_k \\ (-1)^{k+1} F_k & (-1)^k F_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Mas, perceba que,

$$F_n = F_{-k} = (-1)^{k+1} F_k,$$

$$F_{n+1} = F_{-k+1} = F_{-(k-1)} = (-1)^{(k-1)+1}F_{k-1} = (-1)^k F_{k-1}$$

e

$$F_{n-1} = F_{-k-1} = F_{-(k+1)} = (-1)^{(k+1)+1}F_{k+1} = (-1)^{k+2}F_{k+1} = (-1)^k F_{k+1}.$$

Dessa forma, da equação (12), temos

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

□

Repetindo o mesmo raciocínio realizado na demonstração da propriedade 3.1, mas usando o Teorema 3.1 como base, não existe dificuldade em generalizar a identidade de Cassini para todo n inteiro, como enunciada a seguir.

Propriedade 3.2 (Identidade de Cassini)**.** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$

A seguir, vamos exemplificar como podemos obter identidades envolvendo os números de Fibonacci usando operações com a matriz Q_F.

Propriedade 3.3. *Considerando $m, n \in \mathbb{Z}$, são verdadeiras as identidades:*

(a) $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$;

(b) $F_{m-n} = (-1)^n(F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n)$.

Demonstração. (a) Para demonstrar a primeira identidade, inicialmente observe que $Q_F^{m+n} = Q_F^m \cdot Q_F^n$. Isto posto, do Teorema 3.1,

$$\begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da equação (13), segue que

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

(b) Agora, observe que $Q_F^{m-n} = Q_F^m \cdot (Q_F^n)^{-1}$. Todavia,

$$(Q_F^n)^{-1} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-1)^n}\begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, do Teorema 3.1,

$$\begin{bmatrix} F_{m-n+1} & F_{m-n} \\ F_{m-n} & F_{m-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot (-1)^n \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Realizando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} F_{m-n+1} & F_{m-n} \\ F_{m-n} & F_{m-n-1} \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n-1} - F_mF_n & F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n \\ F_mF_{n-1} - F_{m-1}F_n & F_{m-1}F_{n+1} - F_mF_n \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da equação (14), segue que

$$F_{m-n} = (-1)^n(F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n).$$

□

Exercícios para praticar

1. Formalize a demonstração da Propriedade 3.2, seguindo as sugestões dadas nesta seção.

3.2 Q_L-matriz de Lucas

Por sua vez, para estudar a sequência de Lucas de forma similar a que fizemos com a de Fibonacci, podemos usar a Q_L-matriz de Lucas, definida como $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Faremos isso de forma semelhante, mas complementar, ao estudo apresentado em [8].

Verificaremos que

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

para todo n inteiro. Iniciaremos este processo com o lema a seguir.

Lema 3.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de Q_L é dada por:*

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \textit{se } n \textit{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. Vamos provar o lema por indução.

(I) Supondo n par:

(i) Para $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois

$$5^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9+1 & 3+2 \\ 3+2 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = Q_L^2.$$

(ii) Assumimos que seja verdadeiro para $n = k$, ou seja,

$$Q_L^k = 5^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} Q_L^{k+2} &= Q_L^k \cdot Q_L^2 \\ &= 5^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \cdot 5^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+2}{2}} \begin{bmatrix} 2F_{k+1} + F_k & F_{k+1} + F_k \\ 2F_k + F_{k-1} & F_k + F_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+2}{2}} \begin{bmatrix} F_{k+3} & F_{k+2} \\ F_{k+2} & F_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O que prova a igualdade para n par.

(II) Supondo n ímpar:

(i) Para $n = 1$, o lema é válido, uma vez que

$$5^{\frac{1-1}{2}} \begin{bmatrix} L_2 & L_1 \\ L_1 & L_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = Q_L^1.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, isto é,

$$Q_L^k = 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} Q_L^{k+2} &= Q_L^k \cdot Q_L^2 \\ &= 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{bmatrix} \cdot 5^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+1}{2}} \begin{bmatrix} 2L_{k+1} + L_k & L_{k+1} + L_k \\ 2L_k + L_{k-1} & L_k + L_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+3} & L_{k+2} \\ L_{k+2} & L_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O que prova a igualdade para n ímpar.

$\square$

O leitor deve ter notado que a n-ésima potência da matriz Q_F produz $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$, mas a matriz $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$ não é produzida pela n-ésima potência de Q_L. Nesse sentido, fica o questionamento: como obter $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$ a partir de Q_L? Iniciemos a nossa exploração.

(i) Primeiramente, considere n ímpar. Uma vez que $Q_L^n = Q_L \cdot Q_L^{n-1}$, pelo Lema 3.2, temos

$$\cancel{5^{\frac{n-1}{2}}}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{5^{\frac{n-1}{2}}}\begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Agora, considere n par. Como $Q_L^{n+1} = Q_L \cdot Q_L^n$, pelo Lema 3.2, temos

$$\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot Q_F^n$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot Q_F^{n-1} \cdot Q_F.$$

Multiplicando por Q_F^{-1}, pela direita, os dois lados da igualdade anterior, segue

$$\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot Q_F^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_{n+2} - L_{n+1} \\ L_n & L_{n+1} - L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & (L_n + \cancel{L_{n+1}}) - \cancel{L_{n+1}} \\ L_n & (L_{n-1} + \cancel{L_n}) - \cancel{L_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Por (i) e (ii), acabamos de estabelecer a seguinte propriedade:

Propriedade 3.4.

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Note que a Propriedade 3.4, *a priori*, é válida apenas para n natural. Todavia, será possível expandi-la para todo n inteiro mais adiante.

Com base na Propriedade 3.4, pode ser facilmente demonstrado, a partir do uso do determinante, uma identidade conhecida como a correspondente à de Cassini, mas para números de Lucas.

Propriedade 3.5. $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n, \ n \in \mathbb{N}.$

Demonstração. Utilizando a Propriedade 3.4,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} &= \det(Q_L \cdot Q_F^{n-1}) = \det(Q_L \cdot Q_F^n \cdot Q_F^{-1}) \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Pela identidade de Cassini (Propriedade 3.2), temos:

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^n(-1) = -5(-1)^n.$$

□

Com essas informações, podemos generalizar o Lema 3.2 para que n seja qualquer número inteiro.

Teorema 3.2. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a n-ésima potência de Q_L é dada por:*

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \textit{se } n \textit{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. O caso em que n é inteiro positivo está provado no Lema 3.1. Analisemos quando n é inteiro negativo. Nesse caso, $n = -k$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $Q_L^n = Q_L^{-k} = (Q_L^k)^{-1}$.

(I) Considere k par, ou seja, n par.

Pelo Teorema 1.1 e a Propriedade 3.2, temos

$$\begin{aligned} Q_L^n = (Q_L^k)^{-1} &= \begin{bmatrix} 5^{\frac{k}{2}} F_{k+1} & 5^{\frac{k}{2}} F_k \\ 5^{\frac{k}{2}} F_k & 5^{\frac{k}{2}} F_{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5^{2\frac{k}{2}}(-1)^k} \begin{bmatrix} 5^{\frac{k}{2}} F_{k-1} & -5^{\frac{k}{2}} F_k \\ -5^{\frac{k}{2}} F_k & 5^{\frac{k}{2}} F_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{-k}(-1)^k 5^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{-k}{2}} \begin{bmatrix} (-1)^k F_{k-1} & (-1)^{k+1} F_k \\ (-1)^{k+1} F_k & (-1)^k F_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mas, perceba que,

$$F_n = F_{-k} = (-1)^{k+1} F_k,$$

$$F_{n+1} = F_{-k+1} = F_{-(k-1)} = (-1)^{(k-1)+1} F_{k-1} = (-1)^k F_{k-1}$$

e

$$F_{n-1} = F_{-k-1} = F_{-(k+1)} = (-1)^{(k+1)+1} F_{k+1} = (-1)^{k+2} F_{k+1} = (-1)^k F_{k+1}.$$

Assim, segue que

$$Q_L^n = 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Antes de passarmos para o caso em que n é impar, analisemos quando $n = 0$. Nessa situação, o teorema é verdadeiro, pois

$$Q_F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{bmatrix} = 5^{\frac{0}{2}} \begin{bmatrix} F_{0+1} & F_0 \\ F_0 & F_{0-1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o teorema é verdadeiro para quando n é par.

(II) Considere k ímpar, ou seja, n ímpar.

Usando o Teorema 1.1 e a Propriedade 3.5, temos

$$\begin{aligned} Q_L^n = (Q_L^k)^{-1} &= \begin{bmatrix} 5^{\frac{k-1}{2}} L_{k+1} & 5^{\frac{k-1}{2}} L_k \\ 5^{\frac{k-1}{2}} L_k & 5^{\frac{k-1}{2}} L_{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5^{2\frac{(k-1)}{2}} 5(-1)^{k+1}} \begin{bmatrix} 5^{\frac{k-1}{2}} L_{k-1} & -5^{\frac{k-1}{2}} L_k \\ -5^{\frac{k-1}{2}} L_k & 5^{\frac{k-1}{2}} L_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{5^{k-1} 5 (-1)^2 (-1)^{k-1}} \begin{bmatrix} L_{k-1} & -L_k \\ -L_k & L_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{-k-1}{2}} \begin{bmatrix} (-1)^{k-1} L_{k-1} & (-1)^k L_k \\ (-1)^k L_k & (-1)^{k-1} L_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$L_n = L_{-k} = (-1)^k L_k,$$

$$L_{n+1} = L_{-k+1} = L_{-(k-1)} = (-1)^{k-1} L_{k-1}$$

e

$$L_{n-1} = L_{-k-1} = L_{-(k+1)} = (-1)^{k+1} L_{k+1} = (-1)^{k-1} L_{k+1},$$

temos

$$Q_L^n = 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o teorema é verdadeiro para quando n é ímpar.

□

Agora, usando o Teorema 3.1, pela mesma argumentação usada na Propriedade 3.4, mostra-se que

Propriedade 3.6.

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

E como consequência, com a mesma argumentação da Propriedade 3.5, mas com suporte da Propriedade 3.6:

Propriedade 3.7. $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Exercícios para praticar

1. Formalize as demonstrações das Propriedades 3.6 e 3.7, seguindo as sugestões dadas nesta seção.

3.3 Identidades de Lucas e Fibonacci

Nesta seção, demonstraremos algumas identidades que conectam os números de Lucas com os de Fibonacci, via álgebra matricial.

Propriedade 3.8. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Pela Propriedade 3.6,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3F_n + F_{n-1} & 3F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_n + 2F_{n-1} & F_{n-1} + 2F_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_{n+1} & F_{n-2} + F_n \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna nas matrizes da igualdade anterior, segue o resultado. □

Propriedade 3.9. $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Igualando o traço das matrizes na equação (15), temos:

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &= F_n + F_{n+2} + F_{n-2} + F_n \\ &= 2F_n + F_{n+2} + F_{n-2} \\ &= 2F_n + (F_n + F_{n+1}) + F_{n-2} \\ &= 3F_n + F_{n+1} + F_{n-2} \\ &= 3F_n + (F_n + F_{n-1}) + F_{n-2} \\ &= 4F_n + F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= 4F_n + F_n \\ &= 5F_n. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.10. $L_n + F_n = 2F_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Somando Q_F^n em ambos os lados da equação matricial (15), temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_{n+1} & F_{n-2} + F_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} + F_{n+1} & F_{n-1} + F_{n+1} + F_n \\ F_{n-1} + F_{n+1} + F_n & F_{n-2} + F_n + F_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{bmatrix} L_{n+1}+F_{n+1} & L_n+F_n \\ L_n+F_n & L_{n-1}+F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+1} & 2F_n \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial (16), obtemos a identidade desejada. □

Propriedade 3.11. $L_n - F_n = 2F_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Subtraindo Q_F^n em ambos os lados da equação matricial (15), temos:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_n+F_{n+2} & F_{n-1}+F_{n+1} \\ F_{n-1}+F_{n+1} & F_{n-2}+F_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n+F_{n+2}-F_{n+1} & F_{n-1}+F_{n+1}-F_n \\ F_{n-1}+F_{n+1}-F_n & F_{n-2}+F_n-F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2F_n+\cancel{F_{n+1}}-\cancel{F_{n+1}} & 2F_{n-1}+\cancel{F_n}-\cancel{F_n} \\ 2F_{n-1}+\cancel{F_n}-\cancel{F_n} & 2F_{n-2}+\cancel{F_{n-1}}-\cancel{F_{n-1}} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Implicando

$$\begin{bmatrix} L_{n+1}-F_{n+1} & L_n-F_n \\ L_n-F_n & L_{n-1}-F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F_n & 2F_{n-1} \\ 2F_{n-1} & 2F_{n-2} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial (17), obtemos a identidade desejada. □

Propriedade 3.12. $L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n+1}F_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Das Propriedades 3.10 e 3.11, temos:

$$(L_n+F_n)(L_n-F_n) = 2F_{n+1}2F_{n-1},$$

isto é,

$$L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n+1}F_{n-1}.$$

□

Propriedade 3.13. $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2,\ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Somando as igualdades produzidas nas Propriedades 3.2 e 3.7, temos:

$$-5(-1)^n + (-1)^n = L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

isto é,

$$L_n^2 - 4(-1)^n = L_{n+1}L_{n-1} + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Usando a Propriedade 3.8,

$$\begin{aligned}
L_n^2 - 4(-1)^n &= (F_n + F_{n+2})(F_{n-2} + F_n) + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \\
&= F_nF_{n-2} + \cancel{F_nF_n} + F_{n+2}F_{n-2} + F_{n+2}F_n + F_{n+1}F_{n-1} - \cancel{F_n^2} \\
&= F_nF_{n-2} + (F_n + F_{n+1})F_{n-2} + (F_n + F_{n+1})F_n + F_{n+1}F_{n-1} \\
&= F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}F_{n-2} + F_nF_n + F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} \\
&= F_n^2 + F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}F_{n-2} + F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} \\
&= F_n^2 + F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{n+1}F_n \\
&= F_n^2 + F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_n \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-2} + 2F_{n+1}F_n \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-2} + 2(F_{n-1} + F_n)F_n \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-2} + 2F_nF_{n-1} + 2F_nF_n \\
&= 3F_n^2 + 2F_n(F_{n-2} + F_{n-1}) \\
&= 3F_n^2 + 2F_nF_n \\
&= 5F_n^2.
\end{aligned}$$

□

Exercícios para praticar

1. Para $m, n \in \mathbb{Z}$, usando álgebra matricial, mostre que
   (a) $L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1}$;
   (b) $2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n$;
   (c) $2F_{m+n} = F_mL_n + F_nL_m$;
   (d) $5F_{m+n} = L_nL_{m+1} + L_{n-1}L_m$;
   (e) $L_{m-n} = (-1)^{n-1}(L_{n+1}F_m - L_nF_{m+1})$;
   (f) $5F_{m-n} = (-1)^{n-1}(L_mL_{n+1} - L_{m+1}L_n)$.

3.4 Polinômios característicos

3.4.1 Polinômios de Fibonacci

Observe que o polinômio característico da matriz Q_F é dado por

$$p_{Q_F}(x) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - x\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix}1-x & 1\\ 1 & -x\end{vmatrix} = x^2 - x - 1.$$

Nesse contexto, igualando $p_{Q_F}(x)$ à zero, temos a equação característica de Q_F, $x^2 - x - 1 = 0$. A partir dessa equação, podemos calcular os autovalores de Q_F:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

isto é, existem duas raízes de $p_Q(x) = 0$, as quais também são autovalores de Q_F. São eles $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ou seja, são os mesmos irracionais que aparecem nas fórmulas de Binet.

Os autovetores, $\boldsymbol{v}$, associados a um autovalor λ de Q_F, podem ser encontrados igualando $(Q_F - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Considerando $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a - a\lambda + b \\ a - b\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação para $\lambda = \phi$, temos que os autovetores de Q_F são da forma $\boldsymbol{v_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\lambda = \phi_2$, temos que os autovetores são da forma $\boldsymbol{v_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema 1.6, temos:

$$\begin{aligned} Q_F^n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{\phi_2} - \frac{1}{\phi}} \\ &= \frac{\phi\phi_2}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\phi\phi_2 = -1$,

$$\begin{aligned} Q_F^n &= \frac{-1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} \phi^n & \phi_2^n \\ \phi^{n-1} & \phi_2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} \frac{\phi^n}{\phi_2} - \frac{\phi_2^n}{\phi} & -\phi^n + \phi_2^n \\ \frac{\phi^{n-1}}{\phi_2} - \frac{\phi_2^{n-1}}{\phi} & -\phi^{n-1} + \phi_2^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1} - {\phi_2}^{n+1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{n-1} - \phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 3.1, sabemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1} - {\phi_2}^{n+1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{n-1} - \phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na equação matricial (18), acabamos de verificar o item (a) do Teorema 2.1 (Binet): $F_n = \dfrac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Ou seja, esta é outra forma de se provar o teorema em questão, mas dessa vez usando matrizes.

Agora, investiguemos a equação característica de $Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
p_{Q_F^n}(x) &= \det\left(\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} F_{n+1}-x & F_n \\ F_n & F_{n-1}-x \end{vmatrix} \\
&= (F_{n+1}-x)(F_{n-1}-x) - (F_n)(F_n) \\
&= F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+1}x - F_{n-1}x + x^2 - F_n^2 \\
&= x^2 - (F_{n+1}+F_{n-1})x + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,
\end{aligned}$$

isto é, o polinômio característico de Q_F^n é dado por

$$p_{Q_F^n}(x) = x^2 - (F_{n+1}+F_{n-1})x + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Pela identidade de Cassini (Propriedade 3.2) e como $F_{n-1} + F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1}$, podemos reescrever o polinômio característico como $p_{Q_F^n}(x) = x^2 - (F_n + 2F_{n-1})x + (-1)^n$.

Sabemos que os autovalores de Q_F^n são a n-ésima potência dos autovalores de Q_F, ou seja, $\phi^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e $\phi_2^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Por outro lado, os autovalores também são as raízes da equação característica, $x^2 - (F_n + 2F_{n-1})x + (-1)^n = 0$, calculando suas raízes, obtemos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-(F_n+2F_{n-1})) \pm \sqrt{(-(F_n+2F_{n-1}))^2 - 4(-1)^n}}{2} \\
&= \frac{F_n+2F_{n-1} \pm \sqrt{(-(F_{n-1}+F_{n+1}))^2 - 4(-1)^n}}{2}.
\end{aligned}$$

Pela Propriedade 2.2,

$$x = \frac{F_n + 2F_{n-1} \pm |F_n|\sqrt{5}}{2} = \frac{F_n + 2F_{n-1} \pm F_n\sqrt{5}}{2}.$$

Concluímos, portanto, que os autovalores de Q_F^n são

$$\phi^n = \frac{F_n + 2F_{n-1} + F_n\sqrt{5}}{2} \tag{19}$$

e

$$\phi_2^n = \frac{F_n + 2F_{n-1} - F_n\sqrt{5}}{2}. \tag{20}$$

Isto significa que acabamos de obter uma forma de escrever as potências n-ésima do número de ouro e de seu conjugado em função do n-ésimo e $(n-1)$-ésimo termos da sequência de Fibonacci.

3.4.2 Polinômios de Lucas

O polinômio característico da matriz Q_L é

$$p_{Q_L}(x) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 5.$$

Para obter os autovalores de Q_L, calculemos as raízes de $p_{Q_L}(x)$, $x^2 - 5x + 5 = 0$. Assim,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Denote os autovalores de Q_L por $\varphi = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Note que, interessantemente, $\varphi = \sqrt{5}\phi$ e $\varphi_2 = -\sqrt{5}\phi_2$, o que evidencia a relação entre o número de ouro e os números de Lucas.

Os autovetores, $\boldsymbol{v}$, associados a um autovalor λ de Q_L, podem ser encontrados igualando $(Q_L - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Considerando $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a(3-\lambda)+b \\ a+b(2-\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação para $\lambda = \sqrt{5}\phi$, temos autovetores da forma $\boldsymbol{v_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{5}\phi - 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora, considerando $\lambda = -\sqrt{5}\phi_2$, temos autovetores da forma $\boldsymbol{v_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5}\phi_2 - 3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema 1.6, temos:

$$Q_L^n = \frac{\phi\phi_2}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5}\phi & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\phi_2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\phi\phi_2 = 1$ e $\phi - \phi_2 = \sqrt{5}$, segue

$$\begin{aligned}
Q_L^n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\sqrt{5}\phi\right)^n & \left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n \\ \frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi} & \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi_2} - \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi} & -\left(\sqrt{5}\phi\right)^n + \left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n \\ \frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi\phi_2} - \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi\phi_2} & -\frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi} + \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{5}^{n-1}\phi^n\phi - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n\phi_2 & \sqrt{5}^{n-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n \\ \sqrt{5}^{n-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n & \sqrt{5}^{n-1}\phi^n\phi^{-1} - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n\phi_2^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^{n+1} - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^{n+1} & \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^n \\ \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^n & \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^{n-1} - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{5}^n \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1}-(-1)^n\phi_2^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^n-(-1)^n\phi_2^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\phi^n-(-1)^n\phi_2^n}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^{n-1}-(-1)^n\phi_2^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{5}^n \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1}-(-1)^n\phi_2^{n+1}}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^n-(-1)^n\phi_2^n}{\phi-\phi_2} \\ \frac{\phi^n-(-1)^n\phi_2^n}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^{n-1}-(-1)^n\phi_2^{n-1}}{\phi-\phi_2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

O que indica que fomos capazes de expressar Q_L^n em uma única matriz.

Investiguemos a equação característica de $Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$.
Observe que teremos dois polinômios característicos de acordo com a paridade de n.

Para n par, temos:

$$\begin{aligned} p_{Q_L^n}(x) &= \det\left(5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 5^{\frac{n}{2}} F_{n+1} - x & 5^{\frac{n}{2}} F_n \\ 5^{\frac{n}{2}} F_n & 5^{\frac{n}{2}} F_{n-1} - x \end{vmatrix} \\ &= \left(5^{\frac{n}{2}} F_{n+1} - x\right)\left(5^{\frac{n}{2}} F_{n-1} - x\right) - \left(5^{\frac{n}{2}} F_n\right)\left(5^{\frac{n}{2}} F_n\right) \\ &= 5^n F_{n+1} F_{n-1} - 5^{\frac{n}{2}} F_{n+1} x - 5^{\frac{n}{2}} F_{n-1} x + x^2 - 5^n F_n^2 \\ &= x^2 - 5^{\frac{n}{2}}(F_{n+1} + F_{n-1})x + 5^n(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2). \end{aligned}$$

Podemos substituir $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ e $F_{n+1} + F_{n-1}$ usando as Propriedades 3.2 e 3.8.

Para n ímpar, temos:

$$\begin{aligned} p_{Q_L^n}(x) &= \det\left(5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n+1} - x & 5^{\frac{n-1}{2}} L_n \\ 5^{\frac{n-1}{2}} L_n & 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n-1} - x \end{vmatrix} \\ &= \left(5^{\frac{n-1}{2}} L_{n+1} - x\right)\left(5^{\frac{n-1}{2}} L_{n-1} - x\right) - \left(5^{\frac{n-1}{2}} L_n\right)\left(5^{\frac{n-1}{2}} L_n\right) \\ &= 5^{n-1} L_{n+1} L_{n-1} - 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n+1} x - 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n-1} x + x^2 - 5^{n-1} L_n^2 \\ &= x^2 - 5^{\frac{n-1}{2}}(L_{n+1} + L_{n-1})x + 5^{n-1}(L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2). \end{aligned}$$

Podemos substituir $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2$ e $L_{n+1} + L_{n-1}$ usando as Propriedades 3.7 e 3.9.

Dessa forma, o polinômio característico de Q_L^n é dado por

$$p_{Q_L^n}(x) = \begin{cases} x^2 - 5^{\frac{n}{2}} L_n x + 5^n(-1)^n, & \text{se } n \text{ par} \\ x^2 - 5^{\frac{n+1}{2}} F_n x - 5^n(-1)^n, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Os autovalores de Q_L^n são as n-ésimas potências dos autovalores de Q_L, logo $\varphi^n = (\sqrt{5}\phi)^n$ e $\varphi_2^n = (-\sqrt{5}\phi_2)^n$. Por outro lado, os autovalores também são as raízes das equações características.

Para n par, as raízes de $x^2 - 5^{\frac{n}{2}} L_n x + 5^n(-1)^n = 0$ são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5^{\frac{n}{2}} L_n) \pm \sqrt{(-5^{\frac{n}{2}} L_n)^2 - 4(1)(5^n(-1)^n)}}{2} \\ &= \frac{5^{\frac{n}{2}} L_n \pm \sqrt{5^n L_n^2 - 4(5^n)(-1)^n}}{2} \\ &= 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n \pm \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}\right). \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.13, obtemos:

$$x = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n \pm \sqrt{5F_n^2}}{2}\right) = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n \pm |F_n|\sqrt{5}}{2}\right) = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n \pm F_n\sqrt{5}}{2}\right).$$

Para n ímpar, as raízes de $x^2 - 5^{\frac{n+1}{2}}F_n x - 5^n(-1)^n = 0$ são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5^{\frac{n+1}{2}}F_n) \pm \sqrt{(-5^{\frac{n+1}{2}}F_n)^2 - 4(1)(-5^n(-1)^n)}}{2} \\ &= \frac{5^{\frac{n+1}{2}}F_n \pm \sqrt{5^{n+1}F_n^2 + 4(5^n)(-1)^n}}{2} \\ &= 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2}\right). \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.13, obtemos:

$$x = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm \sqrt{L_n^2}}{2}\right) = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm |L_n|}{2}\right) = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm L_n}{2}\right).$$

Então os autovalores de Q_L^n são $\varphi^n = (\sqrt{5}\phi)^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}}\frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n}{2}}\frac{F_n\sqrt{5}+L_n}{2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$ e $\varphi_2^n = (-\sqrt{5}\phi_2)^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}}\frac{L_n-F_n\sqrt{5}}{2}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n}{2}}\frac{F_n\sqrt{5}-L_n}{2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$.

Com essas informações, para finalizar este minicurso, apresentaremos uma nova prova do Teorema de Binet.

Teorema 3.3 (Binet)**.** *Para $n \in \mathbb{Z}$, considerando $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,*

(a) o n-ésimo número de Fibonacci é dado por

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2};$$

(b) o n-ésimo número de Lucas é dado por

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n.$$

Demonstração. (I) Considerando n par, temos:

$$(\sqrt{5}\phi)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}\right) \tag{21}$$

e

$$(-\sqrt{5}\phi_2)^n = (\sqrt{5}\phi_2)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2}\right). \tag{22}$$

Objetivando isolar F_n na equação (21), fazemos:

$$\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\phi^n = \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}\right) \implies \phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} \implies 2\phi^n = L_n + F_n\sqrt{5},$$

o que implica

$$F_n = \frac{2\phi^n - L_n}{\sqrt{5}}. \tag{23}$$

Substituindo na equação (22) o valor de F_n conforme equação (23), temos:

$$\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\phi_2^n = \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{L_n - \left(\frac{2\phi^n - L_n}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5}}{2}\right) \implies \phi_2^n = \frac{L_n - 2\phi^n + L_n}{2},$$

obtendo:

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n. \tag{24}$$

Substituindo na equação (23) o valor de L_n conforme equação (24), temos:

$$F_n = \frac{2\phi^n - (\phi^n + \phi_2^n)}{\sqrt{5}}.$$

Uma vez que $\phi - \phi_2 = \sqrt{5}$,

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \tag{25}$$

(II) Considerando n ímpar, temos:

$$(\sqrt{5}\phi)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} + L_n}{2}\right) \tag{26}$$

e

$$(-\sqrt{5}\phi_2)^n = -(\sqrt{5}\phi_2)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} - L_n}{2}\right). \tag{27}$$

Note que as equações (21) e (26) são iguais, portanto, isolando F_n encontraremos a equação (23) novamente. Substituindo na equação (27) o valor de F_n conforme equação (23), segue:

$$-\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\phi_2^n = \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\left(\frac{2\phi^n - L_n}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5} - L_n}{2}\right).$$

Objetivando isolar L_n, fazemos:

$$-\phi_2^n = \frac{2\phi^n - L_n - L_n}{2} \implies \phi_2^n = \frac{-\cancel{2}\phi^n + \cancel{2}L_n}{\cancel{2}},$$

obtendo, novamente,

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n. \tag{28}$$

E, se repetirmos a substituição da equação (24) na equação (23), obteremos a equação (25) mais uma vez.

Portanto, por (I) e (II), para $n \in \mathbb{Z}$ qualquer, $F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$ e $L_n = \phi^n + \phi_2^n$. □

Referências

[1] HARTMAN, G. **Fundamentals of Matrix Algebra**, Third Edition. Lexington: Virginia Military Institute, 2011.

[2] CARITÁ, L. A. **Tópicos Selecionados em Estruturas Algébricas**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2024.

[3] SHOKRANIAN, S. **Uma Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

[4] STEINBRUCH, A. WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Pearson Education, 1987.

[5] HOGGATT, V. E. **Fibonacci and Lucas Numbers**. Boston: Houghton Mifflin Company, 1969.

[6] LUCAS, E. **Théorie des Nombres, Tome Premier**. Paria: Gauthier-Villars, 1891.

[7] ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o número de outo**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.

[8] KÖKEN, F. BOZKURT, D. On Lucas Numbers by the Matrix Method. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, v. 39, n. 4, p. 471 – 475, 2010.