

MINICURSO

Matrizes 2×2 ou Coquatérnios

Aplicada ao estudo do espaço hiperbólico

Colombo, Jones ¹;

Resumo: Nestas notas vamos apresentar a álgebra, conhecida como Coquatérnio. Esta álgebra é na verdade a álgebra das matrizes 2×2 vista com respeito a uma base adequadamente escolhida. Vamos analisar as principais propriedades desta álgebra desde o ponto de vista dos quatérnios. O objetivo deste minicurso é mostrar que assim como a álgebra dos Quatérnios é adequada para cálculos no espaço euclidiano, a álgebra dos Coquatérnios é adequada para os cálculos do Espaço Hiperbólico.

Palavras-chave: split-quaternion, matrizes de rotação, geometria hiperbólica.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Quatérnios

Em Matemática, os quatérnios [8] é um sistema numérico que estende os números Complexos [7]. Os quatérnios foram primeiramente descritos pelo matemático Irlandês Willian Rowan Hamilton em 1843 e aplicado ao estudo da mecânica do espaço tridimensional. Por este motivo os quatérnico são frequentemente denotados por H (de Hamilton), ou por \mathbb{H} . É tradição representar os quatérnios da forma:

$$a \mathbf{1} + b \mathbf{i} + c \mathbf{j} + d \mathbf{k},$$

onde os coeficiente a , b , c e d são números reais, e $\mathbf{1}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} são as bases de um espaço vetorial sobre os Reais.

Onde a multiplicação por $\mathbf{1}$ e os elementos \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} são definidos por ele ser o elemento identidade, isto é,

$$\mathbf{i} \mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbf{i} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j} \mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbf{j} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

¹IME – UFF

O produto dos outros elementos da base são:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Combinando esta regras,

$$\mathbf{ijk} = -1.$$

Os quatérnios é um tópico de matemática pura, mas também têm usos práticos em matemática aplicada [2, 6], particularmente para cálculos que envolvem rotações tridimensionais, como em computação gráfica tridimensional, visão computacional e análise de textura cristalográfica. Eles podem ser usados junto com outros métodos de rotação, como ângulos de Euler e matrizes de rotação, ou como alternativa a eles, dependendo da aplicação.

Em termos modernos, os quatérnios formam uma álgebra de divisão normada associativa quadridimensional sobre os números reais e, portanto, um anel, também um anel de divisão e um domínio. É um caso especial de álgebra de Clifford, classificada como $\text{Cl}_{0,2}(\mathbb{R}) \cong \text{Cl}_{3,0}^+(\mathbb{R})$. Foi a primeira álgebra de divisão não comutativa a ser descoberta.

1.2 Coquatérnios

Na álgebra abstrata, os Coquatérnios [9] (ou Split-Quaternion) formam uma estrutura algébrica introduzida por James Cockle em 1849. Eles formam uma álgebra associativa de dimensão quatro sobre os números reais.

Após a introdução no século 20 usando as definições de anéis e álgebras sem coordenadas, foi provado que a álgebra dos coquatérnios é isomorfa ao anel das matrizes reais 2×2 sobre os Reais. Portanto, o estudo dos Coquatérnios pode ser reduzido ao estudo de matrizes reais, e isso pode explicar por que há poucas menções aos Coquatérnios na literatura matemática dos séculos XX e XXI.

Seguindo a tradição representar os quatérnios vamos representar os coquatérnios da forma:

$$a \mathbf{1} + b \mathbf{i} + c \mathbf{j} + d \mathbf{k},$$

onde os coeficiente a , b , c e d são números reais, e $\mathbf{1}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} são as bases de um espaço vetorial sobre os Reais. Onde a multiplicação por $\mathbf{1}$ e os elementos \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} são definidos para ele ser o elemento identidade, isto é,

$$\mathbf{i} \mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbf{i} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j} \mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbf{j} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

O produto dos outros elementos da base são:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = -\mathbf{j}^2 = -\mathbf{k}^2 = -1, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = -\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Combinando esta regras,

$$\mathbf{ijk} = 1.$$

Como os quatérnios, eles formam uma álgebra associativa real quadridimensional sobre os reais. Mas, como a álgebra real das matrizes 2×2 .

Abordaremos a álgebra de matrizes 2×2 , denotada por M_2 , e a álgebra dos quatérnios sobre os números reais, denotada por \mathbb{H} . Embora seja conhecido que M_2 é isomórfica a \mathbb{H} sobre os números complexos (\mathbb{C}), não é possível que essas álgebras sejam isomórficas sobre os números reais (\mathbb{R}). Antes de discutirmos as propriedades fundamentais dos quatérnios e dos coquatérnios, faremos uma breve digressão para garantir uma discussão coerente mais adiante.

2 Espaços Euclidianos, pseudo-Euclideanos e Simpléticos

Seja $n \geq 2$. Considere $\langle \cdot, \cdot \rangle_v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle x, y \rangle_v = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-v} y_{n-v} - x_{n-v+1} y_{n-v+1} - \cdots - x_n y_n$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Considere a base canônica $\{f_1, \dots, f_n\}$ do \mathbb{R}^n , a matriz associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ é

$$\text{Id}_{n-v,v} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Id}_{n-v} & 0 \\ \hline 0 & -\text{Id}_v \end{array} \right]$$

onde Id_k é a matriz identidade de ordem k . Podemos considerar $u, w \in \mathbb{R}^n$ como vetores colunas, e escrever $\langle u, w \rangle_v = u^t \text{Id}_{n-v,v} w$. No caso de espaço euclidiano a matriz é Id_n . Nas situações anteriores as formas bilineares são não degeneradas e simétricas. Existe, no caso que o espaço vetorial de dimensão par, isto é, $n = 2k$. A forma bilinear ser não degenerada e anti-simétrica. Neste caso, a matriz que acompanha deve ser

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \text{Id}_k \\ \hline -\text{Id}_k & 0 \end{array} \right].$$

Neste caso \mathbb{R}^n o espaço é chamado de Simplético. Para distinguir cada caso, vamos usar a seguinte notação: $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, para produto interno, euclidiano, pseudo-euclidiano e simplético, respectivamente.

Na literatura, diz-se que uma forma bilinear é um produto interno se for bilinear, simétrica e positivo-definida. Neste artigo, chamamos uma forma bilinear de produto interno se ele for não-degenerada. Desta forma usaremos o termo produto interno, mesmo quando ele não for positivo-definido (pseudo-Euclidiano) e quando for anti-simétrico (Simplético).

O conjunto das matrizes reais A de tamanho $n \times n$ que preservam esta forma (isto é, $\langle Ax, Ay \rangle_v = \langle x, y \rangle_v$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$) é chamado de **grupo ortogonal generalizado** e denotado por $O_v(n, \mathbb{R})$. E, no caso, que $\langle Ax, Ay \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ de **grupo simplético**, denotado por $Sp(n, \mathbb{R})$.

O espaço pseudo-Euclidiano de índice v , denotado por \mathbb{R}_v^n , é o espaço vetorial \mathbb{R}^n com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, munido do produto interno pseudo-Euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$. O espaço de Lorentz-Minkowski, é o \mathbb{L}^n definido por ser \mathbb{R}_1^n .

É comum, na literatura, definir $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ colocando os v sinais negativos nas primeiras parcelas, ao invés das últimas.

Existe um terminologia que claramente vem de considerações físicas. Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}_v^n$ é do tipo: (a) *espaço* se $\langle v, v \rangle_v > 0$; (b) *tempo* se $\langle v, v \rangle_v < 0$; (c) do tipo *luz* se $\langle v, v \rangle_v = 0$.

Também definimos a norma pseudo-Euclidiana por ser a aplicação $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|v\|_v = \sqrt{|\langle v, v \rangle_v|}$. Dizemos que v é unitário se, e somente se, $\langle v, v \rangle_v = \pm 1$.

É importante observar que o termo "norma" na definição proposta acima é um abuso de linguagem, pois a aplicação $\|\cdot\|_v$ não é de fato uma norma, visto que existem vetores não-nulos cuja norma pseudo-Euclidiana é zero e não vale a desigualdade triangular.

Definição 2.1 Considere $p \in \mathbb{L}^3$ e $r > 0$

i) O espaço de Sitter de centro p e raio r é o conjunto

$$S_1^2(p, r) = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x - p, x - p \rangle_1 = r^2\}$$

ii) O espaço hiperbólico de centro p e raio r é o conjunto

$$H_+^2(p, r) = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x - p, x - p \rangle_1 = -r^2 \text{ e } \langle x - p, e_3 \rangle_1 > 0\}$$

e

$$H_-^2(p, r) = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x - p, x - p \rangle_1 = -r^2 \text{ e } \langle x - p, e_3 \rangle_1 < 0\}.$$

3 Quatérnios

Os quatérnios \mathbb{H} são definidos como um espaço vetorial $E_{\mathbb{H}}$ de dimensão 4 sobre os \mathbb{R} . Isto é, admite uma base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Esta base satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{cases} e_0^2 = e_0, & e_1^2 = -e_1, & e_2^2 = -e_2, & e_3^2 = -e_3, \\ e_0e_1 = e_1e_0 = e_1, & e_0e_2 = e_2e_0 = e_2, & e_0e_3 = e_3e_0 = e_3, \\ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, & e_1e_3 = -e_3e_1 = e_2, & e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1. \end{cases} \quad (1)$$

Veja que se

$$x = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad y = b_0e_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,$$

nós temos, graças as relações acima que

$$\begin{aligned} xy = & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)e_0 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)e_1 \\ & + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_3)e_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Com esta multiplicação podemos verificar que os Quatérnios são uma álgebra associativa com unidade e_0 .

Para provarmos que $E_{\mathbb{H}}$ é um anel de divisão, considere $x = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, o elemento

$$\bar{x} = a_0e_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 \quad (3)$$

é chamado de *conjugado de x* . Claramente a aplicação que pega x e associa \bar{x} em $E_{\mathbb{H}}$ é um automorfismo, mais que isso é uma involução em $E_{\mathbb{H}}$, isto é,

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

Pela bilinearidade, esta relação só precisa ser verificada pelos pares formados pela base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ e isso pode ser feito usando (1).

Além disso, por (2) e (3), temos

$$x\bar{x} = \bar{x}x = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)e_0. \quad (4)$$

A partir disso podemos concluir que se $x \neq 0$, então $\bar{x}x = x\bar{x}$ (como e_0) comuta com todos os elementos de $E_{\mathbb{H}}$. E portanto, $x' = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{-1}\bar{x}$ satisfaz $x'x = xx' = e_0$. De fato, podemos chamar x' por x^{-1} .

A aplicação $x \mapsto xe_0$ de \mathbb{R} em $E_{\mathbb{H}}$ é um homomorfismo de \mathbb{R} no subcorpo $Z_{\mathbb{H}} = \mathbb{R}e_0$.

O subcorpo $Z_{\mathbb{H}} = \mathbb{R}e_0$ é o centro de $E_{\mathbb{H}}$. Para vermos isso considere um elemento $x = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ pertencendo ao centro, então x deve comutar com e_1, e_2 e e_3 , escrevendo estas condições e usando 2, obtemos que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isso demonstra a afirmação. Veja que

$$x + \bar{x} = 2a_0e_0$$

e, como $x^2 - (x + \bar{x})x + \bar{x}x = 0$, vemos que cada qualquer quatérnio satisfaz uma equação de segundo grau $x^2 - \alpha x + \beta = 0$, onde $\alpha = 2a_0$ e $\beta = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Devemos nos precaver que em $E_{\mathbb{H}}$ tal equação, em geral, admite infinitas raízes, pois se, x satisfazê-la, então cada elemento sxs^{-1} obtido de x , por aplicar um automorfismo interno também irá satisfazer tal equação. Além disso, é claro que existem infinitos $s \in E_{\mathbb{H}}$, $s \neq 0$ tal que $sxs^{-1} \neq x$, pois podemos escolher $s \notin Z_{\mathbb{H}}$.

Os números reais $2a_0$ e $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ são chamados de *traço* e *determinante* do quatérnio x , respectivamente, e denotados por $\text{tr}(x)$ e $N(x)$. É claro que $x \mapsto \text{tr}(x)$ é uma aplicação linear em $E_{\mathbb{H}}$ tal que

$$\text{tr}(\bar{x}) = \text{tr}(x).$$

Além disso, por (2)

$$\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx). \quad (5)$$

Daí, temos

$$\text{tr}(sxs^{-1}) = \text{tr}(x) \quad (6)$$

é válido para todo quatérnio $s \neq 0$, pois $x = (xs^{-1})s$.

Também,

$$N(xy) = N(x)N(y) \quad (7)$$

uma vez que $(xy)(\overline{xy}) = xy\bar{y}\bar{x}$, nos fornece $(xy)(\overline{xy}) = (x\bar{x})(y\bar{y})$, já que $y\bar{y}$ é central.

Os quatérnios x tais que $\bar{x} = -x$ (ou equivalente, $\text{tr}(x) = 0$) são chamados de *quatérnios puros*. Considere o hiperplano $F_{\mathbb{H}}$ de $E_{\mathbb{H}}$ gerado pelos vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$, temos por 6 que

$$sF_{\mathbb{H}}s^{-1} = F_{\mathbb{H}} \quad (8)$$

para todo quatérnio $s \neq 0$. $E_{\mathbb{H}}$ é soma direta de $Z_{\mathbb{H}}$ e $F_{\mathbb{H}}$; em outras palavras, cada quatérnio z pode ser escrito de maneira única da forma

$$z = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(z)e_0 + \frac{1}{2}(z - \bar{z}),$$

onde $\operatorname{tr}(z)e_0 = z + \bar{z}$ é também chamado de parte escalar de z . Se $z = \alpha e_0 + x$, onde x é um quatérnio puro, então $\operatorname{tr}(z) = 2\alpha$ e $N(z) = \alpha^2 + N(x)$ e $x^2 = -N(x)e_0$.

Segue de (5) que a aplicação $(x, y) \mapsto \operatorname{tr}(x\bar{y}) = \operatorname{tr}(y\bar{x})$ é simétrica e bilinear. Além disso, como $\operatorname{tr}(x\bar{x}) = N(x)$, ela será positiva e não degenerada. Portanto, temos uma estrutura de espaço euclidiano sobre $E_{\mathbb{H}}$. Por (7) temos

$$\|xy\| = \|x\| \|y\| \tag{9}$$

e, como $N(e_0) = 1$, isto nos fornece

$$\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}.$$

Estas observações nos mostram que os quatérnios com norma 1 é o subgrupo $S_3(\mathbb{H})$ de grupo $E_{\mathbb{H}}^*$ dos quatérnios não nulos com a operação de multiplicação. E, desde que cada quatérnio x pode ser escrito da forma $x = \rho z$, com $\rho = \|x\|$ e $\|z\| = 1$, isto é fácil de ver que $E_{\mathbb{H}}^*$ é o produto direto de $S_3(\mathbb{H})$ com o grupo multiplicativo \mathbb{R}_+^* .

A relação (9) mostra que se a e b são quatérnios de norma 1, então a aplicação

$$x \mapsto axb$$

é uma transformação ortogonal. O nosso próximo objetivo é mostrar que toda a transformação ortogonal em $E_{\mathbb{H}}$ é desta forma.

Vamos provar que qualquer isometria de \mathbb{R}^n que fixa a origem O é o produto de reflexões em hiperplanos através de O , e então se especializam para orientação preservando as isometrias. Um hiperplano $F_{\mathbb{H}}$ até O é um $(4 - 1)$ -dimensional subespaço de \mathbb{R}^4 , e a reflexão em $F_{\mathbb{H}}$ é a aplicação linear de \mathbb{R}^4 que fixa o elementos em $F_{\mathbb{H}}$ e inverte os vetores ortogonais a $F_{\mathbb{H}}$.

Proposição 3.1 Qualquer isometria de \mathbb{R}^n que fixa O é o produto de no máximo n reflexões em hiperplanos através de O .

Segue-s, em particular, que qualquer isometria de \mathbb{R}^3 que preservar a orientação é o produto de 0 ou 2 reflexões (porque o produto de um número ímpar de reflexões inverte a orientação). Assim, qualquer tal isometria é uma rotação sobre um eixo que passa por O .

Este teorema é às vezes conhecido como o teorema de Cartan-Dieudonné, depois de um teorema mais geral provado por Cartan [1938], e generalizado mais adiante por Dieudonné. O teorema de Cartan diz respeito a “reflexões” em espaços com coordenadas reais ou complexas, e Dieudonné estende-o a espaços com coordenadas em corpos finitos.

Para isso vamos provar que $F_{\mathbb{H}}$ é estável pela transformação ortogonal $x \mapsto sxs^{-1}$ de $E_{\mathbb{H}}$. Para isso vamos provar

Proposição 3.2 *Cada rotação no espaço $F_{\mathbb{H}}$, pode ser escrita da seguinte forma:*

$$u_s : x \mapsto sxs^{-1}$$

onde s é um quatérnio não nulo. Além disso, $u_s = u_r$, se e somente se, $r = \lambda s$ onde λ é um escalar não nulo.

Vamos iniciar analisando a segunda afirmação; observe que se $sxs^{-1} = rxr^{-1}$ para cada quatérnios puros s e r , então $(r^{-1}s)x = x(r^{-1}s)$, ou $r^{-1}s$ comuta com todos os quatérnios puros. Como também comuta com os elementos centrais de $Z_{\mathbb{H}} = \mathbb{R}e_0$, necessariamente pertence ao centro.

Para provar a primeira afirmação, observe primeiro que

$$u_{st} = u_s u_t \tag{10}$$

e, lembrando da proposição 3.2 considere uma reflexão em torno de um hiperplano, e vamos mostrar que existem $s \in E_{\mathbb{H}}$ tal que $v = -u_s$ onde, nós temos

$$v(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \tag{11}$$

para todo $x \in F_{\mathbb{H}}$ e $a \neq 0$ em $E_{\mathbb{H}}$. Agora, se y e z são dois quatérnios puros, então

$$2 \langle y, z \rangle e_0 = \langle y + z, y + z \rangle - \langle y, y \rangle - \langle z, z \rangle \tag{12}$$

$$= -((y + z)^2 - y^2 - z^2) = -(yz + zy). \tag{13}$$

Pela (11) e lembrando que $E_{\mathbb{H}}$ é um anel de divisão

$$v(x) = x + 2 \langle x, a \rangle a^{-1} = -axa^{-1}.$$

E isso prova o resultado.

Observe as fórmula 2 e perceba que

$$yz = -\langle y, z \rangle + \vec{y} \times \vec{z}$$

onde o produto \times é o produto vetorial dos vetores \vec{y} e \vec{z} .

Antes de ir adiante, vamos lembrar um pouco a respeito do espaço euclidiano (lembre, qualquer dois espaços com a mesma dimensão é isomorfo e, em particular, todos os espaços tridimensionais de são isomorfos, em particular, são isomorfos a $E_{\mathbb{H}}$). A primeira parte da proposição 3.2 nos mostra que todas as rotações em $E_{\mathbb{H}}$ podem ser escritas na forma $x \mapsto sxs^{-1}$, onde s é um quatérnio com norma 1. Tendo em mente 10, podemos definir um homomorfismo sobrejetivo $s \mapsto u_s$, de $S_3(\mathbb{H})$ em $SO(3, \mathbb{R})$, cujo o núcleo é o subgrupo $\{-1, 1\}$ de ordem 2 em $S_3(\mathbb{H})$. Isto significa que cada $v \in SO(3, \mathbb{R})$, tem uma correspondência dois quatérnios $\pm s$, de norma 1, talque $u_s = v$.

Vamos agora exibir uma forma de “selecionar” de maneira “razoável” um destes dois quatérnios.

Teorema 3.1 *Seja $s = \alpha e_0 + t$ um quatérnio, onde t é um quatérnio puro não nulo e α é um escalar. Então o eixo de rotação u_s é a linha D_{Ot} , e o ângulo de rotação (a orientação é escolhida observando o suplemento ortogonal de D_{Ot} em E_{M_2}), é zero se o ângulo é reto, quando $\alpha \neq 0$, então o ângulo $\theta > 0$ tal que $\operatorname{tg}(\theta/2) = |t|/\alpha$.*

Que D_{Ot} é o eixo de u_s é consequência do fato que quatérnios λt comuta com t e o escalar, e portanto com s . Para provar que a segunda afirmação, considere o versor de s

$$s' = \frac{\alpha}{|s|}e_0 + \frac{|t|}{|s|} \frac{1}{|t|}t = \frac{\alpha}{|s|}e_0 + \frac{|t|}{|s|}u,$$

onde u é o versor de t . Escolha um vetor unitário v ortogonal a u em $F_{\mathbb{H}}$, isto é, $u \cdot v = 0$. Então tomando $w = u \times v$, o qual é igual a uv por causa que $u \cdot v = 0$, então $\{u, v, w\}$ é uma base ortonormal de $F_{\mathbb{H}}$ com $uv = w$, $vw = u$, $wu = v$ e $uv = -vu$. Podemos escrever o versor de s da forma: $s' = \cos \theta e_0 + \operatorname{sen} \theta u$, uma vez que $Z_{\mathbb{H}}$ e $E_{\mathbb{H}}$ são ortogonais entre si. Além disso, $|u| = 1$ e $u^2 = -1$. Vamos verificar que $u_{s'}$ é uma rotação ao redor u de 2θ .

Primeiro veja que o $t^{-1} = \cos \theta e_0 - \operatorname{sen} \theta u$, daí

$$\begin{aligned} tvt^{-1} &= (\cos \theta e_0 + \operatorname{sen} \theta u)v(\cos \theta e_0 - \operatorname{sen} \theta u) \\ &= (\cos \theta v + \operatorname{sen} \theta w)(\cos \theta e_0 - \operatorname{sen} \theta u) \\ &= (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)v + (\operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)w \\ &= \cos 2\theta v + \operatorname{sen} 2\theta w. \end{aligned}$$

O mesmo acontece para $twt^{-1} = \cos 2\theta v - \operatorname{sen} 2\theta w$. Isto mostra que $u_{s'} = u_s$ é uma rotação de 2θ ao redor de u que por sua vez é um múltiplo de t . Como podemos escrever $s' = \cos \theta e_0 + \operatorname{sen} \theta u$, segue que $\operatorname{tg}(\theta/2) = |t|/\alpha$ e temos a identidade que envolve o ângulo.

É possível de verificar que não existe um homomorfismo φ do grupo $SO_3(\mathbb{R})$ no grupo $S_3(\mathbb{H})$ tal que para cada rotação v tenhamos $u_{\varphi(v)} = v$. Expressamos este fato dizendo que o grupo $S_3(\mathbb{H})$ é um recobrimento não trivial do grupo $SO_3(\mathbb{R})$; este recobrimento é denotado por $\operatorname{Spin}(3, \mathbb{R})$.

3.1 Rotações no \mathbb{R}^4

Antes de continuar vamos “explicar” o truque que foi usado para se estudar os quatérnios.

Primeiramente é importante identificar os números complexos com uma subfamília de matrizes 2×2 dada por

$$\alpha = a + bi \in \mathbb{C} \mapsto \theta = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Com a soma e multiplicação de matrizes este conjunto de matrizes é isomorfo aos números complexos. Em particular, observe que os invariantes: $\operatorname{tr}(\theta)$ e $\det(\theta)$ são $2a$ e $a^2 + b^2$, respectivamente.

Agora queremos repetir o truque considere o conjunto das matrizes 2×2 com entradas complexas, por exemplo vamos determinar o grupo das matrizes que fazem o papel do subgrupo das matrizes ortogonais $O(2; \mathbb{R})$ que possuem determinante 1, chamado de grupo ortogonal especial $SO(2; \mathbb{R})$ no contexto dos complexos é chamado de **grupo unitário especial** e é denotado por $SU(2)$ e descrito por ser

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

onde α e $\beta \in \mathbb{C}$ com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Agora observe que qualquer quatérnio pode ser reescrito:

$$q = ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3 = ae_0 + de_3 + (b + ce_3)e_1 = \alpha + \beta e_2$$

onde $\alpha = a + di$, $\beta = b + ci \in \mathbb{C}$, lembre-se que $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$.

Daí, repetindo o raciocínio que nos levou associar a cada complexo uma matriz real 2×2 temos

$$q = \alpha + \beta e_2 \leftrightarrow u = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Com esta associação, volte na discussão a respeito dos quatérnios e veja que o que foi discutido faz muito mais sentido agora. Em particular: se $|q| \in S_3(\mathbb{H})$, se, e somente se, $u \in SU(2)$.

Podemos ainda, associarmos estas matrizes, a uma subfamília de matrizes em \mathbb{R}^4 dada por

$$R_u = \begin{bmatrix} a & -d & -b & c \\ d & a & -c & -b \\ b & c & a & d \\ -c & b & -d & a \end{bmatrix}$$

Veja que $\det R_u = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

Uma aplicação linear que preserva a orientação tem determinante positivo, e se inverte a orientação o determinante é negativo. As reflexões são aplicações lineares que invertem a orientação, então um produto de reflexões preserva a orientação se e somente se contiver um número par de fatores. Definimos uma rotação de \mathbb{R}^n em torno de O para ser uma isometria de preservação de orientação que fixa O .

Segue da proposição 3.1 que qualquer rotação de \mathbb{R}^4 é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões. O número exato não é tão importante – o que realmente queremos é uma maneira de representar reflexões por quatérnios, como trampolim para a representação de rotações por quatérnios.

Não surpreendentemente, cada reflexão é especificada pelo quatérnio ortogonal ao hiperplano de reflexão. Mais surpreendentemente, uma rotação é especificada por apenas dois quatérnios, independentemente do número de reflexões necessárias para a compor.

Teorema 3.2 Uma reflexão do $E_{\mathbb{H}} = \mathbb{R}^4$ no hiperplano que passa através da origem e é ortogonal a quatérnio unitário u é a aplicação que toma q e envia em $-u\bar{q}u$.

Vamos iniciar observando que: (a) a aplicação $q \mapsto -\bar{q}$ inverte o sentido de e_0 e mantém fixo F_{M_2} ; (b) Veja que

$$\| -u\bar{q}u \| = \| u \| \| \bar{q} \| \| u \| = \| q \|,$$

Além disso, se u é um vetor unitário, então $u \mapsto u\bar{u}u = u$. Além do mais, $e_1u \mapsto -ue_0\bar{u}u = u\bar{u}e_0u = e_0u$. Da mesma forma: $e_2u \mapsto e_2u$ e $e_3u \mapsto e_3u$. Portanto, a aplicação inverte o sentido na direção e_0u e mantém fixo o subespaço gerado por: e_1u , e_2u e e_3u . Os vetores e_1u , e_2u e e_3u são os geradores do plano perpendicular a u . O que demonstra nosso resultado.

Proposição 3.3 Qualquer rotação v do $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ ao redor de O é uma aplicação da forma $q \mapsto vqw$, onde v e w são quatérnios unitários.

Como u é uma rotação, então existe um número para de vetores unitários u_1, u_2, \dots, u_{2n} tais que u é o produto das reflexões em torno dos planos perpendiculares a estes vetores. Logo,

$$q \mapsto u_{2n} \cdots \bar{u}_3 u_2 \bar{u}_1 q \bar{u}_1 u_2 \bar{e}_3 \cdots u_{2n}$$

e como Os quatérnios não são comutativos, segue que devem existir quatérnios u e v tais que a nossa rotação é da forma: $q \mapsto uqv$.

Além disso, digamos que existem u, u' e v, v' vetores tais que $q \mapsto uqv$ e $q \mapsto u'qv'$ são iguais, então $\| u \| = \lambda \| u' \|$ e $\| v \| = 1/\lambda \| v' \|$, onde λ é um escalar não nulo. De fato, digamos que $uqv = u'qv'$, logo, $u^{-1}u'q = qv'v^{-1}$, para todo quatérnio q . Se $q = e_0$, então $u^{-1}u' = u^{-1}u' = w$ e w comuta com todo mundo, logo deve ser um elemento central.

A aplicação $(u, v) \in S_3(\mathbb{H}) \times S_3(\mathbb{H})$ na rotação $q \mapsto v^{-1}qw \in SO(4, \mathbb{R})$ é um homomorfismo de grupo $\varphi : S_3(\mathbb{H}) \times S_3(\mathbb{H}) \rightarrow SO(4, \mathbb{R})$

Este homomorfismo é sobrejetor, porque cada rotação de \mathbb{R}^4 pode ser expresso na forma $q \mapsto vqw^{-1}$, pelo que observamos as rotações (v, w) nos dá a mesma rotação $(-v, -w)$

Veja que se (v, w) esta no kernel de φ , se e somente se, $q \mapsto v^{-1}qw$ é o operador identidade, daí

$$v 1 w^{-1} = 1 \text{ então } v = w.$$

Daí a aplicação é de fato $q \mapsto vqv^{-1}$, a qual sabemos que se fixa o eixo real e roda no espaço dos imaginários puros. Se e somente se, $v = 1$ ou $v = -1$, daí o kernel de φ só pode ser dois elementos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Logo, pelo teorema do isomorfismo temos que $SO(4, \mathbb{R})$ é isomorfo a $(S_3(\mathbb{H}) \times S_3(\mathbb{H})) / \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

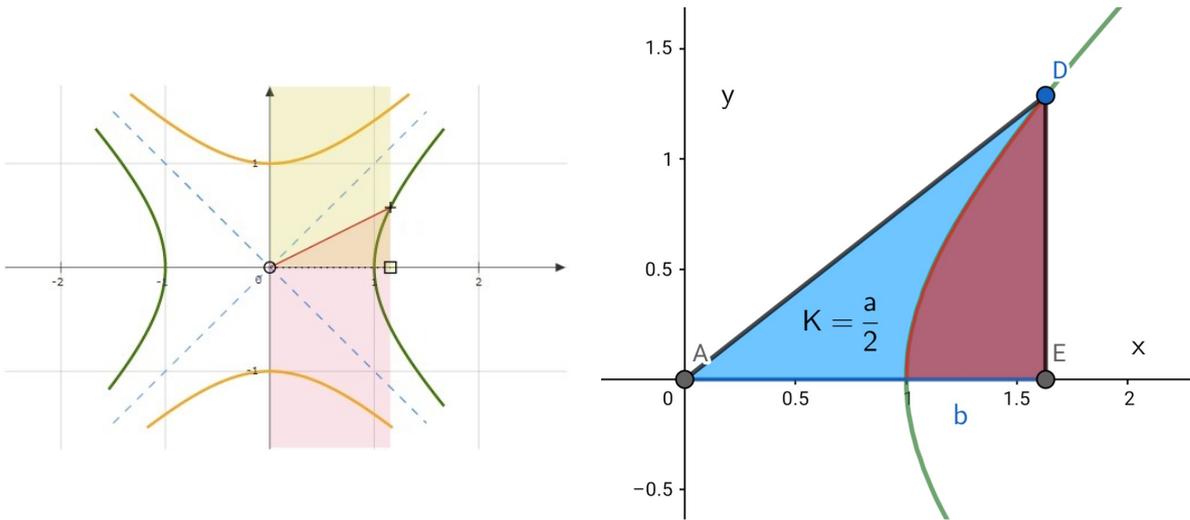
Isto não é o centro T de $S_3(\mathbb{H}) \times S_3(\mathbb{H})$, uma vez que T é o produto $\{1, -1\} \times \{1, -1\}$, consequentemente é um subgrupo de ordem 4. Disto, $SO(4, \mathbb{R})$ deve conter dois subgrupos normais $G_1 = \varphi(S_3(\mathbb{H}) \times \{1\})$, $G_2 = \varphi(\{1\} \times S_3(\mathbb{H}))$ ambos isomorfos a $S_3(\mathbb{H})$, porque $(S_3(\mathbb{H}) \times \{1\}) \cap N = N \cap (\{1\} \times S_3(\mathbb{H})) = 1$. Além disso, $G_1 \cap G_2 = T/N$, daí $G_1 \cap G_2 = \{-1, 1\}$. O centro $Z_0(E)$ de $SO(4, \mathbb{R})$ é de ordem 2. Também vemos que $SO(4)$ tem duas séries de subgrupos normais

$$\{1\} \trianglelefteq Z_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq SO(4, \mathbb{R}) \text{ e } \{1\} \trianglelefteq Z_0 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq SO(4, \mathbb{R}).t$$

4 Hiperbóle

Vamos considerar em \mathbb{R}_1^2 as hipérboles: $-x^2 + y^2 = 1$ e $-x^2 + y^2 = -1$ e a forma bilinear $\langle x, y \rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Considere esta forma bilinear, pois o que queremos compreender mesmo é o \mathbb{R}_2^3 munido da forma bilinear $\langle x, y \rangle_2 = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, x_3)$.

É conhecido que nos espaços de Lorentz as funções trigonométricas hiperbólicas tem o mesmo papel que as funções trigonométricas nos espaços euclidianos. Vamos iniciar examinando a relação de área e o argumento do cosseno hiperbólico.



Integrando $\sqrt{x^2 - 1}$ de ponto 1 até b obtemos a área da região vermelha (b é a distância de 1 até E):

$$\text{área vermelha} = \int_1^b \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{b\sqrt{b^2 - 1} - \ln(b + \sqrt{b^2 - 1})}{2}.$$

Então subtraindo a área da região vermelha do triângulo reto AED (a qual é $\frac{1}{2}b\sqrt{b^2 - 1}$) nos dá a área K :

$$K = \frac{b\sqrt{b^2 - 1}}{2} - \frac{b\sqrt{b^2 - 1} - \ln(b + \sqrt{b^2 - 1})}{2} = \frac{\ln(b + \sqrt{b^2 - 1})}{2}$$

Então se $K = \frac{a}{2}$:

$$a = \ln(b + \sqrt{b^2 - 1}).$$

Agora isolando a , obtemos

$$x = b = \cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

Agora, para determinar a coordenada y , basta lembrar que $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$, e lembra que o ponto (x, y) esta sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Daí temos,

$$y = \sqrt{\cosh^2 a - 1} = \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}.$$

Desta maneira estabelecemos uma relação entre a área da região delimitada e o argumento da função hiperbólica. Chamaremos a região em vermelho de ângulo.

Considere um ponto (x, y) e a imagem do mesmo pela reflexão em torno da reta $y = x$ que é (y, x) e sua reflexão em torno da origem que é $(-y, -x)$. Agora é fácil de ver que

$$\langle (x, y), (y, x) \rangle_1 = 0 = \langle (x, y), (-y, -x) \rangle_1.$$

Em particular, os vetores que estão sobre a reta $y = x$ são ortogonais a si mesmos.

Agora, considere os vetores $u = (\cosh t_1, \sinh t_1)$ e $v = (\cosh t_2, \sinh t_2)$ que estão na hipérbole $-x^2 + y^2 = -1$. Para simplificar considere ainda $t_2 > t_1 > 0$. Então,

$$\frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} = -\cosh t_1 \cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2 = -\cosh(t_2 - t_1).$$

Por outro lado, no caso, $u = (\cosh t_1, \sinh t_1)$ esta na hipérbole $-x^2 + y^2 = -1$ e $v = (\sinh t_2, \cosh t_2)$ está na hipérbole $-x^2 + y^2 = 1$. Ainda para simplificar considere $t_2 > t_1 > 0$. Então,

$$\frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} = -\cosh t_1 \sinh t_2 + \sinh t_1 \cosh t_2 = \sinh(t_2 - t_1).$$

Considere, u e v vetores que não nulos e nem são do tipo luz. Então, seja θ o ângulo formado entre eles

$$\begin{cases} \frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} = -\cosh \theta & \text{se } u, v \text{ são tempo;} \\ \frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} = \cosh \theta & \text{se } u, v \text{ são espaço;} \\ \frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} = \sinh \theta & \text{se } \text{um é vetor espaço e outro é tempo.} \end{cases}$$

Por conta das relações acima podemos concluir que se u e v são vetores não nulos e ambos são do tipo espaço ou do tipo tempo:

$$|\langle u, v \rangle_1| \geq \|u\|_1 \|v\|_1.$$

Vale a igualdade se u for múltiplo escalar de v . Perceba que esta desigualdade é contrária a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Acreditamos que isso esclareça a "geometria" do espaço em questão.

5 Coquatérnios ou Matrizes 2 por 2

Vamos considerar o anel M_2 das matrizes 2×2 sobre os números \mathbb{R} Reais. Os seus elementos de M_2 , chamados de matrizes, são da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Com a adição termo a termo e multiplicação por escalar tornam este conjunto um espaço vetorial E_{M_2} sobre os \mathbb{R} . Uma base natural para este espaço vetorial são as matrizes

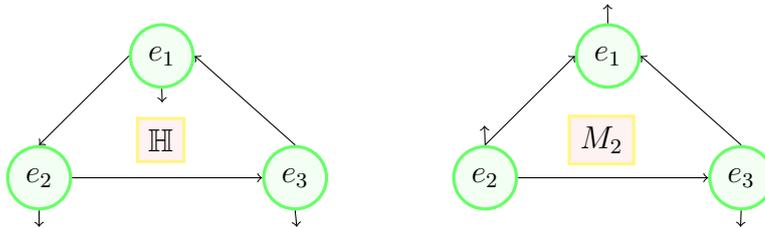
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mas vamos adotar outra base, a qual por causa das analogias que pretendemos estabelecer, explicaram o motivo da escolha. Considere então,

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veja que esta escolha com a multiplicação tradicional entre matrizes obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} e_0^2 = e_0, e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_3^2 = -e_3, \\ e_0e_1 = e_1e_0 = e_1, e_0e_2 = e_2e_0 = e_2, e_0e_3 = e_3e_0 = e_3, \\ e_1e_2 = -e_2e_1 = -e_3, e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1, e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2. \end{cases} \quad (14)$$



Nestas álgebras que possuem unidade: $e_0 = 1$, as setas para cima ou para baixo indicam que $e_i^2 = +e_0$ se a seta aponta para cima e $e_i^2 = -e_0$ se a seta aponta para baixo. A ausência de qualquer menção a e_0 no diagrama deve ser entendida que ele é a unidade da álgebra.

Veja que se

$$x = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad y = b_0e_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,$$

nós temos, graças as relações acima que

$$\begin{aligned} xy = & (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3)e_0 + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_3b_2 + a_2b_3)e_1 \\ & + (a_2b_0 + a_0b_2 + a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_3b_0 + a_0b_3 + a_2b_1 - a_1b_2)e_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Com esta multiplicação podemos verificar que as matrizes 2×2 é uma álgebra associativa com unidade e_0 . De fato, não precisamos verificar isso, pois sabemos que as matrizes 2×2 satisfazem estas propriedades.

Vamos ver quais elementos são invertíveis em E_{M_2} , considere $x = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, o elemento

$$\bar{x} = a_0e_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 \quad (16)$$

é chamado de conjugado de x . Claramente a aplicação que pega x e associa \bar{x} em E_{M_2} é um automorfismo, mais que isso é uma involução em E_{M_2} , isto é,

$$\overline{\overline{xy}} = \overline{yx}.$$

Pela bilinearidade, esta relação só precisa ser verificada pelos pares formados pela base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ e isso pode ser feito usando (14).

Além disso, por (15) e (16), temos

$$x\bar{x} = \bar{x}x = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)e_0. \quad (17)$$

A partir disso podemos concluir que se $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, então $\bar{x}x = x\bar{x}$ (como e_0) comuta com todos os elementos de E_{M_2} . E portanto, $x' = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)^{-1}\bar{x}$ satisfaz $x'x = xx' = e_0$. De fato, nestes casos, podemos chamar x' de x^{-1} .

A aplicação $x \mapsto xe_0$ de \mathbb{R} em E_{M_2} é um homomorfismo de \mathbb{R} no subcorpo $Z_M = \mathbb{R}e_0$. Tal subcorpo Z_M é o centro de E_{M_2} .

Os números reais $2a_0$ e $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2$ são respectivamente chamados de traço e determinante ² da matriz x , e denotados por $\text{tr}(x)$ e $N(x)$, respectivamente. É claro que $x \mapsto \text{tr}(x)$ é uma aplicação linear em E_{M_2} tal que

$$\text{tr}(\bar{x}) = \text{tr}(x).$$

Além disso, por (15)

$$\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx). \quad (18)$$

Daí, temos

$$\text{tr}(sxs^{-1}) = \text{tr}(x) \quad (19)$$

é válido para toda matriz s tal que $\det s \neq 0$, pois $x = (xs^{-1})s$.

Também,

$$N(xy) = N(x)N(y) \quad (20)$$

uma vez que $(xy)(\overline{xy}) = xy\overline{y\bar{x}}$, nos fornece $(xy)(\overline{xy}) = (x\bar{x})(y\bar{y})$, já que $x\bar{x}$ é central.

As matrizes x tais que $\bar{x} = -x$ (ou equivalente, $\text{tr}(x) = 0$) são chamados de matrizes puras. Considere o hiperplano F_{M_2} de E_{M_2} gerado pelos vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$, temos por 19 que

$$sF_{M_2}s^{-1} = F_{M_2} \quad (21)$$

para toda matriz s com $N(s) \neq 0$. E_{M_2} é soma direta de Z_{M_2} e F_{M_2} ; em outras palavras, cada matriz z pode ser escrito de maneira única da forma

$$z = \frac{1}{2} \text{tr}(z)e_0 + \frac{1}{2}(z - \bar{z}),$$

²Considere o quadrilátero convexo, com seus lados consecutivos medindo a, b, c e d . Considere suas diagonais. E seja $0 < \theta \leq \pi/2$ representa um dos ângulos entre as diagonais. Prove que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ se, e somente se, $\theta = \pi/2$. Este problema foi adaptado de um problema EQN de 2023.1 do PROFMAT.

onde $\text{tr}(z)e_0 = z + \bar{z}$ é também chamado de parte escalar de z . Se $z = \alpha e_0 + x$, onde x é uma matriz pura, então $\text{tr}(z) = 2\alpha$ e $N(z) = \alpha^2 + N(x)$ e $x^2 = -N(x)e_0$.

Segue de (18) que a aplicação $(x, y) \mapsto \text{tr}(x\bar{y}) = \text{tr}(y\bar{x})$ é bilinear. Além disso, como $\text{tr}(x\bar{x}) = N(x)$, ela será não degenerada. Portanto, temos uma forma bilinear $O_2(4, \mathbb{R})$ em E_{M_2} . Por (20) temos

$$\|xy\|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2 \tag{22}$$

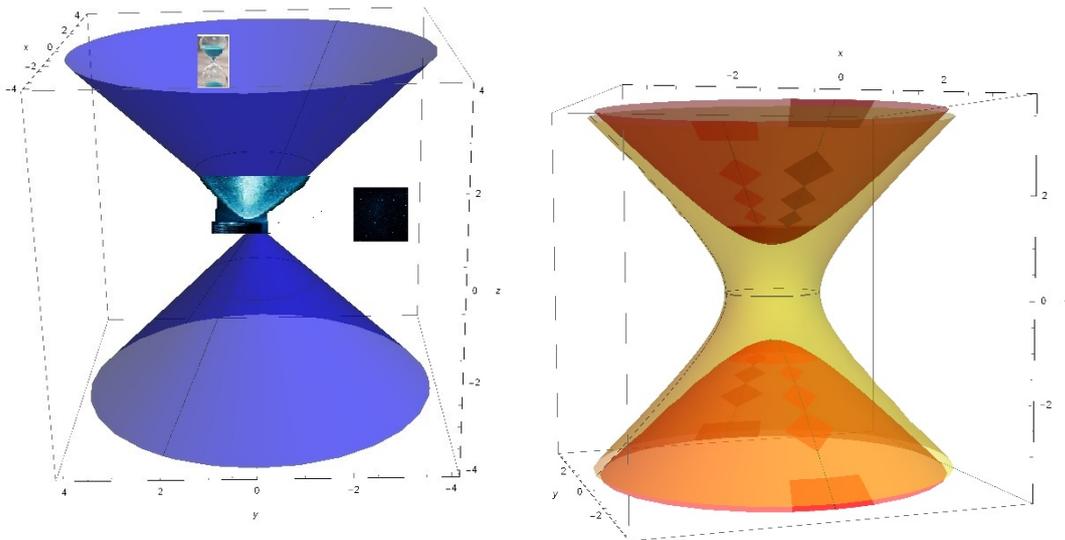
e, como $N(e_0) = 1$, isto nos fornece

$$\|x^{-1}\|_2 = \|x\|_2^{-1}.$$

Estas observações nos mostram que as matrizes com norma 1 é o subgrupo $S_3(M_2)$ do grupo $E_{M_2}^*$ das matrizes com norma não nulas com a operação de multiplicação. E, desde que cada matriz x pode ser escrito da forma $x = \rho z$, com $\rho = \|x\|_2$ e $\|z\|_2 = 1$, isto é fácil de ver que M^* é o produto direto de $O_2(4, \mathbb{R})$ com o grupo multiplicativo \mathbb{R}_+^* .

6 Espaço \mathbb{R}_2^3

(*Refazer toda esta seção*) Vamos estudar o espaço \mathbb{R}_2^3 munido da forma bilinear $\langle x, y \rangle_2 = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, x_3)$. Considere o hiperbolóide de duas folhas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ formado por duas superfícies $H_+^2(0, 1)$ e $H_-^2(0, 1)$ e o hiperbolóide de uma folha $-x^2 - y^2 + z^2 = -1$ (ou espaço anti-de Sitter) $S_1^2(0, 1)$. Juntos estas superfícies farão o papel que a esfera faz no espaço euclidiano. Nestas superfícies, usando a métrica Lorentiziana, as geodésicas são obtidas, por considerar as curvas obtidas pela interseção dos planos que passam pela origem $ax + by + cz = 0$ com os hiperbolóides ($H_+^2(0, 1)$, $H_-^2(0, 1)$ e $S_1^2(0, 1)$).



Vamos aproveitar a definição do produto $\langle x, y \rangle_2 = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$, para escrever o plano, por isso, considere o plano $-ax - by + cz = 0$, e suponha que $a^2 + b^2 \neq 0$,

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}z \right) = 0.$$

Podemos supor que $a^2 + b^2 = 1$ e $c \in \mathbb{R}$. Isolando z e substituindo na equação do hiperbolóide obtemos

$$-x^2 - y^2 + \frac{(x \cos(t) + y \operatorname{sen}(t))^2}{c^2} = \pm 1.$$

Podemos escrever esta equação na forma $u^t A u = \pm 1$, onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\cos^2(t)}{c^2} - 1 & \frac{\cos(t) \operatorname{sen}(t)}{c^2} \\ \frac{\cos(t) \operatorname{sen}(t)}{c^2} & \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{c^2} - 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando os autovalores e autovetores obtemos -1 e $\frac{1-c^2}{c^2}$ sendo, $(-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$, $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ respectivamente. Usando a matriz $P = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix}$. Obtemos

$$P^t A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} - 1 \end{bmatrix}.$$

Temos 3 casos para analisar: (i) $|c| > 1$; (ii) $|c| = 1$ e (iii) $|c| < 1$.

Para (i) ambos os autovalores tem o mesmo sinal negativo. Portanto, só faz sentido, resolver $-x^2 - y^2 + \frac{(x \cos(t) + y \operatorname{sen}(t))^2}{c^2} = -1$. Isto é, só tem solução, interceptado por $S_1^2(0, 1)$. Nesta situação a parametrização adequada é usando $(\cos(s), \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sen}(s))$

Substituindo e calculando, obtemos $z = \frac{\operatorname{sen}(s)}{\sqrt{1-c^2}}$

Obtemos a parametrização

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sen}(s) \cos(t) - \cos(s) \operatorname{sen}(t), \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sen}(s) \operatorname{sen}(t) + \cos(s) \cos(t), \frac{\operatorname{sen}(s)}{\sqrt{1-c^2}} \right)$$

Ao analisar (iii) percebemos que os autovalores tem sinais diferentes.

Vamos dividir a análise em duas partes; quando intercepta em $S_1^2(0, 1)$ e quando intercepta $H_+^2(0, 1)$ e $H_-^2(0, 1)$.

Para $S_1^2(0, 1)$, usamos a parametrização do hipérbole $(\cosh(s), \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \sinh(s))$ vemos que a curva de interseção do plano com $S_1^2(0, 1)$ é dada pela seguinte expressão,

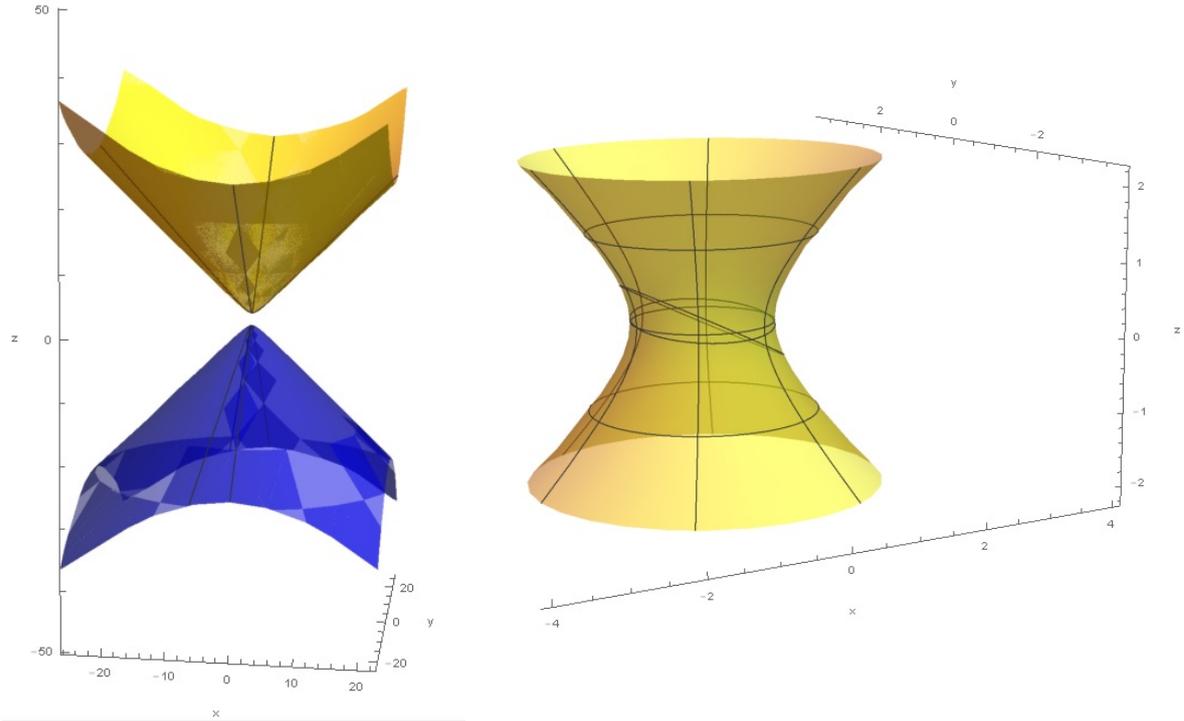
$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \sinh(s) \cos(t) - \cosh(s) \operatorname{sen}(t), \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \sinh(s) \operatorname{sen}(t) + \cosh(s) \cos(t), \frac{\sinh(s)}{\sqrt{1-c^2}} \right).$$

Já a expressão para a interseção com $H_+^2(0, 1)$, precisamos usar a parametrização $(\sinh(s), \frac{c}{\sqrt{c^2-1}} \cosh(s))$ e obtemos a seguinte parametrização

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cosh(s) \cos(t) - \sinh(s) \operatorname{sen}(t), \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cosh(s) \operatorname{sen}(t) + \sinh(s) \cos(t), \frac{\cosh(s)}{\sqrt{1-c^2}} \right).$$

Já a expressão para a interseção com $H_-^2(0, 1)$ usamos a mesma parametrização e obtemos

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cosh(s) \cos(t) - \sinh(s) \operatorname{sen}(t), \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cosh(s) \operatorname{sen}(t) + \sinh(s) \cos(t), -\frac{\cosh(s)}{\sqrt{1-c^2}} \right).$$



Para (ii) a interseção é com o cone.

Em todos os casos precisamos impor a condição extra de que $a^2 + b^2 \neq 0$.

7 Rotações de $O_2(3, \mathbb{R})$

As transformações que preservam a orientação em $O_2(3, \mathbb{R})$ forma um grupo, denotado por, $SO_2(3, \mathbb{R})$. Inicialmente vamos considerar $SO_2(3, \mathbb{R})$ e observe que

Proposição 7.1 Cada rotação no espaço F_{M_2} por matrizes puras podem ser escritos da forma

$$u_s : x \mapsto sxs^{-1} \text{ ou } u_s : x \mapsto -sxs^{-1}$$

dependendo de $\det s > 0$ ou $\det s < 0$. Além disso, $u_s = u_t$, se e somente se, $t = \lambda s$ onde λ é um escalar não nulo.

Vamos iniciar analisando a segunda afirmação; observe que se $sxs^{-1} = s'xs'^{-1}$ para cada matriz pura s e s' , então $(s's^{-1})x = x(s'^{-1}s)$, ou $s'^{-1}s$ comuta com todos as matrizes puras. Como também comuta com os elementos centrais de $Z_M = \mathbb{R}e_0$, necessariamente pertence ao centro.

Para provar a primeira parte, observe que

$$u_{st} = u_s u_t \tag{23}$$

e, nós vamos verificar que isto é exatamente a simetria v em torno do hiperplano, para isso vamos provar que existe um $s \in E$, tal que $v = -u_s$, onde, nos temos

$$v(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \tag{24}$$

para todo $a \in F_{M_2}$ e a invertível. Agora, se y e z são duas matrizes puras, então

$$2 \langle y, z \rangle e_0 = \langle y + z, y + z \rangle - \langle y, y \rangle - \langle z, z \rangle \quad (25)$$

$$= -((y + z)^2 - y^2 - z^2) = -(yz + zy). \quad (26)$$

Pela (24) nos mostra que se $a \in E_{M_2}$ é invertível

$$v(x) = x - 2 \langle x, a \rangle a^{-1} = -axa^{-1}.$$

E isso prova o resultado.

Observe as fórmula 15 e perceba que

$$yz = - \langle y, z \rangle_1 + \vec{y} \bar{\times} \vec{z}$$

onde o produto $\bar{\times}$ é muito similar ao produto vetorial dos vetores \vec{y} e \vec{z} . Vamos definir abaixo:

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) \bar{\times} (z_1, z_2, z_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= (y_2 z_3 - y_3 z_2, y_3 z_1 - y_1 z_3, y_2 z_1 - y_1 z_2). \end{aligned}$$

Considere uma matriz s' com determinante não nulo. Seu versor será

$$s = \frac{\alpha}{|s|} e_0 + \frac{1}{|s|} t,$$

onde t é uma matriz pura. Seja $s = (a, x, y, z) = ae_0 + t$ é tal que $\langle s, s \rangle_2 = 1 = a^2 - x^2 - y^2 + z^2$. Se $|a| = 1$, então $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e, temos que $\det \begin{bmatrix} x & y - z \\ -y - z & x \end{bmatrix} = 0$.

As u_s tem as seguintes possibilidades: Se $\langle s, s \rangle_2 = 1$, então se: $-x^2 - y^2 + z^2 > 0$, $-x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e $-x^2 - y^2 + z^2 < 0$, diremos que u_s será elíptica, parabólica ou hiperbólica, respectivamente. E no caso que $\langle s, s \rangle_2 = -1$ e $-x^2 - y^2 + z^2 < 0$ diremos que u_s é uma loxodromia³.

Ao normalizar s temos duas possibilidades $\langle s, s \rangle_2 = \pm 1$. Suponha que $\langle s, s \rangle_2 = 1$.

- Se u_s for elíptica, então $s = \cos \theta e_0 + \sin \theta w_1$, onde $w_1 = \frac{1}{|t|} t$ e tem coordenadas (x_1, y_1, z_1) , com $-x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 = -1$, logo $w_1^2 = -1$.
- u_s for parabólica. Nesta situação considere $s = e_0 - \alpha u_2$, onde $u_2^2 = 0$.
- u_s for hiperbólica, então $s = \cosh t e_0 + \sinh t u_3$, onde $u_3 = \frac{1}{|t|} t$, logo $u_3^2 = 1$.
- u_s for loxodrômica, então $s = \sinh t e_0 + \cosh t u_4$, onde $u_4 = \frac{1}{|t|} t$, logo $u_4^2 = 1$.

³Loxodromia é a curva que, à superfície da Terra, faz um ângulo constante com todos os meridianos.

Agora no caso em que $\langle s, s \rangle_2 = -1$, neste caso $-x^2 - y^2 + z^2 \geq 0$ não pode ocorrer. O único caso é: $-x^2 - y^2 + z^2 < 0$. Neste caso, $|a|$ pode ser menor que 1, e portanto, não podemos usar cosh. Agora se escrevermos $s = \sinh t e_0 + \cosh t u_4$, podemos determinar uma base ortonormal $\{u_4, v_4, w_4\}$.

A primeira parte da proposição 7.1 nos mostra que todas as rotações em F_{M_2} podem ser escritas na forma $x \mapsto sxs^{-1}$, onde s é um matriz com norma 1. Tendo em mente 23, podemos definir um homomorfismo sobrejetivo $s \mapsto u_s$, de $S_3(M_2)$ em $SO_2(3, \mathbb{R})$, cujo o núcleo é o subgrupo $\{-1, 1\}$ de ordem 2 em $S_3(M_2)$. Isto significa que cada $v \in SO_2(3, \mathbb{R})$, tem uma correspondência duas matrizes $\pm s$, de norma 1, talque $u_s = v$.

Vamos agora exibir uma forma de "selecionar" de maneira "razoável" uma destas duas matrizes.

Proposição 7.2 *Seja $s = \alpha e_0 + t$ um matriz com determinante ± 1 , onde t é uma matriz pura e com determinante não nulo e α é um escalar. Então, se definirmos a aplicação u_s por ser $q \mapsto sqs^{-1}$ se $\det s = 1$ ou por $q \mapsto -sq s^{-1}$ se $\det s = -1$, em ambos os casos a aplicação será uma rotação com eixo a linha D_{Ot} .*

Que D_{Ot} é o eixo de u_s é consequência do fato que matriz λt comuta com t e o escalar, e portanto com s .

Como discutimos acima podemos separar em 2 casos: $\langle s, s \rangle_2 = 1$ e este caso podemos dividi-lo em 3 subcasos:

No primeiro caso, considere o vetor unitário v_1 no plano perpendicular a w_1 e $u_1 = w_1 \bar{\times} v_1$, o qual é igual a uv por causa que $\langle u_1, v_1 \rangle_2 = 0$, então $\{u_1, v_1, w_1\}$ é uma base ortonormal de F_{M_2} com $u_1 v_1 = w_1$, $v_1 w_1 = -u_1$, $w_1 u_1 = v_1$ e $u_1 v_1 = -v_1 u_1$. Podemos ver que o inverso s é $\cos \theta e_0 - \sin \theta w_1$. Vamos verificar que u_s é uma rotação ao redor w_1 de 2θ . Primeiro vamos mostrar que w_1 é mantido fixo

$$\begin{aligned} sw_1s^{-1} &= (\cos \theta e_0 + \sin \theta w_1)w_1(\cos \theta e_0 - \sin \theta w_1) \\ &= (\cos \theta w_1 - \sin \theta e_0)(\cos \theta e_0 - \sin \theta w_1) \\ &= (-\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta)e_0 + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)w_1 \\ &= w_1. \end{aligned}$$

E agora que roda ao redor de w_1 , no plano perpendicular gerado por u_1, v_1 , para isso veja que

$$\begin{aligned} su_1s^{-1} &= (\cos \theta e_0 + \sin \theta w_1)u_1(\cos \theta e_0 - \sin \theta w_1) \\ &= (\cos \theta u_1 + \sin \theta v_1)(\cos \theta e_0 - \sin \theta w_1) \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)u_1 + (\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta)v_1 \\ &= \cos 2\theta u_1 + \sin 2\theta v_1. \end{aligned}$$

Uma conta semelhante prova que

$$qv_1q^{-1} = \cos 2\theta v_1 - \sin 2\theta u_1.$$

No segundo caso vamos verificar que u_s "roda" ao redor de u_2 . Inicialmente veja que o inverso de s é $e_0 + \alpha u_1$. Precisamos de uma base ortonormal - mas ao tentarmos obter isso, podemos determinar v_2 unitário ortogonal a u_2 , mas ao calcularmos $w_2 = u_2 \bar{\times} v_2 = -u_2$. Além disso, outra diferença com o triedo padrão é que $u_2^2 = 0 = w_2^2$. Com respeito a este triedo é fácil verificar que u_s fixa u_2 , mas

$$\begin{aligned} sv_2s^{-1} &= (e_0 - \alpha u_2)v_2(e_0 + \alpha u_2) \\ &= (v_2 + \alpha w_2)(e_0 + \alpha u_2) \\ &= (1 + \alpha)v_2 - 2\alpha w_2. \end{aligned}$$

Por outro lado a transformação u_s fixa obviamente w_2 . Uma explicação do que esta acontecendo seria como se esticasse tanto na direção w_2 que a rotação fica imperceptível.

No terceiro caso, considere o vetor unitário v_3 no plano perpendicular a u_3 e $w_3 = u_3 \bar{\times} v_3$, o qual é igual a $u_3 v_3$ por causa que $\langle u_3, v_3 \rangle_2 = 0$, então $\{u_3, v_3, w_3\}$ é uma base ortonormal de F_{M_2} com $u_3 v_3 = w_3$, $v_3 w_3 = u_3$, $w_3 u_3 = v_3$ e $u_3 v_3 = -v_3 u_3$. Podemos escrever s da forma: $s = \cosh \tau e_0 - \sinh \tau u_3$. Além disso, $|u_3| = 1$ e $u_3^2 = 1$. Vamos verificar que u_s é uma rotação ao redor u_3 com argumento 2τ . Podemos verificar que u_s fixa u_3 , mas antes vamos verificar que roda em torno de u_3 no plano perpendicular v_3, w_3 . Para isso, veja que o inverso de s é $\cosh \tau e_0 - \sinh \tau u_3$, daí

$$\begin{aligned} sv_3s^{-1} &= (\cosh \tau e_0 + \sinh \tau u_3)v_3(\cosh \tau e_0 - \sinh \tau u_3) \\ &= (\cosh \tau v_3 - \sinh \tau w_3)(\cosh \tau e_0 - \sinh \tau u_3) \\ &= (\cosh^2 \tau + \sinh^2 \tau)v_3 + (-\sinh \tau \cosh \tau + \sinh \tau \cosh \tau)w_3 \\ &= \cosh 2\tau v_3 - \sinh 2\tau w_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sw_3s^{-1} &= (\cosh \tau e_0 + \sinh \tau u_3)w_3(\cosh \tau e_0 - \sinh \tau u_3) \\ &= (\cosh \tau w_3 - \sinh \tau v_3)(\cosh \tau e_0 - \sinh \tau u_3) \\ &= (-\sinh \tau \cosh \tau - \sinh \tau \cosh \tau)v_3 + (\cosh^2 \tau + \sinh^2 \tau)w_3 \\ &= -\sinh 2\tau v_3 + \cosh 2\tau w_3. \end{aligned}$$

No caso $\langle s, s \rangle_2$. Considere o vetor unitário v_4 no plano perpendicular a u_4 e $w_4 = u_4 \bar{\times} v_4$, o qual é igual a $u_4 v_4$ por causa que $\langle u_4, v_4 \rangle_2 = 0$, então $\{u_4, v_4, w_4\}$ é uma base ortonormal de F_{M_2} com $u_4 v_4 = w_4$, $v_4 w_4 = u_4$, $w_4 u_4 = v_4$ e $u_4 v_4 = -v_4 u_4$. Podemos escrever s da forma: $s = \sinh t e_0 - \cosh t u_4$. Além disso, $|u_4| = 1$ e $u_4^2 = 1$. Vamos verificar que u_s é uma rotação ao redor u_4 com argumento $2t$. Podemos verificar que u_s fixa u_4 , mas antes vamos verificar que roda em torno de u_4 no plano perpendicular v_4, w_4 . Para isso, veja que o inverso de s é $\sinh t e_0 - \cosh t u_4$, daí

$$\begin{aligned} -su_4s^{-1} &= -(\sinh t e_0 + \cosh t u_4)u_4(\sinh t e_0 - \cosh t u_4) \\ &= -(\sinh t u_4 + \cosh t e_0)(\sinh t e_0 - \cosh t u_4) \\ &= -(\sinh^2 t - \cosh^2 t)u_4 - (-\sinh t \cosh t + \sinh t \cosh t)e_0 \\ &= u_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -sv_4s^{-1} &= -(\sinh t e_0 + \cosh t u_4)v_4(\sinh t e_0 - \cosh t u_4) \\
 &= -(\sinh t v_4 - \cosh t w_4)(\sinh t e_0 - \cosh t u_4) \\
 &= -(\cosh^2 t + \sinh^2 t)v_4 - (-\sinh t \cosh t - \sinh t \cosh t)w_4 \\
 &= -\cosh 2t v_4 + \sinh 2t w_4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -sw_4s^{-1} &= -(\sinh t e_0 + \cosh t u_4)w_4(\sinh t e_0 - \cosh t u_4) \\
 &= -(\sinh t w_4 - \sinh t v_4)(\sinh t e_0 - \cosh t u_4) \\
 &= -(-\sinh t \cosh t - \sinh t \cosh t)v_4 - (\cosh^2 t + \sinh^2 t)w_4 \\
 &= \sinh 2t v_4 - \cosh 2t w_4.
 \end{aligned}$$

Agora considere $s = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & a_2 - a_3 \\ a_2 + a_3 & a_0 - a_1 \end{bmatrix}$ uma matriz 2×2 na base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ e vamos determinar a matriz de ϕ_s , por avaliar ϕ_s em e_1, e_2, e_3 . Obtemos

$$[\phi_s] = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & -2ad - 2bc & 2ac + 2bd \\ 2ad - 2bc & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2ac - 2bd & -2ab - 2cd & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

Podemos também caracterizar estes operadores de forma contrária. Isto é, dado o operador obter o eixo de rotação do mesmo e o ângulo de rotação. A forma mais simples de obter o eixo de rotação de A é considerar o seguinte operador

$$1/2(A - I_2 A^t I_2).$$

O qual será um operador anti-simétrico, o núcleo de tal operador estará sobre o eixo de rotação a matriz A . Examinando a natureza do vetor que gera o eixo de rotação (tempo, luz e espaço), já sabemos a natureza do operador, sendo que no caso em que o vetor é do tipo espaço, precisamos ainda observar se $\text{tr}(A) - 1 > 0$ e neste caso A é tipo hiperbólico e caso $\text{tr}(A) - 1 < 0$ e neste caso o operador será do tipo loxodrômico.

Examinando os autovalores temos

- Se os autovalores são complexos então A , então A será do tipo elíptico e o Ângulo θ de rotação será dado pela relação $\cos \theta = 1/2(\text{tr}(A) - 1)$;
- Se os autovalores diferentes de 1, são reais e positivos, então A é hiperbólica;
- Se os autovalores diferente de 1, forem negativos, então A é loxodrômica;
- Se todos os autovalores forem iguais a 1, então A é do tipo parabólica.

Segue da generalização da proposição 3.1 para espaços pseudo-euclidianos que qualquer rotação de \mathbb{R}_2^4 é o produto de 0, 2 ou 4 reflexões. O número exato não é importante – o que realmente queremos é uma maneira de representar reflexões por matrizes, como trampolim para a representação de rotações por M_2 .

Não surpreendentemente, cada reflexão é especificada pelo matriz ortogonal ao hiperplano de reflexão. Mais surpreendentemente, uma rotação é especificada por apenas duas matrizes, independentemente do número de reflexões necessárias para a compor.

Proposição 7.3 Uma reflexão do \mathbb{R}_2^4 no hiperplano que passa através da origem e é ortogonal a matriz unitária u é a aplicação que toma q e envia em $-u\bar{q}u$, se $\|u\|_2 = 1$ ou envia o q em $u\bar{q}u$ se $\|u\|_2 = -1$.

Precisamos analisar ambos os casos, vamos começar admitindo que u satisfaz $\|u\|_2 = -1$. Primeiro observe que: (b) aplicação $q \mapsto u\bar{q}u$ inverte o sentido de e_0 e mantém fixo F_{M_2} ; (b) Veja que

$$\|u\bar{q}u\|_2 = \|u\|_2 \|\bar{q}\|_2 \|u\|_2 = \|q\|_2,$$

Além disso, se $\|u\|_2 = -1$ então $u \mapsto u\bar{u}u = -u$. Além do mais, $e_1u \mapsto u\bar{e}_1\bar{u}u = -u\bar{u}e_1u = e_1u$. Da mesma forma: $e_2u \mapsto e_2u$ e $e_3u \mapsto e_3u$. Portanto, a aplicação inverte o sentido na direção e_0u e mantém fixo o subespaço gerado por: e_1u, e_2u e e_3u . Os vetores e_1u, e_2u e e_3u são os geradores do plano perpendicular a u . O que demonstra nosso resultado. O caso $\|u\|_2 = 1$ se analisa de forma semelhante.

Proposição 7.4 Qualquer rotação v do \mathbb{R}_2^4 ao redor de O é uma aplicação da forma $q \mapsto vqw$, onde v e w são matrizes unitárias.

Como u é uma rotação, então existe um número para de vetores unitários u_1, u_2, \dots, u_{2n} tais que u é o produto das reflexões em torno dos planos perpendiculares a estes vetores. Logo,

$$q \mapsto \epsilon u_{2n} \cdots \bar{u}_3 u_2 \bar{u}_1 q \bar{u}_1 u_2 \bar{e}_3 \cdots u_{2n}$$

onde $\epsilon = \pm 1$ e como as matrizes não são comutativas, segue que devem existir uma matriz u e v tais que a nossa rotação é da forma: $q \mapsto uqv$.

Além disso, digamos que existem u, u' e v, v' vetores tais que $q \mapsto uqv$ e $q \mapsto u'qv'$ são iguais, então $|u| = \lambda|u'|$ e $|v| = 1/\lambda|v'|$, onde λ é um escalar não nulo. De fato, digamos que $uqv = u'qv'$, logo, $u^{-1}u'q = qv'v^{-1}$, para toda matriz q . Se $q = e_0$, então $u^{-1}u' = u^{-1}u' = w$ e w comuta com todos os elementos, logo deve ser um elemento central.

A aplicação $(u, v) \in S_3(M_2) \times S_3(M_2)$ na rotação $q \mapsto v^{-1}qw \in SO_2(4, \mathbb{R})$ é um homomorfismo de grupo $\varphi : S_3(M_2) \times S_3(M_2) \rightarrow SO_2(4, \mathbb{R})$

Este homomorfismo é sobrejetor, porque cada rotação de \mathbb{R}_2^4 pode ser expresso na forma $q \mapsto vqw^{-1}$, pelo que observamos as rotações (v, w) nos dá a mesma rotação $(-v, -w)$.

Veja que se (v, w) esta no kernel de φ , se e somente se, $q \mapsto v^{-1}qw$ é o operador identidade, daí

$$ve_0w^{-1} = 1 \text{ então } v = w.$$

Daí a aplicação é de fato $q \mapsto vqv^{-1}$, a qual sabemos que se fixa o eixo real e roda no espaço das matrizes puras, se e somente se, $v = 1$ ou $v = -1$, daí o kernel de φ só pode ser dois elementos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

8 Modelos Hiperbólicos

Nesta seção vou jogar um pouco de luz sobre como transferir interpretar os diversos modelos do plano hiperbólico.

Esta seção foi fortemente inspirada na página [11].

Em geral, existem várias pseudoesferas – superfícies com curvatura gaussiana negativa constante. Estas superfícies que podem ser incorporadas no espaço tridimensional sob a métrica euclidiana padrão e , portanto, podem ser transformadas em modelos físicos tangíveis. Destes, o tractóide (muitas vezes chamado de pseudoesfera) é o mais conhecido; usar o tractóide como modelo do plano hiperbólico é análogo a usar um cone ou cilindro como modelo do plano euclidiano. No entanto, como é conhecido, não é possível identificar todo o plano hiperbólico não pode ser identificado com o espaço euclidiano desta forma. Por outro lado, existem alguns modelos que são mais convenientes para explorar abstratamente a geometria hiperbólica.

Nesta linha, existem quatro modelos comumente usados para geometria hiperbólica: o modelo de Klein, o modelo de disco de Poincaré, o modelo de semiplano superior de Poincaré e o modelo de Lorentz ou hiperbolóide. Esses modelos definem um plano hiperbólico que satisfazem os axiomas de uma geometria hiperbólica. Apesar dos nomes, os três primeiros mencionados acima foram introduzidos como modelos de espaço hiperbólico por Beltrami, não por Poincaré ou Klein. Todos estes modelos são extensíveis a mais dimensões.

8.1 O modelo Beltrami-Klein

O modelo Beltrami-Klein, também conhecido como modelo de disco projetivo, modelo de disco Klein e modelo Klein, recebeu o nome de Eugenio Beltrami e Felix Klein.

Para as duas dimensões este modelo utiliza o interior do círculo unitário para o plano hiperbólico completo, e as cordas deste círculo são as retas hiperbólicas.

Este modelo tem a vantagem de que as retas hiperbólicas são segmentos de retas euclidianas, mas a desvantagem é que os ângulos são distorcidos (o mapeamento não é conforme) e também os círculos não são representados como círculos.

A distância neste modelo é metade do logaritmo da razão cruzada, que foi introduzida por Arthur Cayley na geometria projetiva.

8.2 O modelo do disco de Poincaré

O modelo de disco de Poincaré, também conhecido como modelo de disco conforme, também emprega o interior do círculo unitário, mas as retas são representadas por arcos de círculos ortogonais ao círculo limite, mais os diâmetros do círculo limite.

Este modelo preserva ângulos e, portanto, é conforme. Todas as isometrias dentro deste modelo são, portanto, transformações de Möbius.

Os círculos que estão totalmente dentro do disco permanecem círculos, embora o centro

euclidiano do círculo esteja mais próximo do centro do disco do que o centro hiperbólico do círculo.

Horociclos são círculos dentro do disco que são tangentes ao círculo limite, menos o ponto de contato.

Hiperciclos são cordas abertas e arcos circulares dentro do disco que terminam no círculo limite em ângulos não ortogonais.]

8.3 O modelo semiplano superior de Poincaré

O modelo de meio plano de Poincaré considera metade do plano euclidiano, delimitado por uma reta B do plano, como um modelo do plano hiperbólico. A reta B não está incluída no modelo.

O plano euclidiano pode ser considerado um plano com o sistema de coordenadas cartesianas e o eixo x é considerado a reta B e o meio plano é a metade superior ($y > 0$) deste plano.

As retas hiperbólicas são então semicírculos ortogonais a B ou raios perpendiculares a B .

O comprimento de um intervalo em um raio é dado pela medida logarítmica, portanto é invariante sob uma transformação homotética

$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda > 0.$$

Tal como o modelo do disco de Poincaré, este modelo preserva ângulos e, portanto, é conforme. Todas as isometrias dentro deste modelo são, portanto, transformações de Möbius do plano.

8.4 O modelo hiperbolóide

O modelo hiperbolóide ou modelo de Lorentz emprega um hiperbolóide de revolução bidimensional (de duas folhas, mas usa apenas uma), este espaço é embutido no espaço de Minkowski tridimensional. Este modelo é geralmente creditado a Poincaré, mas Reynolds diz que Wilhelm Killing usou este modelo em 1885.

Este modelo tem aplicação direta à relatividade especial, já que o espaço 3 dimensional de Minkowski é um modelo para o espaço-tempo, no qual suprimimos uma das dimensão espacial. Pode-se tomar o hiperbolóide para representar os eventos (posições no espaço-tempo) que vários observadores em movimento inercial, a partir de um evento comum, alcançarão em um tempo próprio fixo. Desta maneira, a distância hiperbólica entre dois pontos no hiperbolóide pode então ser identificada com a rapidez relativa entre os dois observadores correspondentes.

O modelo permite uma generalização para uma dimensão adicional: uma geometria hiperbólica tridimensional hiperbólica de 3 espaços relaciona-se ao espaço 4 dimensional de Minkowski.

8.5 O modelo hemisférico

O modelo hemisférico não é frequentemente utilizado como modelo por si só, mas funciona como uma ferramenta útil para visualizar transformações entre os outros modelos.

O modelo hemisférico usa a metade superior da esfera unitária: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $z > 0$.

As retas hiperbólicas são semicírculos ortogonais ao círculo limite do hemisfério.

O modelo hemisférico faz parte de uma esfera de Riemann, e diferentes projeções fornecem diferentes modelos do plano hiperbólico:

8.6 O Modelo de Gans

Em 1966, David Gans propôs um modelo hiperbolóide achatado na revista *American Mathematical Monthly*. É uma projeção ortográfica do modelo hiperbolóide no plano xy . Este modelo não é tão amplamente utilizado como outros modelos, mas mesmo assim é bastante útil na compreensão da geometria hiperbólica.

Ao contrário dos modelos Klein ou Poincaré, este modelo utiliza todo o plano euclidiano. Neste modelo as retas neste modelo são os ramos de uma hipérbole.

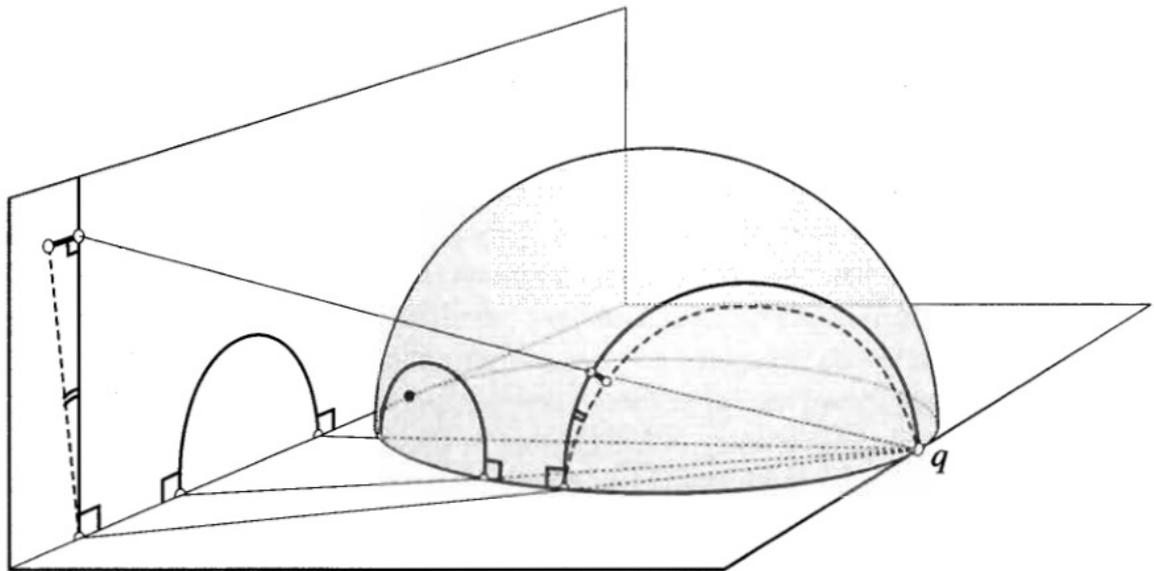
9 Conexão entre os modelos

Vou explicar como fazer algumas conexões entre estes modelos. Estas conexões não seguem a inspiração desta seção.

- Considere \mathbb{R}_1^3 que é o espaço do \mathbb{R}^3 com a métrica de Lorentz-Minkowski, neste espaço considere a parte superior $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$. As geodésicas nesta variedade, com esta métrica são obtidos pela interseção da planos que passam pela origem e a interceptam. Considere o disco de raio um, no plano $z = 1$. E consideram a projeção através o ponto $(0, 0, -1)$ na parte superior do parabolóide. Esta função é um bijeção entre o disco e o parabolóide. As geodésicas da variedade são associadas, pela bijeção, a arcos de círculos que estão ortogonais as bordas do disco, e/ou a diâmetros do disco. Este disco é o plano de Poincaré.

A projeção estereográfica de através do hemisfério sul $(0, 0, -1)$ no plano $z = 0$ projeta pontos correspondentes no modelo de disco de Poincaré.

- Dado o disco de Poincaré, no plano $z = 0$ a projeção estereográfica de $(0, 0, -1)$ na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$. Leva arcos de círculo ortogonais a borda do disco em semicírculos na esfera que são ortogonais a borda da semicircunferência. Considere a projeção estereográfica de $q = (-1, 0, 0)$ no plano $x = 1$ projeta pontos correspondentes no modelo semiplano de Poincaré.
- Projeção através do ponto $(0, 0, 0)$ no plano $z = 1$ em $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$ projeta pontos correspondentes no modelo Beltrami - Klein.



- *Projeção central da esfera no plano $z = 1$ projeta pontos correspondentes no modelo Gans.*

Bibliografia

- [1] DIEUDONNÉ, J., *Linear Algebra and Geometry*, Hermann, 1969. ISBN:2705656545, 9782705656546
- [2] HALL, Brian C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol.222 (2nd ed.), Springer, (2015). doi:10.1007/978-3-319-13467-3, ISBN 978-3319134666.
- [3] BARBOSA, J. L. M., *Geometria Hiperbólica*, Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística da UFG, 2002.
- [4] LYMBERPOULOS, A.; COUTO, I. T., *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*, Coleção Textos Universitário, SBM, 2018. ISBN:9788583371397
- [5] HOFFMAN, K.; KUNZE, R., *Linear Algebra*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1971).
- [6] STILLWELL, J., *Naive Lie Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008. ISBN: 978-0-387-78214-0.
- [7] NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [8] QUATERNION. Na: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2006. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>>. Acesso em: 21 fev. 2024.
- [9] SPLIT-QUATERNION. Na: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2006. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Split-quaternion>>. Acesso em: 21 fev. 2024.
- [10] HYPERBOLIC SPACE. Na: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2006. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_space>. Acesso em: 21 fev. 2024.
- [11] HYPERBOLIC GEOMETRY. Na: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2006. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry#:~:text=The%20hyperbolic%20plane%20is%20a,a%20constant%20negative%20Gaussian%20curvature.>. Acesso em: 04 jul. 2024.