XI Bienal de Matemática 2024

Universidade Federal de São Carlos

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857} \qquad 142 + 857 = 999$$

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857} \qquad 14 + 28 + 57 = 99$$

Dízimas periódicas e o teorema de Etiénne Midy

João Carlos Vieira Sampaio

DM – UFSCar

Dízimas periódicas e o teorema de Etiénne Midy

Dízimas periódicas, seus períodos e seus comprimentos

Sampaio, João Carlos Vieira [1]

Resumo: *Ao explorar dízimas periódicas surge a pergunta sobre como determinar o comprimento (número de dígitos) do período da dízima periódica sem que conheçamos quais são os dígitos da dízima. Isto é possível com o uso de congruências módulo* m*, um conceito a ser revisado brevemente no minicurso. Por exemplo, de um teorema de Gauss [5], a dízima periódica de fração geratriz* $1/31$ *terá comprimento* 15 *porque* $10^{15} \equiv 1 \pmod{31}$*, e* 15 *é o primeiro inteiro positivo* ℓ *tal que* $10^{\ell} \equiv 1 \pmod{31}$*. Dentre outras propriedades de dízimas periódicas a serem exploradas neste minicurso, temos o teorema de Etiénne Midy [6, 12], que em 1835 demonstrou que considerando-se por exemplo* $1/7 = 0,142857$*, temos* $142 + 857 = 999$*, esta soma sendo um número descrito por uma fileira de noves, e que esta propriedade também é válida para todas as frações irredutíveis* n/p*, em que o denominador* p *é primo,* $p \geq 7$*, e a dízima periódica correspondente se subdivide em dois blocos de mesmo comprimento. Em 2004 Brian Ginsberg [6] chamou a atenção para o fato de que, considerando-se por exemplo a fração "unitária"* $1/7 = 0,142857$*, temos* $14 + 28 + 57 = 99$*, ainda um resultado descrito por uma fileira de noves, e que esta propriedade é válida para frações* $1/p$ *em que o denominador* p *é primo e o período da dízima pode ser subdividido em três blocos de comprimentos iguais.*

Palavras-chave: *dízimas periódicas, comprimento de uma dízima, teorema de Midy.*

[1] Departamento de Matemática. CCET–UFSCar.

Sumário

1. Introdução

A ideia para este minicurso surgiu a partir de pequena pesquisa do autor para responder a uma indagação de alunos da disciplina *Introdução à Análise para Licenciandos*, do curso noturno de Licenciatura em Matemática da UFSCar, quando o autor o lecionava nos anos 2015 e 2016: como determinar o comprimento do período de uma dízima periódica, antes de levar a termo o cálculo aritmético da dízima pelo tradicional algoritmo da longa divisão na chave?

Ao longo do texto, usaremos a notação $a_1a_2\dots a_n$ não para denotar um produto de n termos, mas sim para denotar um inteiro positivo descrito no sistema decimal posicional por seus dígitos $a_1, a_2, \dots, a_n$, isto é, $a_1a_2\dots a_n = a_1\cdot 10^{n-1} + a_2\cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n$. Outras notações similares usadas são por exemplo $d_1\dots d_\ell$, $b_1\dots b_m$, etc.

Tal como na literatura de matemática elementar sobre dízimas periódicas, também temos a notação para uma dízima periódica simples no sistema decimal fracionário,

$$0,\overline{d_1\dots d_\ell} = 0,{\color{red}d_1\dots d_\ell}\,{\color{blue}d_1\dots d_\ell}\,d_1\dots d_\ell\dots$$

O número real $0,\overline{d_1\dots d_\ell}$ é chamado de *dízima periódica simples*. Como é sabido, fato estabelecido a partir do século 18,

$$0,\overline{d_1\dots d_\ell} = \frac{d_1\dots d_\ell}{\underbrace{99\dots 9}_{\ell\text{ dígitos}}} = \frac{d_1\dots d_\ell}{10^\ell - 1}.$$

Esta última fração de inteiros positivos é chamada fração *geratriz da dízima periódica*.

Também temos dízimas periódicas compostas, da forma

$$\begin{aligned} & a_1\dots a_n, b_1\dots b_m\overline{d_1\dots d_\ell} \\ &= a_1\dots a_n + \frac{b_1\dots b_m}{10^m} + \frac{d_1\dots d_\ell}{10^m(10^\ell - 1)} \end{aligned}$$

sendo que pode ser demonstrado que

$$\begin{aligned} & a_1\dots a_n, b_1\dots b_m\overline{d_1\dots d_\ell} \\ &= \frac{a_1\dots a_nb_1\dots b_md_1\dots d_\ell - a_1\dots a_nb_1\dots b_m}{\underbrace{99\dots 9}_{\ell\text{ dígitos}}\underbrace{00\dots 0}_{m\text{ dígitos}}} \end{aligned}$$

Na expressão $a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_m\overline{d_1 \ldots d_\ell}$, dizemos que $b_1 \ldots b_m$ é a *parte não periódica* da dizima. Em ambos os casos de dízimas periódicas chamaremos o inteiro $d_1 \ldots d_\ell$ de parte periódica (ou período) da dízima, sendo seu comprimento igual a ℓ quando este for o menor possível.

É possível determinar o comprimento ℓ de uma dízima periódica a partir de sua fração geratriz, sem termos que visualizar a dízima periódica para contar seu número de dígitos? A resposta a esta pergunta é afirmativa e será um dos objetos de estudo deste minicurso.

A representação decimal de frações comuns, tão disseminada nos dias atuais, surgiu somente no século 16 com trabalho seminal de Simon Stevin, tendo sido aperfeiçoada posteriormente por John Napier, e a partir de então estudada em pormenores por matemáticos influentes dos séculos posteriores. John Wallis, Johann Lambert, Johann Bernoulli são alguns dos pioneiros desses estudos. Carl Friedrich Gauss, em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae* [5], publicado em 1801, abordando o assunto com ferramentas da teoria de congruências módulo m que recém criara, respondeu a importantes conjecturas de seus antecessores. Detalhes históricos sobre este período, com maior riqueza de dados, podem ser encontrados em Bullyinck [1].

Nada deste minicurso foi criado somente agora. Os fatos estabelecidos neste minicurso, apesar de desconhecidos para muitos, vem sendo desenvolvidos desde o século 16.

No século 19, o professor de matemática francês Etiénne Midy divulgou uma propriedade notável de certas dízimas periódicas, um tópico deste minicurso tratado no capítulo 6.

Grande desenvolvimento de estudos sobre dízimas periódicas foi levado adiante, até os séculos 20 e 21, e neste minicurso fazemos uma coleta de alguns dos frutos desses estudos, através de leituras de trabalhos citados nas referências ao final.

2. A representação decimal de números racionais não negativos

Neste capítulo revisamos a aritmética elementar da representação decimal de números decimais. Trataremos de revisar porque cada número racional positivo pode ter uma representação decimal finita ou com uma infinidade de dígitos, na forma de uma dízima periódica.

2.1 Frações decimais ou de representação decimal finita

Neste capítulo (e ao longo do minicurso) admitiremos familiaridade com números racionais.

Os números racionais são as frações de inteiros $\frac{a}{b}$ sendo a e b inteiros com $b \neq 0$. Quando a e b são inteiros positivos, o número racional $\frac{a}{b}$ é também chamado de fração comum. Neste minicurso estudaremos aspectos da representação decimal de frações comuns.

Sendo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ duas frações de inteiros, vamos admitir familiaridade com os seguintes conceitos.

1. (Igualdade) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$.
2. (Adição) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
3. (Multiplicação) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Sendo a um inteiro a fração $\frac{a}{1}$ é identificada com o inteiro a, ou seja, $\frac{a}{1} = a$.

Na fração $\frac{a}{b}$, a é chamado *numerador* da fração e b é chamado *denominador*.

Definição 2.1. *Chamaremos de* frações decimais *ou de* frações de representação decimal finita *as frações de inteiros não negativos que podem ser representadas na forma* $\frac{a}{10^n}$ *sendo* a *um inteiro não negativo e* $n \geq 0$ *um número natural.*

No restante do texto deste minicurso, a notação $a_1 a_2 \ldots a_n$ (bem como outras similares), denota um inteiro positivo descrito no sistema decimal posicional por seus *dígitos* ou *algarismos* (numerais de 0 a 9) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é,

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n.$$

Por exemplo, 8253 e 50072 representam os inteiros $8253 = 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$ e $50072 = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10 + 2$.

A notação $0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ é notação habitual para a fração decimal própria (isto é, entre 0 e 1)

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} &= \frac{10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \cdots + 10 a_{n-1} + a_n}{10^n} \\ &= \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}{10^n} \end{aligned}$$

que será zero apenas quando todos os dígitos forem iguais a zero.

Por exemplo, $0,528 = \frac{528}{10^3}$ e $0,0023 = \frac{0023}{10^4} = \frac{23}{10^4}$.

A notação $b_1 b_2 \ldots b_{s-1} b_s, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ representa a soma

$$b_1 b_2 \ldots b_{s-1} b_s + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}{10^n}$$

que é também igual ao número racional

$$\frac{b_1 b_2 \ldots b_{s-1} b_s \times 10^n}{10^n} + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}{10^n} = \frac{b_1 b_2 \ldots b_{s-1} b_s a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}{10^n}$$

sendo a representação habitual de uma fração decimal imprópria (isto é, ≥ 1).

Por exemplo,

$$2356,403 = 2356 + \frac{403}{10^3} = \frac{2356 \times 10^3}{10^3} + \frac{403}{10^3} = \frac{2\,356\,000}{10^3} + \frac{403}{10^3} = \frac{2\,356\,403}{10^3}$$

No quadro seguinte temos mais alguns exemplos de frações decimais.

$24,254 = \frac{24254}{10^3}$	$\frac{1}{8} = \frac{125}{10^3} = 0,125$	$48 = \frac{48}{10^0} = 48,0$
$0,0001 = \frac{1}{10^4}$	$3,1416 = \frac{31416}{10^4}$	$\frac{3}{4} = \frac{75}{10^2} = 0,75$

Revisando alguns dos exemplos dados,

$$\begin{aligned} 24,254 &= 24 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} \\ &= 24 + \frac{254}{10^3} = 24 + \frac{254}{1000} \\ &= \frac{24254}{1000}. \end{aligned}$$

$$0,125 = 0 + \frac{125}{10^3} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

Cada fração comum $\frac{a}{b}$ é igual a uma fração *irredutível* $\frac{a'}{b'}$, isto é, com a' e b' inteiros primos entre si.

De fato, sendo $d = \mathrm{mdc}(a, b)$ temos $a = da'$ e $b = db'$, para certos naturais a' e b'. Daí $\frac{a}{b} = \frac{da'}{db'} = \frac{a'}{b'}$. Agora temos a' e b' sem fatores positivos em comum (exceto pelo fator 1), isto é, $\mathrm{mdc}(a', b') = 1$, e dizemos que $\frac{a'}{b'}$ é a *forma reduzida* ou *forma irredutível* da fração $\frac{a}{b}$. Uma fração está na forma reduzida ou na forma irredutível quando numerador e denominador são primos entre si.

Por exemplo, procurando a forma irredutível da fração $\frac{225}{1296}$, observamos primeiramente que $225 = 3^2 \cdot 5^2$ e $1296 = 2^4 \cdot 3^4$. Assim sendo $\mathrm{mdc}(225, 1296) = 3^2 = 9$, e temos

$$\frac{225}{1296} = \frac{\cancel{3^2} \cdot 5^2}{\cancel{3^2} \cdot 3^2 \cdot 2^4} = \frac{5^2}{3^2 \cdot 2^4} = \frac{25}{144},$$

sendo 25 e 144 primos entre si, ou seja, $\frac{25}{144}$ é a forma irredutível da fração $\frac{225}{1296}$.

A origem histórica de alguns teoremas deste capítulo nos é dada pelo trabalho de Maarten Bullynck [1], que cita o próximo teorema como sendo de autoria de Joahann Lambert[1]

Teorema 2.1 (J.H. Lambert, 1753). *Sejam a e b inteiros positivos, primos entre si. A fração $\frac{a}{b}$ é decimal (ou de representação decimal finita) se, e somente se, $b = 2^m \cdot 5^n$ para certos expoentes naturais m e n.*

Demonstração. Se $\frac{a}{b}$ for fração decimal, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^r}$ para algum natural c, e algum expoente natural r, e então $bc = a \cdot 10^r$.

Daí, b é divisor de $a \cdot 10^r$. Como b e a são primos entre si, deduzimos que b é divisor de $10^r = 2^r \cdot 5^r$. Isto é deduzido formalmente em Hefez [7].

Logo b tem a forma $2^m 5^n$ com m e n naturais.

Reciprocamente, se $b = 2^m 5^n$, supondo $m \geq n$, então $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m 5^n} = \frac{5^{m-n} a}{2^m 5^m} = \frac{c}{10^m}$, logo $\frac{a}{b}$ é fração decimal.

O caso $m \leq n$ é análogo. □

Aqui e ao longo do texto o símbolo □ indica a conclusão de uma demonstração.

[1] Johann Lambert é dado historicamente como primeiro autor de uma demonstração de que π é irracional.

2.2 Dizimas periódicas na representação decimal de frações não decimais

Iniciamos esta seção revisando o conceito de soma de uma progressão geométrica de razão q, com uma infinidade de termos, quando $|q| < 1$.

Da matemática do ensino médio, sendo a e q números reais, $q \neq 1$, temos a soma dos $n+1$ termos da progressão geométrica a, aq, ..., aq^n, dada por

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} \tag{2.1}$$

A fórmula 2.1 pode ser deduzida como consequência da identidade polinomial

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}$$

Se $|q| < 1$, à medida que n cresce temos q^{n+1} tornando-se arbitrariamente próximo de zero. Este fato é denotado escrevendo-se $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.

Assim, a partir da igualdade 2.1, concluímos que a soma com uma infinidade de termos, chamada *soma da série geométrica infinita*,

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} aq^k$$

pode ser avaliada (calculada) como sendo

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots &= \lim_{n\to+\infty}(a + aq + \cdots + aq^n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a(1-\cancelto{0}{q^{n+1}})}{1-q} = \frac{a}{1-q} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Em posse dos fatos anteriores, como um exemplo de ocorrência de uma *dízima periódica*, vamos deduzir que a fração $\dfrac{274}{999}$ tem uma representação decimal com um número infinito de algarismos à direita da vírgula na representação. De fato,

$$\frac{274}{999} = \frac{274}{10^3-1} = \frac{\frac{274}{10^3}}{\frac{10^3-1}{10^3}} = \frac{\frac{274}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{a}{1-q}, \text{ sendo } a = \frac{274}{10^3} \text{ e } q = \frac{1}{10^3}$$

Como $0 < q < 1$, temos $\dfrac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$, na forma de uma soma de uma progressão geométrica com uma infinidade de termos, conforme deduzido anteriormente em 2.2.

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\frac{274}{999}=\frac{\frac{274}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}&=\frac{274}{10^3}+\frac{274}{10^3}\cdot\frac{1}{10^3}+\frac{274}{10^3}\cdot\frac{1}{10^6}+\frac{274}{10^3}\cdot\frac{1}{10^9}+\cdots\\&=\frac{274}{10^3}+\frac{274}{10^6}+\frac{274}{10^9}+\frac{274}{10^{12}}+\cdots\\&=0,274+0,000\,274+0,000\,000\,274+0,000\,000\,000\,274+\cdots\\&=0,274\,274\,274\,274\ldots\end{aligned}$$

Outro modo de expressar isto é escrevendo

$$\frac{274}{999}=(0,274)(1+10^{-3}+10^{-6}+10^{-9}+\cdots)$$

Portanto, $\frac{274}{999}$ terá a representação decimal $0,274\,274\,274\,274\ldots$, com uma infinidade de algarismos na parte decimal fracionária, com a sequência de algarismos 274 repetindo-se indefinidamente. A expressão $0,274274274\ldots$ é chamada uma *dízima periódica simples* de *período* 274. O número de dígitos (ou algarismos) do período, neste exemplo 3 dígitos, é chamado comprimento da dízima periódica. É prática denotar tal dízima periódica por $0,\overline{274}$. Dizemos também que a fração $\frac{274}{999}$ é a fração geratriz da dízima periódica $0,\overline{274}$.

Definição 2.2. *O número de representação decimal (com uma infinidade de algarismos)* $0,b_1b_2\ldots b_kb_1b_2\ldots b_kb_1b_2\ldots b_k\ldots$, *interpretado como soma da série geométrica infinita*

$$\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k}+\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{2k}}+\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{3k}}+\cdots$$

sendo $k\geq 1$, *é chamado* dízima periódica simples *de período* $b_1b_2\ldots b_k$. *Denotamos tal dízima periódica por* $0,\overline{b_1b_2\ldots b_k}$.

Também chamaremos dízima periódica simples de período $b_1b_2\ldots b_k$ *a um número racional positivo da forma*

$$a_1a_2\ldots a_{s-1}a_s,b_1b_2\ldots b_kb_1b_2\ldots b_k\ldots=a_1a_2\ldots a_{s-1}a_s+0,\overline{b_1b_2\ldots b_k}.$$

sendo este denotado por $a_1a_2\ldots a_{s-1}a_s,\overline{b_1b_2\ldots b_k}$

A seguinte proposição estabelece um fato elementar sobre a determinação da fração geratriz de uma dízima periódica simples. Apesar de ser um fato corriqueiro da matemática elementar das dízimas periódicas nos dias atuais, tal fato foi primeiramente descoberto pelo matemático Johann H. Lambert, em 1758 [1].

Proposição 2.1 (J.H. Lambert, 1758). *A dízima periódica simples* $0,\overline{b_1b_2\ldots b_k}$ *é representação decimal da fração* $\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k-1}=\frac{b_1b_2\ldots b_k}{\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ dígitos}}}$.

Ou seja, $0,\overline{b_1b_2\ldots b_k} = \dfrac{b_1b_2\ldots b_k}{\underbrace{99\ldots9}_{k\ \textit{dígitos}}}$.

Demonstração. Para demonstração desta proposição é suficiente repetir os passos desenvolvidos anteriormente, no exemplo dado para a fração 274/999.

Como mencionado anteriormente $b_1b_2\ldots b_k$ é um inteiro positivo, representado no sistema decimal posicional pela justaposição dos algarismos $b_1, b_2, \ldots, b_k$. No que segue $99\ldots9$ representa um inteiro com representação decimal de k noves consecutivos. Usamos o fato de que $\underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{dígitos}} = 10^k - 1$. Por exemplo, $9 = 10^1 - 1$, $99 = 10^2 - 1$, $999 = 10^3 - 1$, etc.

$$
\begin{aligned}
\frac{b_1b_2\ldots b_k}{99\ldots9} &= \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k - 1} = \frac{\frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}} = \frac{a}{1-q} \quad \left(\text{sendo } a = \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k},\ q = \frac{1}{10^k}\right)\\
&= \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k}\cdot\frac{1}{10^k} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k}\cdot\frac{1}{10^{2k}} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k}\cdot\frac{1}{10^{3k}} + \cdots\\
&= \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{2k}} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{3k}} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{4k}} + \cdots\\
&= 0, b_1b_2\ldots b_k + 0,\underbrace{00\ldots0}_{k\ \text{zeros}}\, b_1b_2\ldots b_k + 0,\underbrace{00\ldots0}_{2k\ \text{zeros}} b_1b_2\ldots b_k + \cdots\\
&= 0, \color{blue}{b_1b_2\ldots b_k}\,\color{red}{b_1b_2\ldots b_k}\,\color{black}{b_1b_2\ldots b_k\ldots} = 0,\overline{b_1b_2\ldots b_k}
\end{aligned}
$$

e nossa demonstração está finalizada. □

Exemplo 2.1. *Ilustrando a Proposição 2.1 temos os seguintes exemplos de transformações de dízimas periódicas em frações comuns.*

$$
\begin{aligned}
0,257257257\ldots = 0,\overline{257} &= \frac{257}{999}\\
0,1111\ldots = 0,\overline{1} &= \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

A proposição 2.1 também pode ser aplicada se a representação decimal do número racional positivo tem parte inteira maior que zero. Como exemplos,

$$
\begin{aligned}
8,773773773\ldots = 8,\overline{773} &= 8 + 0,\overline{773}\\
&= 8 + \frac{773}{999} = \frac{8765}{999}\\
3,7777\ldots = 3,\overline{7} &= 3 + 0,\overline{7} = 3 + \frac{7}{9} = \frac{34}{9}
\end{aligned}
$$

Nos seguintes dois exemplos, preenchemos a representação decimal do número do numerador com zeros à esquerda para que numerador e denominador tenham o mesmo número de dígitos.

$$\frac{23}{999} = \frac{023}{999} = 0,023023023\ldots = 0,\overline{023}$$
$$\frac{1}{9999} = \frac{0001}{9999} = 0,000100010001\ldots = 0,\overline{0001}$$

2.3 Dízimas periódicas e suas frações geratrizes, em uma abordagem elementar

De um modo geral, não podemos calcular a soma ou diferença de duas dízimas periódicas usando suas representações decimais. Por exemplo, encontraremos dificuldade ao tentar calcular a soma $0,\overline{89857}+0,\overline{5238793}$ e a diferença $0,\overline{89857}-0,\overline{5238793}$. Mais difícil ainda seria tentar calcular o produto de duas dízimas periódicas. Para tais cálculos, o autor considera que o único recurso plausível é utilizar as frações geratrizes das dízimas.

No entanto, é fácil de justificar e bastante consensual o resultado da multiplicação de uma dízima periódica por uma potência de 10.

Por exemplo, podemos calcular $10^3\times 0,\overline{89257}$ de maneira bem simples. Basta que movamos a vírgula decimal 3 casas para a direita (3 é o expoente da potência de 10). Mas precisamos levar em conta o número infinito de dígitos à direita da vírgula, o que alterará a parte periódica da dízima (por uma permutação cíclica dos seus dígitos). Em outras palavras,

$$\begin{aligned}
10^3 \times 0,\overline{89257} &= 10^3 \times 0,89257\,89257\,89257\ldots\\
&= 892,57\,89257\,89257\ldots\\
&= 892,57892\,57892\ldots\\
&= 892,\overline{57892}.
\end{aligned}$$

Multiplicação por 10^k move a vírgula decimal k casas decimais para a direita. Multiplicação por 10^{-k} move a vírgula k casas decimais para a esquerda (às vezes requerendo inserção de zeros para completar dígitos à esquerda). Vejamos alguns exemplos.

$$10^{-2} \times 3854,\overline{57892} = 38,54\overline{57892}$$

$$\begin{aligned}
10^{-2} \times 3892,\overline{57892} &= 38,92\overline{57892}\\
&= 38,9257892578\ldots\\
&= 38,\overline{92578}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
10^{-2} \times 0,\overline{57892} &= 0,00\overline{57892} \\
&= 0,005789257892\ldots \\
&= 0,00\overline{57892}
\end{aligned}
$$

Com estas ferramentas em mãos, fica bem simples determinar a fração geratriz de uma dízima periódica sem precisarmos apelar para a proposição 2.1.

Por exemplo, se queremos calcular a fração geratriz da dízima periódica $0,\overline{324}$, fazemos $x = 0,\overline{324}$. E então procedemos à dedução seguinte.

$$
\begin{aligned}
x = 0,\overline{324} &\implies x = 0,324\,324\,324\ldots \\
&\implies 10^3\,x = 324,324\,324\ldots = 324,\overline{324} \\
&\implies 10^3x = 324 + 0,\overline{324} \\
&\implies 1000x = 324 + x \\
&\implies 999x = 324 \implies x = \frac{324}{999} = \frac{12}{37} \text{ (após simplificações)}
\end{aligned}
$$

Logo, $0,\overline{324} = \dfrac{12}{37}$.

Como um segundo exemplo, se queremos calcular a fração geratriz da dízima periódica composta $25,32\overline{564}$ fazemos $x = 25,32\overline{564}$ e então procedemos à dedução seguinte.

$$
\begin{aligned}
x = 5,32\overline{54} &\implies x = 5,32\,54\,54\,54\ldots \\
&\implies \begin{cases} 10^2x & = 532,54\,54\ldots = 532,\overline{54} \\ 10^4x & = 53254,54\,54\ldots = 53254,\overline{54} \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} 100x & = 532 + 0,\overline{54} \\ 10000x & = 53254 + 0,\overline{54} \end{cases} \\
&\implies 10000x - 100x = 53254 - 532 = 52722 \\
&\implies 9900x = 52722 \implies x = \frac{52722}{9900} = \frac{2929}{550} \text{ (após simplificações)}
\end{aligned}
$$

Logo, $5,32\overline{54} = \dfrac{2929}{550}$.

2.4 Quais frações tem dízimas periódicas como representação decimal ?

O teorema 2.1 estabeleceu que as frações comuns $\dfrac{a}{b}$, em que $b = 2^m 5^n$ para certos números naturais m e n, são as únicas que tem representação decimal finita.

Como são as representações decimais das frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ quando b tem fatores primos diferentes de 2 e de 5? Para responder a esta questão, primeiramente estabelecemos a proposição 2.2.

Proposição 2.2. *Seja* b *um inteiro,* $b \geq 3$. *Se* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$ *então existe um inteiro positivo* k *tal que* $kb = 10^s - 1$ *para algum inteiro positivo* s. *Isto é, existe um inteiro positivo* k *tal que* $kb = \underbrace{99\ldots99}_{s \text{ algarismos}}$.

Demonstração. No contexto do enunciado da proposição e desta demonstração fica subentendido que ka, kb, etc., realmente denotam produtos de inteiros.

Consideremos o conjunto infinito de potências de 10 com expoentes positivos,

$$P = \{10^1, 10^2, 10^3, \ldots\}.$$

Como b e 10 são primos entre si, temos b e 10^n primos entre si para cada $n \geq 1$, pois os fatores primos comuns de b e 10^n também são fatores primos comuns de b e 10.

Logo b não é divisor de nenhum elemento de P. Assim sendo, cada elemento de P, ao ser dividido por b, terá o resto r da divisão no conjunto $R = \{1, 2, \ldots, b-1\}$.

Como P é um conjunto infinito e R é finito, existem duas potências de 10, digamos 10^n e 10^m, com $m > n$, com restos iguais na divisão por b. Isto é, $10^n = q_1 b + r$ e $10^m = q_2 b + r$ para certos inteiros q_1, q_2 e r, com $0 \leq r < b$.

Logo, $10^m - 10^n = q_1 b - q_2 b = (q_1 - q_2)b$ é divisível por b e, como consequência b é divisor de $10^n(10^{m-n} - 1)$. Mas b e 10^n são primos entre si, logo b é divisor de $10^{m-n} - 1$. Tomando $s = m - n$, temos $k \cdot b = 10^s - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{s \text{ algarismos}}$ para algum inteiro positivo k. □

Como consequência da proposição 2.2, o próximo teorema estabelece que se b é um inteiro, $b \geq 3$, e b não possui nem 2 e nem 5 como fator primo, então toda fração irredutível $\frac{a}{b}$ terá uma dízima periódica simples como representação decimal.

Teorema 2.2. *Se a fração de inteiros positivos* $\frac{a}{b}$ *é irredutível, com* $b > 1$ *e* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, *então* $\frac{a}{b} = \frac{c}{99\ldots9}$, *para algum inteiro positivo* c, *com* $99\ldots9$ *representando um inteiro de algarismos todos iguais a 9. Consequentemente, a representação decimal de* $\frac{a}{b}$ *é uma dízima periódica simples.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que a fração $\frac{a}{b}$ seja própria, isto é, com $a < b$. Sendo b e 10 relativamente primos, pela proposição 2.2, existe um inteiro positivo k tal que $kb = 10^s - 1$, com s inteiro positivo.

Logo,

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} = \frac{ka}{10^s - 1} = \frac{c}{\underbrace{99\ldots9}_{s \text{ algarismos}}}$$

sendo $c = ka$. Como $a < b$, temos também $c < \underbrace{99\ldots9}_{s \text{ algarismos}}$, logo $c = a_1a_2\ldots a_s$ para certos dígitos $a_1, a_2, \ldots, a_s$ (alguns dos primeiros dígitos à esquerda serão zeros se a representação decimal de c tiver menos que s dígitos).

Logo $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1a_2\ldots a_s}{\underbrace{99\ldots9}_{s \text{ algarismos}}} = 0,\overline{a_1a_2\ldots a_s}$, e a forma decimal da fração $\dfrac{a}{b}$ desenvolve-se como dízima periódica simples, conforme a proposição 2.1.

Se $a \geq b$, $a = qb + r$, para certos q, r naturais, com $0 \leq r < b$, daí

$$\frac{a}{b} = \frac{qb + r}{b} = q + \frac{r}{b}$$

sendo $\dfrac{r}{b}$ uma fração própria, tendo também uma dízima periódica simples como sua representação decimal. □

Definição 2.3 (Comprimento de uma dízima periódica). *Tendo em vista a proposição 2.2 e o teorema 2.2, definimos o comprimento* ℓ *da dízima periódica simples de fração geratriz irredutível* $\dfrac{a}{b}$, $b \geq 3$ *e primo com* 10, *como sendo o primeiro inteiro* ℓ *tal que* $10^\ell - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ dígitos}}$ *é um múltiplo de* b.

Denotaremos o comprimento da dízima periódica de $\dfrac{a}{b}$ *por* $\ell\left(\dfrac{a}{b}\right)$. *Notemos que na verdade* $\ell\left(\dfrac{a}{b}\right)$ *depende apenas do denominador* b. *Assim sendo, sendo* $b \geq 3$ *e primo com* 10, *temos* $\ell\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ell\left(\dfrac{1}{b}\right)$. *Podemos simplificar nossa notação escrevendo* $\ell\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ell(b)$.

Assim sendo, para cada inteiro b, $b \geq 3$, $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, *define-se um inteiro positivo* $\ell = \ell(b)$ *como sendo o comprimento da dízima periódica de* $\dfrac{1}{b}$.

Exemplo 2.2. *Por exemplo,* $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ *é uma dízima periódica simples de comprimento* $\ell(7) = 6$.

O primeiro múltiplo de 7 *formado só por noves é* 999999, *que possui* $\ell = 6$ *dígitos.*

De fato, como $\dfrac{1}{7} = \dfrac{142857}{999999}$ *temos* $7 \times 142857 = 999999$ *e os inteiros* 9, 99, 999, 9999 *e* 99999 *não são múltiplos de* 7, *pois caso contrário a dízima periódica de* $\dfrac{1}{7}$ *teria menos que* 6 *dígitos.*

Como segundo exemplo, bem simples, temos $b = 37$ *é um inteiro primo com* 10, *e* $\dfrac{1}{37} = \dfrac{27}{27 \cdot 37} = \dfrac{027}{999} = 0,\overline{027}$, *uma dízima periódica de comprimento* 3. *Assim sendo* $\ell(37) = 3$.

No seguinte teorema estabelecemos como são as representações decimais de frações da forma $\frac{a}{2^m 5^n b}$, com m e n naturais, e $b \geq 3$, primo como 10.

Teorema 2.3. *Suponhamos que a fração comum* $\frac{a}{2^m 5^n b}$, *em que* m *e* n *são expoentes naturais (com* $m \geq 1$ *ou* $n \geq 1$*) está na forma irredutível, sendo* $b \geq 3$, b *primo com* 10. *A representação decimal de* $\frac{a}{2^m 5^n b}$ *é uma dízima periódica composta, isto é com representação decimal da forma*

$$a_1 \ldots a_r, b_1 \ldots b_s \overline{d_1 \ldots d_\ell}.$$

O comprimento s *da parte não periódica (após a vírgula) é o maior dos números naturais* m *e* n*. O comprimento* ℓ *da dízima periódica é* $\ell = \ell(b)$*.*

Demonstração. Seja $x = \frac{a}{2^m 5^n b}$. Suponhamos que $m \geq n$. Então $x = \frac{5^{m-n}a}{2^m 5^m b} = \frac{5^{m-n}a}{10^m b}$.

Logo, $10^m x = \frac{5^{m-n}a}{b}$.

A fração comum $\frac{5^{m-n}a}{b}$ é irredutível, pois a e b são primos entre si e 5 não é fator de b, pois $\mathrm{mdc}(10, b) = 1$.

Pelo teorema 2.2, $\frac{5^{m-n}a}{b}$ é uma dízima periódica simples, ou seja, tem a forma

$$\frac{5^{m-n}a}{b} = c_k c_{k-1} \ldots c_1, \overline{d_1 \ldots d_\ell}$$

sendo $\ell = \ell(b)$.

Assim sendo,

$$\begin{aligned} x &= 10^{-m} \times \frac{5^{m-n}a}{b} \\ &= 10^{-m} \times c_k c_{k-1} \ldots c_1, \overline{d_1 \ldots d_\ell} \qquad (2.3) \\ &= c, c_m \ldots c_1 \overline{d_1 \ldots d_\ell} \end{aligned}$$

pois multiplicação por 10^{-m} faz com que a vírgula decimal em (2.3) mova-se m casas para a esquerda. Se $m > k$, inserimos zeros à esquerda em $c_k c_{k-1} \ldots c_1$, até completarmos os dígitos até c_m. Na notação $c, c_m \ldots c_1 \overline{d_1 \ldots d_\ell}$, c denota 0 ou qualquer sequência de dígitos, sendo a parte inteira de x.

Notamos então, finalmente, que o número de dígitos da parte não periódica $c_m \ldots c_1$ é igual a m, o maior dos expoentes m e n, e o comprimento da dízima periódica é $\ell = \ell(b)$.

A demonstração no caso em que $m \leq n$ é inteiramente análoga. □

Exemplo 2.3. *Como exemplo ilustrativo do teorema 2.3, consideremos a fração comum* $\frac{1029}{740}$.

Temos $\dfrac{1029}{740} = \dfrac{3 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 5 \cdot 37}$, *assim sendo a fração* $\dfrac{1029}{740}$ *está na forma irredutível.*

Agora, por passos tais como os usados na demonstração do teorema 2.3, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1029}{740} &= \frac{3 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 5 \cdot 37} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 37} \\
&= \frac{1}{10^2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7^3}{37} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{5145}{37} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{139 \cdot 37 + 2}{37} \\
&= \frac{1}{10^2} \cdot \left(139 + \frac{2}{37}\right) = \frac{1}{10^2} \cdot \left(139 + \frac{27 \cdot 2}{27 \cdot 37}\right) \\
&= \frac{1}{10^2} \cdot \left(139 + \frac{54}{999}\right) = \frac{1}{10^2} \cdot \left(139 + \frac{054}{999}\right) = \frac{1}{10^2} \cdot \left(139 + 0,\overline{054}\right) \\
&= 10^{-2} \times 139,\overline{054} \\
&= 1,39\overline{054}
\end{aligned}$$

Assim, a fração comum $\dfrac{1029}{740} = \dfrac{3 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 5 \cdot 37}$ *é igual à dízima periódica composta* $1,39\overline{054}$, *sendo* 39 *sua parte não periódica e* 054 *seu período. A parte não periódica tem comprimento* 2, *sendo este o maior dos expoentes em* $2^2 \cdot 5^1$ *(que aparece no denominador da fração comum), e a parte periódica tem comprimento* 3, *sendo* $3 = \ell(37) = \ell(1/37)$.

2.5 Revisitando o algoritmo da divisão na chave para determinar a representação decimal de frações comuns

Ao buscarmos a representação decimal de $\dfrac{1}{7}$, em geral o fazemos pelo conhecido algoritmo de divisões sucessivas na chave, como indicado abaixo, em vez de procurarmos um múltiplo de 7 que tenha apenas 9's como algarismos. O algoritmo de divisões sucessivas para determinar a representação decimal de $\dfrac{1}{7}$ tem o seguinte aspecto.

$$\begin{array}{l|l}
10 & \;7 \\ \cline{2-2}
\;\;30 & 0,142857 \\
\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1 &
\end{array}$$

Entretanto, um múltiplo de 7, formado por uma fileira de 9's, existe, como garantido pela proposição 2.2. Com o uso de uma calculadora podemos verificar que nenhum dos números

9, 99, 999, 9999 e 99999 é divisível por 7 mas, no entanto, $999999 \div 7 = 142857$, ou seja, $\frac{999999}{7} = 142857$, o que nos revela que $\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999} = 0,\overline{142857}$.

Uma calculadora também nos dá o resultado

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$$

Na próxima proposição vamos revisar e validar o algoritmo de divisões sucessivas para produzir a representação decimal de uma fração comum. Vamos primeiramente recapitular esse algoritmo através de um exemplo com passos explicados.

Suponhamos que queremos calcular a representação decimal de $\frac{913}{37}$ usando o algoritmo de divisões na chave. Após alguns passos iniciais, teremos a sequência de divisões na chave dadas pelo seguinte diagrama.

$$\begin{array}{r|l}
913 & 37 \\ \cline{2-2}
250 & 24,675 \\
280 & \\
210 & \\
25 &
\end{array}$$

Explicando os passos do diagrama anterior em detalhes, primeiro fizemos a divisão euclidiana de 913 por 37, obtendo quociente 24 e resto 25:

$$\begin{array}{r|l}
913 & 37 \\ \cline{2-2}
25 & 24
\end{array}$$

Vamos denotar $r_1 = 25$.

Em seguida dividimos $r_1 \times 10 = 250$ por 37, obtendo quociente $a_1 = 6$ e resto $r_2 = 28$. Este segundo passo é indicado na mesma chave da divisão iniciada anteriormente, introduzindo-se a vírgula separadora entre o quociente 24 (parte inteira de 913/37) e o quociente 6 (primeiro dígito da parte fracionária).

$$\begin{array}{r|l}
913 & 37 \\ \cline{2-2}
250 & 24,6 \\
28 &
\end{array}$$

Em seguida dividimos $r_2 \times 10 = 280$ por 37, obtendo quociente $a_2 = 7$ e resto $r_3 = 21$. Este terceiro passo é indicado na mesma chave da divisão iniciada anteriormente, com o dígito $a_2 = 7$ posicionado após o dígito $a_1 = 6$.

$$\begin{array}{r|l}
913 & 37 \\ \cline{2-2}
250 & 24,67 \\
280 & \\
21 &
\end{array}$$

Em seguida dividimos $r_3 \times 10 = 210$ por 37, obtendo quociente $a_3 = 5$ e resto $r_4 = 25$. Este quarto passo é indicado na mesma chave da divisão iniciada anteriormente, com o dígito $a_3 = 5$ posicionado após o dígito $a_2 = 7$.

$$\begin{array}{l|l} 913 & 37 \\ \cline{2-2} \;\;250 & 24,675 \\ \;\;\;\;280 & \\ \;\;\;\;\;\;210 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;25 & \end{array}$$

Observamos agora que o resto $r_4 = 25$ coincide com o resto r_1. Assim sendo, para prosseguir com o algoritmo calcularemos $r_4 \times 10 = 250$ e seguiremos adiante com a sequência de divisões euclidianas por 37 (com quociente e resto) que foi iniciada. A sequência de restos, a ser multiplicados por 10 será periódica, repetindo os três primeiros restos obtidos, tendo a forma $25, 28, 21, 25, 28, 21, \ldots$. A sequência de quocientes obtidos, $a_1 = 6$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 7$, $a_6 = 5, \ldots$, também será de natureza periódica e nos dará os dígitos da parte periódica da dízima, que é 675.

Imaginando que possamos fazer uma infinidade de divisões sucessivas, obteremos $\frac{913}{37} = 24,675\,675\ldots = 24,\overline{675}$. No entanto a periodicidade de restos e quocientes nos determina os dígitos da dízima periódica em um número finito de passos.

Estabeleceremos os fatos observados no exemplo explorado anteriormente em um teorema geral. O próximo teorema estabelece como obter a representação decimal, dízima periódica ou não, de qualquer fração comum, por uma sequência de divisões euclidianas. Para simplificar a demonstração, trataremos apenas do caso das frações próprias, isto é, entre 0 e 1.

Teorema 2.4. *Consideremos uma fração comum* $\frac{a}{b}$*, com* a *e* b *inteiros,* $0 \le a < b$*, e portanto* $0 \le \frac{a}{b} < 1$.

Definamos duas sequências de inteiros $(r_n)_{n\ge1}$ *e* $(a_n)_{n\ge1}$*, recursivamente, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $r_1 = a$

(ii) *para cada índice* k*,* $k \ge 1$*,* r_{k+1} *é o resto da divisão de* $10 \cdot r_k$ *por* b

(iii) *para cada índice* k*,* $k \ge 1$*,* a_k *é o quociente da divisão de* $10 \cdot r_k$ *por* b.

Assim, as sequências $(r_n)_{n\ge1}$ *e* $(a_n)_{n\ge1}$ *são definidas como restos e quocientes de uma sequência infinita de divisões euclidianas (com exceção para* r_1*), como indicado nos diagramas seguintes.*

$$r_1 = a \qquad \begin{array}{l|l} 10\cdot r_1 & b \\ \cline{2-2} r_2 & a_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10\cdot r_2 & b \\ \cline{2-2} r_3 & a_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10\cdot r_3 & b \\ \cline{2-2} r_4 & a_3 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{l|l} 10\cdot r_k & b \\ \cline{2-2} r_{k+1} & a_k \end{array} \quad \dots$$

Então temos as seguintes propriedades.

(a) *Para cada* $k \geq 1$*, temos* $0 \leq a_k \leq 9$*, logo* a_k *é um dígito do sistema de numeração de base* 10.

(b) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dfrac{a_3}{10^3} + \cdots + \dfrac{a_k}{10^k} + \dfrac{r_{k+1}}{10^k \cdot b}$, *para cada* $k \geq 1$.

(c) *Para cada* $k \geq 1$, $0 \leq \dfrac{r_{k+1}}{10^k \cdot b} < \dfrac{1}{10^k}$

(d) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{r_{k+1}}{10^k \cdot b} = 0$

(e) $\displaystyle\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{10^n}$

Então $0, a_1a_2a_3\ldots$ *é a* representação decimal *(ou a* expansão decimal*) do número racional* $\dfrac{a}{b}$*, isto é, escrevemos* $\dfrac{a}{b} = 0, a_1a_2a_3\ldots$.

Demonstração. Se $a = 0$, teremos $r_k = 0$ e $a_k = 0$ para cada k. Neste caso os resultados enunciados em (a), (b), (c), (d) e (e) são triviais. Suponhamos então $a > 0$.

(a) Para cada $k \geq 1$, temos

$$10 \cdot r_k = b \cdot a_k + r_{k+1},$$

e portanto

$$\frac{10 \cdot r_k}{b} = a_k + \frac{r_{k+1}}{b}.$$

Como $0 \leq r_k < b$, temos $0 \leq \dfrac{r_k}{b} < 1$, logo $0 \leq \dfrac{10 \cdot r_k}{b} < 10$, ou seja,

$$0 \leq a_k + \frac{r_{k+1}}{b} < 10$$

Portanto

$$0 \leq a_k < 10 - \frac{r_{k+1}}{b}$$

e como $0 \leq \dfrac{r_{k+1}}{b} < 1$, e a_k é um número natural, temos $0 \leq a_k \leq 9$ para cada índice k. Assim cada a_k é um dígito do sistema decimal.

(b) Consideremos a sequência de divisões euclidianas dada no enunciado, sendo $r_1 = a$.

$$\begin{array}{l|l} 10\cdot r_1 & b \\ \cline{2-2} r_2 & a_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10\cdot r_2 & b \\ \cline{2-2} r_3 & a_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10\cdot r_3 & b \\ \cline{2-2} r_4 & a_3 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{l|l} 10\cdot r_k & b \\ \cline{2-2} r_{k+1} & a_k \end{array} \quad \dots$$

Este algoritmo segue indefinidamente, definindo então duas sequências de inteiros, uma *sequência de restos*,

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

e uma *sequência de dígitos*,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Assim sendo, tal como no enunciado do problema, $r_1 = a$ e, para cada índice $k \geq 1$, a divisão euclidiana de r_k por b define a_k como quociente e r_{k+1} como resto.

Para cada índice k, as sucessivas divisões euclidianas definem uma sequência de igualdades:

$$\begin{aligned}
10 \cdot r_1 &= b \cdot a_1 + r_2 && (1)\\
10 \cdot r_2 &= b \cdot a_2 + r_3 && (2)\\
10 \cdot r_3 &= b \cdot a_3 + r_4 && (3)\\
&\vdots\\
10 \cdot r_k &= b \cdot a_k + r_{k+1} && (k)
\end{aligned}$$

sendo $0 \leq r_k < b$ para cada $k \geq 1$, pois em uma divisão euclidiana em $\mathbb{N}$ o resto é menor que o divisor.

Dividindo membro a membro cada igualdade dessa sequência por $10 \cdot b$, obtemos a sequência de igualdades equivalentes

$$\begin{aligned}
\frac{r_1}{b} &= \frac{a_1}{10} + \frac{r_2}{10 \cdot b} && (1')\\
\frac{r_2}{b} &= \frac{a_2}{10} + \frac{r_3}{10 \cdot b} && (2')\\
\frac{r_3}{b} &= \frac{a_3}{10} + \frac{r_4}{10 \cdot b} && (3')\\
&\vdots\\
\frac{r_k}{b} &= \frac{a_k}{10} + \frac{r_{k+1}}{10 \cdot b} && (k')
\end{aligned}$$

Como $r_1 = a$, a igualdade (1') tem a forma equivalente

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_2}{10 \cdot b} \qquad (1'')$$

Substituindo a fração $\frac{r_2}{b}$ de (2') em (1''), obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{a_2}{10} + \frac{r_3}{10 \cdot b}\right)$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^2 \cdot b} \qquad (2'')$$

Substituindo a fração $\frac{r_3}{b}$ de (3') em (2''), obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{a_3}{10} + \frac{r_4}{10 \cdot b}\right)$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{r_4}{10^3 \cdot b} \tag{3''}$$

Prosseguindo com a sequência de substituições definiremos, por recorrência, igualdades (1''), (2''), (3''), etc., chegando então à igualdade (k''):

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{r_{k+1}}{10^k \cdot b} \tag{k''}$$

assim acabamos de demonstrar o resultado enunciado no item (b). Demonstraremos a seguir os resultados enunciados nos itens (c), (d) e (e).

(c) Como $0 \le r_{k+1} < b$ para cada k, temos $0 \le \frac{r_{k+1}}{10^k \cdot b} < \frac{1}{10^k}$.

(d) Como $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{10^k} = 0$ e $0 \le \frac{r_{k+1}}{10^k \cdot b} < \frac{1}{10^k}$ temos, pelo (intuitivo) teorema do confronto para limites de sequências, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{10^k \cdot b} = 0$.

(e) O limite dado pelo item (d) nos leva à representação de $\frac{a}{b}$ como uma série (soma) infinita

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}\right) + \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{10^k \cdot b} \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}\right) + 0 \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}
\end{aligned}$$

Isto define uma *representação decimal* da fração $\frac{a}{b}$, como sendo

$$\frac{a}{b} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$ □

Observação 2.1. *No teorema 2.4, vimos que a sequência de dígitos,* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, *da representação decimal da fração própria* $\frac{a}{b}$ *é infinita e é definida em função da sequência de restos* $r_1, r_2, r_3, \ldots$, *pois* $r_1 = a$ *e, para cada índice* $k \ge 1$, r_{k+1} *é o resto da divisão de* $10 \cdot r_k$ *por* b, *e* a_k *é o quociente desta divisão.*

Se $r_k = 0$ *para algum índice* k *então os demais restos da sequência serão todos nulos, bem como todos os dígitos a partir de* a_k *(pois ao dividir* 0 *por* b *temos quociente* 0 *e resto* 0*).*

Neste caso teremos $\frac{a}{b} = 0, a_1 \dots a_{k-1}000 \dots = 0, a_1 \dots a_{k-1}$, *uma representação decimal finita.*

Se na sequência infinita de restos, $r_1, r_2, r_3, \dots$, *nenhum dos restos é nulo, então* $b \geq 3$, *e como todos os restos não nulos de divisões por* b *estarão no conjunto* $\{1, 2, \dots, b-1\}$, *teremos algum resto* r_j *se repetindo mais adiante na sequência. Suponhamos que* r_j *é o primeiro resto que apresenta uma primeira repetição após* s *divisões. Teremos* $r_{j+s} = r_j$, *e consequentemente,* $a_{j+s} = a_j$, *daí temos uma dízima periódica (de comprimento* s*) na representação decimal de* a/b.

Uma questão controversa vem de representações decimais da forma $0, a_1 \dots a_k 999 \dots = 0, a_1 \dots a_k \overline{9}$

O número $0,999\dots = 0,\overline{9}$ *pode ser interpretado como a soma da progressão geométrica*

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$$

de primeiro termo $a_1 = \frac{9}{10}$ *e razão* $q = \frac{1}{10}$, *que será*

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Assim, interpretamos $0,9999\dots = 1$, *um inteiro, não uma dízima periódica no sentido habitual.*

Analogamente, podemos mostrar que $0,527999\dots = 0,527\overline{9} = 0,528$, *um número de representação decimal finita. Tais representações decimais, com uma sequência infinita de noves a partir de um dígito à direita da vírgula decimal, são válidas como representações de racionais, mas nunca ocorrem quando buscamos a representação decimal de uma fração comum pela sequência de divisões sucessivas dada no teorema 2.4.*

Validando a observação feita no parágrafo anterior, fecharemos esta seção com a seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Ao definir as sequências* (r_n) *e* (a_n) *do teorema 2.4, não existe um índice* k *tal que* $a_n = 9$ *para cada* $n \geq k$.

Em outras palavras, é impossível a ocorrência de uma sequência infinita de divisões euclidianas produzindo dígitos (quocientes) $a_n = 9$ *quando* $n \geq k$, *como a seguir.*

$$\begin{array}{r|l} 10 \cdot r_k & b \\ \cline{2-2} r_{k+1} & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 \cdot r_{k+1} & b \\ \cline{2-2} r_{k+2} & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 \cdot r_{k+2} & b \\ \cline{2-2} r_{k+3} & 9 \end{array} \qquad \dots$$

Isto significa que no processo de divisões sucessivas para determinar a representação decimal de $\frac{a}{b}$*, sendo* a *e* b *inteiros,* $0 < a < b$*, não é possível obter uma representação da forma* $0, a_1 \dots a_{k-1}9999999999\dots$.

Demonstração. Suponhamos que, para as sequências (r_n) e (a_n) do teorema 2.4, exista um índice k tal que $a_n = 9$ para cada $n \geq k$. Então teremos

$$\begin{aligned} 10 \cdot r_k &= b \cdot 9 + r_{k+1} \\ 10 \cdot r_{k+1} &= b \cdot 9 + r_{k+2} \\ &\vdots \\ 10 \cdot r_{k+(n-1)} &= b \cdot 9 + r_{k+n} \end{aligned}$$

para cada $n \geq 1$. Das igualdades acima tiramos

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= 10 \cdot r_k - 9 \cdot b \\ r_{k+2} &= 10 \cdot r_{k+1} - 9 \cdot b \\ &= 10(10 \cdot r_k - 9 \cdot b) - 9 \\ &= 10^2 \cdot r_k - 99 \cdot b \\ r_{k+3} &= 10 \cdot r_{k+2} - 9 \cdot b \\ &= 10(10^2 \cdot r_k - 99 \cdot b) - 9b \\ &= 10^3 \cdot r_k - 999 \cdot b \end{aligned}$$

e prosseguindo indutivamente chegaremos a

$$\begin{aligned} r_{k+n} &= 10 \cdot r_{k+(n-1)} - 9 \cdot b \\ &= 10^n \cdot r_k - \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}} \cdot b \end{aligned}$$

Agora, $\underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$, portanto

$$\begin{aligned} r_{k+n} &= 10^n \cdot r_k - (10^n - 1)b \\ &= 10^n(r_k - b) + b \end{aligned}$$

Temos $0 \leq r_k < b$ para cada índice k, logo $r_k - b < 0$. Para n suficientemente grande teremos $10^n(r_k - b) + b < 0$, portanto $r_{k+n} < 0$. Temos então uma contradição pois $r_{k+n} \geq 0$.

Portanto, não é possível obter uma sequência infinita valores de a_n tal que $a_n = 9$ quando $n \geq k$, para um certo índice k. □

Proposição 2.4. *Seja* a/b *uma fração comum irredutível, com* $b \geq 3$*,* b *primo com* 10*.*

O comprimento $\ell(b)$ *da dízima periódica de fração geratriz* a/b *satisfaz a desigualdade* $\ell(b) \leq b - 1$*.*

Demonstração. Suponhamos $\dfrac{a}{b} = 0,\overline{a_1 a_2 \ldots a_\ell}$, sendo $\ell = \ell(b)$.

Pelo teorema 2.4, a sequência de dígitos $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ é definida como função de uma sequência $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$, de restos de divisões euclidianas por b, sendo estes restos distintos entre si.

Lembremo-nos de que a sequência de restos prossegue, com repetições cíclicas, na forma $r_{\ell+1} = r_1$, $r_{\ell+2} = r_2$, $\ldots r_{2\ell} = r_\ell$, $r_{2\ell+1} = r_1$, $r_{2\ell+2} = r_2$, etc., dando origem à representação decimal de a/b com dígitos $a_{\ell+1} = a_1$, $a_{\ell+2} = 2$, etc., sendo então

$$a/b = 0, a_1 \ldots a_\ell a_1 \ldots a_\ell \ldots$$

Mas cada resto r_i satisfaz $0 < r_i < b$, portanto os restos $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ estão no conjunto $R = \{1, 2, \ldots, b-1\}$. Como $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ são distintos entre si, temos então $\ell \leq b - 1$. □

2.5.1 Permutações cíclicas em dízimas periódicas

Sendo dada uma sequência finita de símbolos, tal como por exemplo ABCDE, as sequências BCDEA, CDEAB, DEABC e EABCD, são o que chamaremos permutações cíclicas da sequência dada. De um modo geral, chamaremos de permutação cíclica de uma sequência de dígitos $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$ a cada uma das sequências feita subdividindo-se a sequência em dois blocos e trocando-os de lugar. A própria sequência também será considerada com uma dessas permutações cíclicas. Assim, as permutações cíclicas da sequência de dígitos

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$$

são as n sequências da lista

$$\begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n \\ a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n a_1 \\ a_3 \ldots a_{n-1} a_n a_1 a_2 \\ \quad\vdots \\ a_n a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} \end{array}$$

Visualizando as dízimas periódicas das frações $a/7$, para $1 \leq a \leq 6$, que tem comprimento $\ell(7) = 7 - 1 = 6$, observamos as 6 permutações cíclicas da dízima periódica de $1/7$. Confira isto na lista dada a seguir.

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$
$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$$
$$\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$$
$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$$
$$\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$$
$$\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$$

Mais que isto, podemos observar ainda que o inteiro 142857, período da dízima periódica de 1/7, quando multiplicado sucessivamente por $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, produz os períodos das 6 dízimas periódicas listadas acima:

$$1 \times 142857 = 142857$$
$$2 \times 142857 = 285714$$
$$3 \times 142857 = 428571$$
$$4 \times 142857 = 571428$$
$$5 \times 142857 = 714285$$
$$6 \times 857142 = 857142$$

Podemos então "adivinhar" toda a dízima periódica da divisão de um inteiro positivo por 7, bastando que a pessoa nos diga qual é o primeiro dígito da dízima periódica.

Na próxima proposição estabeleceremos uma generalização dos fatos observados acima, sobre as dízimas periódicas das frações próprias de denominador 7. Antes porém, cabe um comentário. Pela proposição 2.4, o comprimento da dízima periódica de uma fração irredutível a/b, $b \geq 3$ e primo com 10, é no máximo $b - 1$. No capítulo 4, a proposição 4.2 estabelecerá que se $\ell(b) = b - 1$ então b é necessariamente um número primo. A respeito disto, temos ainda a observação 4.3, à página 40.

Proposição 2.5. *Seja* $p \geq 3$ *um número primo, primo com* 10, *com* $\ell(p) = p - 1$, *sendo* $\frac{1}{p} = 0,\overline{a_1 a_2 \ldots a_{p-1}}$.

1. *Os períodos das dízimas periódicas das frações* $\frac{a}{p}$, *para* $1 \leq a \leq p - 1$, *são permutações cíclicas do período* $a_1 a_2 \ldots a_{p-1}$ *da fração* $1/p$.
2. *Para cada inteiro* a, $1 \leq a \leq p - 1$, *se* $\frac{a}{p} = 0,\overline{d_1 d_2 \ldots d_{p-1}}$ *então* $d_1 d_2 \ldots d_{p-1} = a \times a_1 a_2 \ldots a_{p-1}$.

Demonstração. Pelo teorema 2.4, do algoritmo das divisões sucessivas para determinar a dízima periódica de $1/p$, os dígitos $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, da dízima periódica da representação decimal da fração $\dfrac{1}{p}$, são determinados da seguinte forma: a_1 é o quociente da divisão de $10 \cdot r_1$ por p e, r_2 é o resto dessa divisão e, para cada $j \geq 2$, a_j é o resto da divisão de $10 \cdot r_j$ por p, esta divisão deixando resto r_{j+1}, o próximo resto da sequência de restos.

$$r_1 = 1 \qquad \begin{array}{r|l} 10 \cdot r_1 & b \\ \cline{2-2} r_2 & a_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 \cdot r_2 & b \\ \cline{2-2} r_3 & a_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 \cdot r_3 & b \\ \cline{2-2} r_4 & a_3 \end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{r|l} 10 \cdot r_k & b \\ \cline{2-2} r_{k+1} & a_k \end{array} \quad \ldots$$

Temos então uma função associando cada termo da sequência de infinitos termos, $r_1 = 1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}, \ldots$, a um correspondente dígito na sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}, \ldots$,

$$\begin{array}{cccccc} r_1 = 1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{p-1} & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{p-1} & \cdots \end{array}$$

Como $\ell(p) = p - 1$ teremos $r_p = r_1 = 1$, $r_{p+1} = r_2$ e, de um modo geral, para $j \geq p$, $r_j = r_{j-(p-1)}$, dando-nos a dízima periódica com $a_p = a_1, a_{p+1} = a_2$, etc.

Agora os restos $r_1 = 1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ são todos distintos entre si, caso contrário a dízima periódica teria comprimento menor que $p - 1$. Nenhum dos restos é 0, caso contrário teríamos uma representação decimal finita. Mas $1, 2, \ldots, p-1$ são todos os possíveis restos não nulos de divisões por p. Logo são iguais os conjuntos $\{r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}\}$ e $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.

Seja a um inteiro, $1 \leq a \leq p - 1$.

Para determinar a dízima periódica de a/p, pelo algoritmo das divisões sucessivas, tomaremos $r'_1 = a$, e então definiremos sequências $r'_1, r'_2, \ldots$, e correspondentes dígitos $d_1, d_2, \ldots$, da dízima periódica. Como $1 \leq a \leq p - 1$, o inteiro a será um dos restos r_j do conjunto $\{r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

Então teremos $d_1 = a_j$, $d_2 = a_{j+1}$, etc., e a sequência de dígitos da dízima periódica de a/p terá a forma

$$a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{p-1}, a_1, a_2, \ldots a_{j-1}$$

definida pelos $p - 1$ restos, distintos entre si,

$$r_j, r_{j+1}, \ldots, r_{p-1}, r_1, r_2, \ldots r_{j-1}$$

e assim o período de a/p será uma permutação cíclica do período $a_1 a_2 \ldots a_{p-1}$.

Agora temos $\dfrac{1}{p} = \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_{p-1}}{\underbrace{99\ldots9}_{p-1 \text{ dígitos}}}$ e $\dfrac{a}{p} = \dfrac{d_1 d_2 \ldots d_{p-1}}{\underbrace{99\ldots9}_{p-1 \text{ dígitos}}} = a \times \dfrac{1}{p}$

Logo, $a \times \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_{p-1}}{\underbrace{99\ldots 9}_{p-1 \text{ dígitos}}} = \dfrac{d_1 d_2 \ldots d_{p-1}}{\underbrace{99\ldots 9}_{p-1 \text{ dígitos}}}$, e portanto $a \times a_1 a_2 \ldots a_{p-1} = d_1 d_2 \ldots d_{p-1}$. $\square$

3. A relação de congruência módulo m no conjunto dos números inteiros

A noção de *congruência módulo* m, conceito fundamental na moderna teoria dos números, foi desenvolvida no inicio do século 19 por Karl Friedrich Gauss, em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae* (*Investigações Aritméticas*) [5], publicado em 1801 (originalmente em latim).

Através do conceito de congruência, Gauss mostrou como determinar restos de divisões euclidianas de grandes números, por um número inteiro $m \geq 2$, sem a necessidade de determinar o quociente da divisão. Por exemplo, podemos confortavelmente determinar o resto da divisão por 9, que é um dos inteiros de 0 a 8, do inteiro 235^{431}, sem conhecermos o inacessível quociente da divisão, que deverá ser um número de valor muito grande.

Deste ponto em diante, neste capítulo, o *módulo da congruência*, m, é um inteiro satisfazendo $m \geq 2$.

Pretendemos neste capítulo fazer uma revisão breve de propriedades básicas da congruência módulo m, que serão utilizadas em capítulo posterior, para uma abordagem de propriedades de dízimas periódicas iniciada por Gauss. As demonstrações que serão desenvolvidas aqui serão bem sucintas, podendo ser expandidas em detalhes pelo leitor para melhor compreensão. Uma referência mais completa a ser consultada é o livro de Hefez [7].

3.1 Definição de congruência módulo m e propriedades iniciais

Definição 3.1 (Congruência módulo m). *Dois inteiros a e b quaisquer são congruentes módulo m quando $a - b$ é múltiplo de m, ou seja, quando $a - b$ é divisível por m. Neste caso dizemos que a é congruente a b módulo m e escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$. Se a não é congruente a b módulo m, isto é, se $a - b$ não é divisível por m, escrevemos $a \not\equiv b \pmod{m}$.*

Notemos que as seguintes afirmações, sobre dois inteiros a e b, são todas equivalentes entre si, e também são equivalentes à afirmação $a \equiv b \pmod{m}$.

- m divide $a - b$;

- $a - b$ é múltiplo de m;
- $a - b$ é divisível por m;
- $a - b = \lambda m$ para algum inteiro λ.
- $a = \lambda m + b$ para algum inteiro λ.

Por exemplo, $21 \equiv 3 \pmod 9$ pois $21 - 3 = 18$ é múltiplo de 9.

Também $-21 \equiv 6 \pmod 9$ pois $-21 - 6 = -27$ é múltiplo de 9.

Pausa para contextualização. As congruências módulo m também estão presentes em nosso cotidiano. Por exemplo, na contagem das horas, fazemos uso de congruência módulo 24, assumindo que as horas são contadas de 24 em 24. Por exemplo, se a partir das 14h da um dia, passam-se 80 horas que horas serão ao final ? Temos $80 + 14 = 94$ e $94 = 3 \times 24 + 22$, ou seja, $94 \equiv 22 \pmod{24}$, a resposta é que 80 horas após as 14h teremos o horário de $22h$.

O primeiro resultado deste capítulo, enunciado e demonstrado na proposição a seguir, estabelece que a relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Proposição 3.1. *Sendo a, b e c inteiros quaisquer, a relação de congruência módulo m satisfaz às seguintes propriedades:*

I. A relação é reflexiva: $a \equiv a \pmod m$;

II. A relação é simétrica: Se $a \equiv b \pmod m$ então $b \equiv a \pmod m$;

III. A relação é transitiva: Se $a \equiv b \pmod m$ e $b \equiv c \pmod m$ então $a \equiv c \pmod m$.

Demonstração. A propriedade reflexiva é consequência de que $a - a = 0$ é múltiplo de m.

A propriedade simétrica segue do fato de que $b - a = -(a - b)$ e, portanto, se $a - b$ é múltiplo de m então o mesmo ocorre para $b - a$.

A propriedade transitiva segue do fato de que $a - c = (a - b) + (b - c)$ e, portanto, se $a - b$ e $b - c$ são múltiplos de m então o mesmo ocorre para $a - c$. $\square$

O próximo resultado, também enunciado na forma de uma proposição, estabelece que a congruência módulo m é compatível com as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{Z}$. Ou seja, podemos somar e multiplicar membro a membro duas congruências módulo m.

Proposição 3.2. *Sejam a, b, c e d inteiros quaisquer e seja m um inteiro, $m \geq 2$. Nestas condições,* *I.* $a \equiv b \pmod m$ *se, e somente se,* $a + c \equiv b + c \pmod m$*;*

II. *Se* $a \equiv b \pmod m$ *e* $c \equiv d \pmod m$ *então* $a + c \equiv b + d \pmod m$*;*

III. *Se* $a \equiv b \pmod m$ *então* $ac \equiv bc \pmod m$*;*

IV. *Se* $a \equiv b \pmod m$ *e* $c \equiv d \pmod m$ *então* $ac \equiv bd \pmod m$*.*

V. *Se* $a \equiv b \pmod m$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então* $a^n \equiv b^n \pmod m$

Demonstração. A propriedade I segue do fato de que $(a + c) - (b + c) = a - b$.

A propriedade II segue do fato de que $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$.

A propriedade III segue do fato de que $ac - bc = (a - b)c$.

A propriedade IV segue do fato de que $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$.

A propriedade V segue do fato de que, se $n \geq 2$ então

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad \square$$

Uma vez estabelecida a compatibilidade da congruência módulo m com a multiplicação (propriedades III e IV da proposição 3.2), uma pergunta que surge é: "Podemos dividir por um inteiro ambos os membros de uma congruência módulo m e preservar a congruência ?"

Note que $2 \cdot 7 \equiv 2 \cdot 4 \pmod 6$, pois $14 - 8 = 6$ é múltiplo de 6; porém, $7 \not\equiv 4 \pmod 6$, pois $7 - 4 = 3$ não é múltiplo de 6.

Este exemplo mostra que nem sempre a congruência módulo m é preservada quando dividimos ambos os membros por um inteiro. Contudo, a seguinte proposição dá uma condição suficiente para que uma congruência módulo m seja preservada quando os dois lados são divididos por um inteiro. Nesta proposição, a, b e c são inteiros quaisquer com $c \neq 0$.

Proposição 3.3. *Se* $ac \equiv bc \pmod m$ *e* $\mathrm{mdc}(c, m) = 1$ *então* $a \equiv b \pmod m$*.*

Demonstração. Se $ac - bc = (a - b)c$ é múltiplo de m então m divide $(a - b)c$. Como m e c não possuem divisores comuns maiores do que 1, pois $\mathrm{mdc}(c, m) = 1$, segue que m divide $a - b$ e, consequentemente, $a - b$ é múltiplo de m. $\square$

Para ilustrar a proposição anterior, observe que $42 \equiv 7 \pmod 5$, pois $42-7 = 35$ é múltiplo de 5. Podemos reescrever a conguência em questão na forma $6 \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \pmod 5$, e como $\mathrm{mdc}(5, 7) = 1$, podemos cancelar o 7 em ambos os lados da congruência, e obter $6 \equiv 1 \pmod 5$. De fato, $6 - 1 = 5$ é múltiplo de 5.

O próximo resultado, enunciado e demonstrado na forma de uma proposição, estabelece uma importante relação entre a congruência módulo m e os restos de divisões euclidianas por m.

Proposição 3.4. *Se a e b são inteiros quaisquer então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *Se r é o resto da divisão de a por m então $a \equiv r \pmod{m}$*

(ii) *Se $a \equiv r \pmod{m}$ e $0 \leq r < m$ então r é o resto da divisão de a por m.*

(iii) *$a \equiv 0 \pmod{m}$ se, e somente se, a é divisível por m.*

(iv) *$a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, os restos das divisões de a e b por m são iguais.*

Demonstração. (i) Se r é o resto da divisão de a por m então $a = qm + r$ para algum inteiro q e, portanto, $a - r = qm$ é múltiplo de m, logo $a \equiv r \pmod{m}$.

(ii) Se $a \equiv r \pmod{m}$ então $a - r$ é múltiplo de m. Daí $a - r = qm$ para algum inteiro q e, portanto, $a = qm + r$. Logo, sendo $0 \leq r < m$, r é o resto da divisão de a por m (sendo q o quociente).

(iii) É uma consequência dos itens (i) e (ii) no caso em que $r = 0$.

(iv) Sejam r e r', respectivamente, os restos das divisões de a e b por m.

Então temos $a = qm + r$ e $b = q'm + r'$ para certos inteiros q e q', sendo $0 \leq r, r' < m$.

Então $a - b = (q - q')m + (r - r')$.

Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a - b = \lambda m$ para algum λ inteiro.

Daí $r - r' = (a - b) - (q - q')m = \lambda m - (q - q')m = (\lambda - q + q')m$ é múltiplo de m.

Porém, como $0 \leq r < m$ e $-m < -r' \leq 0$, segue que $-m < r - r' < m$. Mas 0 é o único múltiplo de m maior que $-m$ e menor que m. Logo, $r - r' = 0$, ou seja, $r = r'$.

Por outro lado, se $r = r'$ então $a - b = (q - q')m$ é múltiplo de m, e então $a \equiv b \pmod{m}$. □

3.2 O Pequeno Teorema de Fermat

Dois importantes teoremas sobre congruências módulo m foram descobertos nos séculos 16 e 17, bem antes da criação da teoria das congruências por Gauss. Um deles é o Pequeno

Teorema de Fermat e o outro, uma generalização do primeiro, é o Teorema de Euler. Nesta seção enunciaremos o primeiro e na próxima seção enunciaremos o segundo. As demonstrações de ambos os teoremas são encontradas em Hefez [7].

Teorema 3.1 (Pequeno Teorema de Fermat). *Seja $p \geq 2$ um número primo e seja a um número inteiro qualquer.*

Se p não divide a então a^{p-1} deixa resto 1 quando dividido por p, ou seja, se p não divide a então

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

O próximo exemplo ilustra um emprego do Teorema de Fermat.

Exemplo 3.1. *Determinar o resto da divisão de 30^{122} por 13.*

13 *é primo e* 13 *não divide* 30. *Pelo Teorema 3.1 de Fermat,*

$$30^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

Como $122 = 10 \cdot 12 + 2$, usando propriedades listadas nas proposições 3.1 e 3.2, temos

$$\begin{aligned} 30^{122} &\equiv 30^{10\cdot 12+2} \\ &\equiv (30^{12})^{10} \cdot 30^2 \\ &\equiv 1^{10} \cdot 30^2 && (30^{12} \equiv 1) \\ &\equiv 30^2 \pmod{13} \end{aligned}$$

sendo módulo 13 as congruências intermediárias.

Agora, $30 \equiv 4 \pmod{13}$ e $30^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 3 \pmod{13}$.

Logo, $30^{122} \equiv 3 \pmod{13}$, e portanto, pela proposição 3.4, o resto da divisão de 30^{122} por 13 é igual a 3.

3.3 A função ϕ (leia-se "fi") de Euler e o Teorema de Euler

Definição 3.2 (Função ϕ de Euler). *Para cada inteiro n, $n \geq 1$, definimos (e denotamos por) $\phi(n)$ a quantidade de inteiros x no conjunto $\{1, \dots, n\}$ que são primos com n, ou seja, a quantidade de inteiros x satisfazendo $1 \leq x \leq n$ e $\mathrm{mdc}(x, n) = 1$.*

Formalmente ϕ é uma função $\phi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, sendo $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos (ou inteiros positivos), definida por

$$\phi(n) = \#\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n,\ \mathrm{mdc}(x, n) = 1\},$$

com o símbolo # denotando o número de elementos *do conjunto descrito à direita do símbolo.*

A função ϕ *assim definida é chamada função* ϕ *(pronuncia-se* fi*) ou função* totiente[1] *de Euler.*

Observemos que, se $n \geq 2$, $\phi(n)$ *é a quantidade de inteiros, no conjunto* $\{1, \ldots, n-1\}$, *que são primos com* n.

Por exemplo, $\phi(1) = 1$ (1 é o único inteiro positivo primo com 1), $\phi(2) = 1$, e $\phi(10) = 4$, pois os inteiros x que satisfazem $1 \leq x \leq 10$ e $\mathrm{mdc}(x, 10) = 1$ são $1, 3, 7, 9$. Já $\phi(17) = 16$ pois, sendo 17 um número primo, todos os inteiros de 1 a 16 são primos com 17.

3.3.1 Cálculo de $\phi(m)$

Nesta seção enunciaremos uma fórmula para calcular $\phi(m)$ a partir da fatoração de m em fatores primos.

Lembramos que $\phi(m)$ é a quantidade de elementos k do conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ tais que k e m são primos entre si.

Proposição 3.5. *Seja* $p \geq 2$ *um número primo. Então*

1. $\phi(p) = p - 1$. *Sendo* $n \geq 2$ *inteiro, temos* $\phi(n) = n - 1$ *se, e somente se,* n *é primo.*

2. *Sendo* r *natural,* $r \geq 2$, $\phi(p^r) = p^r - p^{r-1}$, *ou seja,* $\phi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$.

3. *Se* a *e* b *são inteiros positivos tais que* $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, *então*

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b).$$

4. *Sendo* $n \geq 2$, *se* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *são inteiros positivos, dois a dois primos entre si, então*

$$\phi(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \phi(a_1) \times \phi(a_2) \times \cdots \times \phi(a_n).$$

5. *Sejam* $n \geq 2$ *e* p_1, p_2, $\ldots$, p_n *primos positivos, dois a dois distintos. Sejam* λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n *inteiros positivos.*

   Então

$$\phi(p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdots p_n^{\lambda_n}) = \phi(p_1^{\lambda_1}) \cdot \phi(p_2^{\lambda_2}) \cdots \phi(p_n^{\lambda_n})$$

[1] Em latim, *totient* significa *quantas vezes*.

Demonstração. 1. Se p é primo, $p \geq 2$, todos os inteiros positivos menores que p são primos com p, sendo eles os inteiros no conjunto $\{1, \ldots, p-1\}$, portanto $\phi(p) = p - 1$.

Sendo $n \geq 2$ inteiro, se $\phi(n) = n - 1$ então cada inteiro a, com $2 \leq a < n$, será primo com n, portanto não poderá ser divisor de n, logo teremos n sendo um número primo.

2. Sendo r natural, $r \geq 2$, e $p \geq 2$ um número primo, os inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, p^r\}$ que **não são** primos com p são aqueles que tem p como fator.

   Os inteiros positivos que tem p como fator são os inteiros da sequência p, $2p$, $3p, \ldots$.

   No conjunto $\{1, 2, \ldots, p^r\}$, o maior inteiro que tem p como fator é p^r, que é $p^{r-1} \cdot p$. Assim, no conjunto $\{1, 2, \ldots, p^r\}$ os inteiros que não são primos com p são os p^{r-1} inteiros da sequência finita p, $2p$, $3p$, $\ldots, p^{r-1}p$. Assim, o número de inteiros, em $\{1, 2, \ldots, p^r\}$, que são primos com p, é igual a $p^r - p^{r-1}$.

3. A demonstração deste item requer resultados da teoria de congruências que vão além dos fatos elementares tratados neste capítulo e por isto será omitida. Uma demonstração pode ser encontrada em Hefez [7].

4. A propriedade enunciada é generalição da propriedade do item 3 e pode ser demonstrada por indução sobre n, $n \geq 2$.

5. A propriedade é consequência imediata do item 4, pois sendo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primos positivos, dois a dois distintos, $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \ldots, p_n^{\lambda_n}$ são inteiros, dois a dois primos entre si. □

Exemplo 3.2. *Usando a proposição 3.5 vamos calcular* $\phi(2017)$, $\phi(2401)$ *e* $\phi(9000)$.

2017 *é um número primo, logo* $\phi(2017) = 2017 - 1 = 2016$.

$2401 = 7^4$, *logo* $\phi(2401) = \phi(7^4) = 7^4 - 7^3 = 7^3 \cdot (7 - 1) = 6 \cdot 343 = 2058$.

Finalmente, $9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, *logo*

$$\begin{aligned}\phi(9000) &= \phi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3) = \phi(2^3) \cdot \phi(3^2) \cdot \phi(5^3) \\ &= (2^3 - 2^2) \cdot (3^2 - 3) \cdot (5^3 - 5^2) \\ &= 4 \cdot 6 \cdot 100 = 2400\end{aligned}$$

3.3.2 O Teorema de Euler

Tendo desenvolvido alguma familiaridade com a função ϕ de Euler, enunciaremos o próximo teorema, creditado a Euler, que generaliza o Pequeno Teorema de Fermat.

Teorema 3.2 (Teorema de Euler). *Se* a *é um inteiro e* $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$ *então*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

A demonstração do teorema 3.2 também será omitida e pode ser encontrada em Hefez [7].

Exemplo 3.3 (Aplicação do teorema de Euler). *Como uma aplicação do teorema de Euler, vamos encontrar o resto da divisão por* 129 *do número* 10^{425}.

Buscamos encontrar um inteiro r, $0 \leq r < 129$ tal que $10^{425} \equiv r \pmod{129}$. Este r será o resto da divisão procurado.

Agora, $10 = 2 \cdot 5$ e $129 = 3 \cdot 43$ são primos entre si, logo, pelo teorema de Euler, $10^{\phi(129)} \equiv 1 \pmod{129}$.

Calculamos $\phi(129) = \phi(3 \cdot 43) = \phi(3) \cdot \phi(43) = (3 - 1)(43 - 1) = 84$.

Então $10^{84} \equiv 1 \pmod{129}$.

Como $425 = 5 \cdot 84 + 5$, temos

$$\begin{aligned} 10^{425} &= 10^{5 \cdot 84 + 5} \\ &= (10^{84})^5 \cdot 10^5 \\ &\equiv (1)^5 \cdot 10^5 \equiv 10^5 \pmod{129} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} 10^3 &= 1000 \equiv 97 \pmod{129} \\ 10^4 &= 10^3 \cdot 10 \equiv 97 \cdot 10 = 970 \equiv 67 \pmod{129} \\ 10^5 &= 10^4 \cdot 10 \equiv 67 \cdot 10 = 670 \equiv 25 \pmod{129} \end{aligned}$$

Portanto $10^{425} \equiv 10^5 \equiv 25 \pmod{129}$, logo 25 é o resto da divisão de 10^{425} por 129.

4. Congruências determinando comprimentos de dízimas periódicas

O próximo teorema deste capítulo é uma tradução, em termos de congruências, de fatos anteriormente estabelecidos. Gauss, em *Disquisitiones Arithmeticae*, foi o primeiro matemático a estabelecer o comprimento de uma dízima periódica, como uma aplicação da teoria de congruências criada por ele, conforme Bullynck [1].

4.1 O teorema básico de Gauss

Teorema 4.1 (Gauss, 1801). *Sendo a e b inteiros, primos entre si, com $b \geq 3$ e $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, o comprimento ℓ da dízima periódica da representação decimal de $\frac{a}{b}$ é o menor inteiro positivo ℓ tal que $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$.*

Observação 4.1. *Como observado na definição 2.3, o inteiro ℓ a que se refere o teorema 4.1 depende apenas do denominador b, sendo denotado por $\ell(b)$ ou $\ell(1/b)$. Stark [18] define $\ell = \ell(b)$ como sendo a* ordem de 10 módulo b, *e denota* $\ell = \mathrm{ord}_b(10)$.

Demonstração do teorema 4.1. Pela definição 2.3 de comprimento de uma dízima periódica, quando b e 10 são primos entre si, e $b \geq 3$, o primeiro múltiplo de b da forma $\underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ algarismos}}$ determina o comprimento ℓ da dízima periódica da fração comum $\frac{a}{b}$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ noves}} \text{ é múltiplo de } b &\Leftrightarrow b \text{ divide } \underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ noves}} \\
&\Leftrightarrow b \text{ divide } 10^\ell - 1 \\
&\Leftrightarrow 10^\ell \equiv 1 \pmod{b}
\end{aligned}$$

Portanto, ℓ é o primeiro inteiro positivo n satisfazendo $10^n \equiv 1 \pmod{b}$. □

Exemplo 4.1. *Qual é o comprimento ℓ da dízima periódica na representação decimal da fração irredutível $\frac{1}{13}$? E da fração $\frac{1}{37}$?*

Temos 13 *e* 10 *primos entre si. Aplicando o Teorema 4.1, buscaremos o primeiro inteiro positivo* ℓ *tal que* $10^{\ell} \equiv 1 \pmod{13}$. *Temos*

$$\begin{aligned}
&10 \equiv -3 \pmod{13}\\
&10^2 \equiv (-3)^2 = 9 \pmod{13}\\
&10^3 \equiv 10 \cdot 10^2 \equiv (-3) \cdot 9 \equiv -27 \equiv -1 \pmod{13}\\
&10^4 = 10 \cdot 10^3 \equiv (-3) \cdot (-1) \equiv 3 \pmod{13}\\
&10^5 = 10 \cdot 10^4 \equiv (-3) \cdot 3 \equiv -9 \equiv 4 \pmod{13} \text{ e finalmente}\\
&10^6 = 10 \cdot 10^5 \equiv (-3) \cdot 4 \equiv -12 \equiv 1 \pmod{13}
\end{aligned}$$

Portanto $\ell = \ell(13) = 6$. *De fato, podemos confirmar que* $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$, *sendo* 6 *o comprimento da dízima periódica.*

Em relação à fração $1/37$ *temos* 10 *e* 37 *primos entre si, e então, buscando* $\ell(37)$ *temos*

$$\begin{aligned}
&10^2 \equiv 100 \equiv 26 \pmod{37}\\
&10^3 \equiv 10 \cdot 10^2 \equiv 260 = 7 \cdot 37 + 1 \equiv 1 \pmod{37}
\end{aligned}$$

Assim, detectamos que a dízima periódica de $\frac{1}{37}$ *tem comprimento* $\ell(37) = 3$, *e confirmamos com uma calculadora que* $\frac{1}{37} = 0,\overline{027}$.

Observação 4.2. *Duas frações aparentemente não equivalentes podem ser representadas pela mesma dízima periódica. Por exemplo,*

$$\frac{23}{99} = 0,232323\ldots = 0,\overline{23}.$$

com dízima periódica também representando a fração

$$\frac{2323}{9999} = 0,23232323\ldots = 0,\overline{2323}.$$

Ocorre que $2323 = 23 \times 101$, $9999 = 99 \times 101$, *daí a equivalência das duas frações. Por outro lado, uma dízima periódica de comprimento* ℓ *pode ser equivocadamente interpretada como tendo comprimento* 2ℓ *ou um múltiplo de* ℓ. *Como exemplo,*

$$0,2323232323 = 0,\overline{23} = 0,\overline{2323} = 0,\overline{232323}$$

Na verdade, qualquer comprimento inadequadamente maior que o comprimento mínimo é múltiplo deste. Este fato é confirmado pela proposição 4.1.

Proposição 4.1. *Seja* b *um inteiro,* $b \geq 3$*, primo com* 10*, e seja* $\ell = \ell(b)$*. Então temos as seguintes propriedades.*

1. *Se* m *é um inteiro positivo e* $10^m \equiv 1 \pmod{b}$ *então* ℓ *é um divisor de* m*.*

2. ℓ *é um divisor de* $\phi(b)$*.*

Demonstração. 1. Suponhamos $b \geq 3$, primo com 10, m inteiro positivo, e $\ell = \ell(b)$.

Pelo algoritmo da divisão em $\mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $m = \ell q + r$, $0 \leq r < \ell$ (dividimos m por ℓ obtendo quociente q e resto r).

Então
$$10^m = 10^{\ell q + r} = (10^\ell)^q \cdot 10^r$$
Por hipótese, $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$, logo $(10^\ell)^q \equiv 1 \pmod{b}$. Temos então
$$10^m \equiv 10^r \pmod{b}$$
Como $10^m \equiv 1 \pmod{b}$, segue que $10^r \equiv 1 \pmod{b}$.

Se $r > 0$ temos uma contradição pois $r < \ell$ e $\ell = \ell(b)$ é o menor inteiro positivo satisfazendo $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$.

Logo $r = 0$ e então $m = \ell q$, ou seja, $\ell \mid m$.

2. Pelo Teorema de Euler (teorema 3.2), sendo 10 e b primos entre si, $10^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$.

Logo, pelo resultado estabelecido no item 1, ℓ divide $\phi(b)$ □

Na proposição 2.4, ficou estabelecido que a dízima periódica de uma fração comum a/b, $b \geq 3$ e primo com 10, tem comprimento do período $\ell(b) \leq b - 1$. Na próxima proposição estabeleceremos uma condição necessário para termos $\ell(b) = b - 1$.

Proposição 4.2. *Seja* a/b *uma fração comum irredutível, com* $b \geq 3$*,* b *primo com* 10*.*

Se $\ell(b) = b - 1$ *então* b *é um número primo.*

Demonstração. Suponhamos $\ell(b) = b - 1$.

Pela definição 3.2, temos $\phi(b) \leq b - 1$ e, pela proposição 4.1, $\ell(b)$ divide $\phi(b)$, logo $b - 1$ é divisor de $\phi(b)$ e portanto $b - 1 \leq \phi(b)$.

Portanto $\phi(b) = b - 1$.

Se b não for um número primo, um dos inteiros do conjunto $\{2, \ldots b - 1\}$ será divisor de b, e portanto não será relativamente primo com b, implicando em $\phi(b) < b - 1$.

Portanto b é primo. □

Observação 4.3. *Nem todo primo* p *satisfaz* $\ell(p) = p - 1$. *Na seguinte tabela exibimos a expansão decimal dos primeiros cinco primos* p *com* $\ell(p) = p - 1$. *Depois do número primo 29, os únicos primos, menores que 100, com esta propriedade, são 47, 59, 61, e 97. Na tabela 4.1, à página 45, temos os primeiros 96 primos a partir de 3, com os correspondentes comprimentos de dízimas periódicas de seus inversos.*

primo p	*expansão de* $1/p$
7	$0,\overline{142857}$
17	$0,\overline{0588235294117647}$
19	$0,\overline{052631578947368421}$
23	$0,\overline{0434782608695652173913}$
29	$0,\overline{0344827586206896551724137931}$

Sendo $b \geq 3$ um inteiro, primo com 10, uma proposição caracterizadora de $\ell = \ell(b)$ é a proposição 4.3.

Proposição 4.3. *Seja* $b \geq 3$ *um inteiro, com* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$ *e seja* ℓ *um inteiro positivo. Então* $\ell = \ell(b) = \ell(1/b)$ *se, e somente se,*

(i) $10^\ell \equiv 1 \pmod b$, *e*

(ii) Para cada inteiro positivo m *tal que* $10^m \equiv 1 \pmod b$, ℓ *divide* m.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\ell = \ell(b)$. Então, pelo teorema 4.1, ℓ é o primeiro inteiro positivo satisfazendo $10^\ell \equiv 1 \pmod b$ e então obviamente temos (i).

Seja m um inteiro positivo tal que $10^m \equiv 1 \pmod b$. Dividindo m por ℓ temos $m = q \cdot \ell + r$ sendo $0 \leq r < \ell$. Daí $10^m = 10^{q \cdot \ell + r} = (10^\ell)^q \cdot 10^r$.

Temos $10^m \equiv 1 \pmod b$ e $10^\ell \equiv 1 \pmod b$. Logo

$$\begin{aligned} 10^r &\equiv 1^q \cdot 10^r \equiv (10^\ell)^q \cdot 10^r \pmod b \\ &\equiv 10^m \equiv 1 \pmod b \end{aligned}$$

Assim, $10^r \equiv 1 \pmod b$ com $0 \leq r < \ell$. Pela minimalidade de ℓ, temos necessariamente $r = 0$, logo $m = q \cdot \ell$ e portanto $\ell \mid m$. Assim concluímos a demonstração de que se $\ell = \ell(b)$ então vale (ii).

($\Leftarrow$) Suponhamos válidos (i) e (ii).

Pelo item (i), ℓ é um inteiro positivo satisfazendo $10^\ell \equiv 1 \pmod b$. Por (ii), se m é inteiro positivo e $10^m \equiv 1 \pmod b$ então $\ell \mid m$, logo $\ell \leq m$, portanto ℓ é menor expoente positivo com tal propriedade. Logo, pelo teorema 4.1, $\ell = \ell(b)$. □

Observação 4.4. *Professores do ensino básico precisam ter cautela na criação de problemas envolvendo o cálculo de dízimas periódicas. Por exemplo, podemos determinar a priori que se* $\frac{a}{19}$ *é uma fração irredutível,* a *inteiro positivo, então sua dízima periódica terá comprimento* $\ell(19) = 18$.

De fato, temos $\phi(19) = 19 - 1 = 18$, *e os divisores positivos de 18 são os elementos do conjunto* $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. *Pela Proposição 4.1,* $\ell = \ell(19)$ *é um divisor de* $\phi(19) = 18$, *isto é,* $\ell \in D(18)$. *Temos*

$$\begin{aligned}
10^2 &\equiv 100 \equiv 5 \pmod{19}, \ \textit{pois } 100 = 5 \cdot 19 + 5 \\
10^3 &\equiv 10^2 \cdot 10 \equiv 50 \equiv -7 \pmod{19}, \ \textit{pois } 57 = 3 \cdot 19 \\
10^6 &\equiv (10^3)^2 \equiv 49 \equiv -8 \pmod{19} \\
10^9 &\equiv 10^3 \cdot 10^6 \equiv 56 \equiv -1 \pmod{19}, \ \textit{e finalmente encontramos} \\
10^{18} &\equiv (10^9)^2 \equiv 1 \pmod{19}
\end{aligned}$$

Portanto, $18 = \ell(19)$, *ou seja, 18 é o comprimento da dízima periódica de* $\frac{a}{19}$ *quando* $\mathrm{mdc}(a, 19) = 1$.

Uma calculadora nos dá $\frac{1}{19} = 0,\overline{052631578947368421}$, $\frac{2}{19} = 0,\overline{105263157894736842}$.

4.2 Calculando $\ell(b)$ pelo Teorema de Gauss

Exemplo 4.2. *Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de* $\frac{9}{49}$ *?*

Solução. Buscamos $\ell = \ell(49)$. Pela proposição 4.1, ℓ é um divisor de $\phi(49)$.

Pela Proposição 3.5, $\phi(49) = \phi(7^2) = 7^2 - 7 = 42$.

Os divisores de $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ são os elementos do conjunto $D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Um desses elementos será ℓ.

Agora calculamos

$$\begin{aligned}
10^2 &= 100 \equiv 2 \pmod{49} \\
10^3 &= 10 \cdot 10^2 \equiv 10 \cdot 2 = 20 \pmod{49}
\end{aligned}$$

Não precisamos nos preocupar com as potências 10^4 e 10^5, pois 4 e 5 não são elementos de $D(42)$. Prosseguindo

$$\begin{aligned}
10^6 &= (10^2)^3 \equiv 2^3 = 8 \pmod{49}\\
10^7 &= 10^6 \cdot 10 \equiv 8 \cdot 10 = 80 \equiv 31 \equiv -18 \pmod{49}\\
10^{14} &= (10^7)^2 \equiv (-18)^2 = 324 \equiv 30 \equiv -19 \pmod{49}\\
10^{21} &= 10^7 \cdot 10^{14} \equiv 18 \cdot 19 = 342 \equiv 48 \equiv -1 \pmod{49}
\end{aligned}$$

Assim a igualdade $10^n \equiv 1 \pmod{49}$ não se verifica para os valores de n que são divisores próprios de 42. Logo, $\ell(49) = 42$ é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de 9/49.

Observamos que poderíamos não conseguir inferir isto usando uma calculadora eletrônica comum, por limitações de memória da calculadora. Consultando o site WolframAlpha [20], obtemos

$$9/49 = 0,\overline{183673469387755102040816326530612244897959}.$$

Exemplo 4.3. *Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de* $\dfrac{50}{101}$*?*

Solução. 101 é um número primo, logo $\phi(101) = 101 - 1 = 100$. Os divisores positivos de $100 = 2^2 \cdot 5^2$ são os elementos do conjunto

$$D(100) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}.$$

O cálculo de $\ell = \ell(101)$ agora é bem simples, como veremos.

$$\begin{aligned}
10 &\equiv 10 \pmod{101}\\
10^2 &= 100 \equiv -1 \pmod{101}\\
10^4 &= (10^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{101}
\end{aligned}$$

Portanto, $\ell(101) = 4$. Uma calculadora comum nos dá

$50/101 = 0,495049504950\ldots = 0,\overline{4950}$

Exemplo 4.4. *Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de* $\dfrac{4}{47}$*?*

Solução. 47 é um número primo, logo $\phi(47) = 47 - 1 = 46$. Os divisores positivos de $46 = 2 \cdot 23$ são os elementos do conjunto $D(46) = \{1, 2, 23, 46\}$.

Para o cálculo de $\ell = \ell(47)$ fazemos

$$\begin{aligned}
10 &\equiv 10 \pmod{47}\\
10^2 &= 100 \equiv 6 \pmod{47}\\
10^4 &= (10^2)^2 \equiv 6^2 = 36 \equiv -11 \pmod{47}\\
10^8 &= (10^4)^2 \equiv (-11)^2 = 121 \equiv 27 \equiv -20 \pmod{47}\\
10^{16} &= (10^8)^2 \equiv (-20)^2 = 400 \equiv 24 \equiv -23 \pmod{47}\\
10^{23} &= 10^{16} \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 10 \equiv (-23)(-11) \cdot 6 \cdot 10 \pmod{47}\\
&\equiv 253 \cdot 6 \cdot 10 \equiv 18 \cdot 6 \cdot 10 = 108 \cdot 10 \equiv 14 \cdot 10 = 140 \equiv 46 \equiv -1 \pmod{47}
\end{aligned}$$

Portanto $\ell = 46$. Para apreciar, calculamos $4/47$ através do site Wolfram Alpha [20].

$4/47 = 0,\overline{4255319148936170212765957446808510638297872340}$.

Exemplo 4.5. *Qual é o comprimento da dízima periódica na representação decimal de* $\dfrac{1}{2017}$ *?*

O número 2017 é primo, logo $\phi(2017) = 2017 - 1 = 2016$.

Os divisores de $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, obtidos através do site WolframAlpha [20], são os elementos do conjunto

$D(2016) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 96, 112, 126, 144, 168, 224, 252, 288, 336, 504, 672, 1008, 2016\}$

Com ajuda do site WolframAlpha [20], fizemos os cálculos de potências módulo 2017. Começamos com o penúltimo divisor, 1008.

$10^{1008} \equiv 2016 \equiv -1 \pmod{2017}$

Como $1008 = 2016/2$, podemos então eliminar os divisores comuns de 1008 e 2016, pois sendo $m \geq 2$, d_1 e d_2 inteiros positivos, se d_1 é divisor de d_2 e $10^{d_2} \not\equiv 1 \pmod{m}$ então $10^{d_1} \not\equiv 1 \pmod{m}$.

Pois se tivermos $10^{d_1} \equiv 1 \pmod{m}$ então $10^{d_2} = (10^{d_1})^{d_2/d_1} \equiv 1^{d_2/d_1} = 1 \pmod{m}$. Como $10^{1008} \equiv 2016 \equiv -1 \pmod{2017}$, teremos $10^d \not\equiv 1 \pmod{2017}$ para cada divisor d de 1008.

Os divisores de 1008 são os elementos do conjunto

$D(1008) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 112, 126, 144, 168, 252, 336, 504, 1008\}$.

Então $\ell = \ell(2017)$ está no conjunto diferença

$D(2016) - D(1008) = \{32, 96, 224, 288, 672, 2016\}$.

Através do site WolframAlpha [20], obtemos $10^{672} \equiv 294 \not\equiv 1 \pmod{2017}$. Podemos então eliminar também, do conjunto $D(2016) - D(1008)$ os números que sejam também divisores de 672, que são os elementos do conjunto $\{32, 96, 224, 672\}$.

Temos então $\ell \in \{288, 2016\}$. Finalmente calculamos $10^{288} \equiv 79 \not\equiv 1 \pmod{2017}$.

Logo $\ell = 2016$ e estabelecemos que a dízima periódica de $\dfrac{1}{2017}$ terá 2016 dígitos.

4.3 Revisitando o comprimento da dízima periódica de $\frac{a}{2^m 5^n b}$ com $b \geq 3$ primo com 10

Como já vimos na proposição 2.3, a fração $\dfrac{a}{2^m 5^n b}$, $m \geq 1$ ou $n \geq 1$, sendo irredutível, com $b \geq 3$ primo com 10, será uma dízima periódica composta, isto é, com uma parte não periódica precedendo a parte periódica. O comprimento da parte periódica é precisamente $\ell = \ell(b)$. A parte não periódica tem comprimento sendo o maior dos expoentes m e n.

Exemplo 4.6. *Determinar os comprimentos da parte periódica e da parte não periódica da dízima periódica representação decimal de* $\dfrac{249}{1400}$

Solução. Notamos que $\dfrac{249}{9800}$ *é irredutível, sendo* $9800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Agora, $\max\{2,\ 3\} = 3$ *é o comprimento da parte não periódica da dízima.*

Já $\ell = \ell(7) = 6$ *é o comprimento da parte periódica.*

Para nossa apreciação, $\dfrac{249}{9800} = 177\overline{857142}$.

Tabela 4.1. Comprimentos de dízimas periódicas dos inversos dos primeiros 96 primos a partir de 3. O asterisco $*$ destaca os inversos dos primos p com $\ell(p) = p - 1$.

$1/p$	$\ell(p)$	$1/p$	$\ell(p)$	$1/p$	$\ell(p)$	$1/p$	$\ell(p)$	$1/p$	$\ell(p)$	$1/p$	$\ell(p)$
1/3	1	1/67	33	1/149 *	148	1/233 *	222	1/331	110	1/431	215
1/7 *	6	1/71	35	1/151	75	1/239	7	1/337 *	336	1/433 *	35
1/11	2	1/73	8	1/157	78	1/241	30	1/347	173	1/439	219
1/13	6	1/79	13	1/163	81	1/251	50	1/349	116	1/443	221
1/17 *	16	1/83	41	1/167 *	166	1/257 *	256	1/353	32	1/449	32
1/19 *	18	1/89	44	1/173	43	1/263 *	262	1/359	179	1/457	152
1/23 *	22	1/97 *	96	1/179 *	178	1/269 *	268	1/367 *	366	1/461 *	460
1/29 *	28	1/101	4	1/181 *	180	1/271	5	1/373	186	1/463	154
1/31	15	1/103	34	1/191	95	1/277	69	1/379 *	378	1/467	233
1/37	3	1/107	53	1/193 *	192	1/281	28	1/383 *	382	1/479	239
1/41	5	1/109 *	108	1/197	98	1/283	141	1/389 *	388	1/487 *	486
1/43	21	1/113 *	112	1/199	99	1/293	146	1/397	99	1/491 *	490
1/47 *	46	1/127	42	1/211	30	1/307	153	1/401	200	1/499 *	498
1/53	13	1/131 *	130	1/223 *	222	1/311	155	1/409	204	1/503 *	502
1/59 *	58	1/137	8	1/227	113	1/313 *	312	1/419 *	418	1/509 *	508
1/61 *	60	1/139	46	1/229 *	228	1/317	79	1/421	140	1/521	52

Fonte: Dolisi [3] para primos menores que 500, e complementação de três primos extras feita pelo próprio autor, consultando o site WolframAlpha [20]

5. Refinamentos no cálculo de $\ell(b)$, $b \geq 3$ primo com 10

Neste capítulo desenvolveremos proposições que tratam do cálculo de $\ell = \ell(b) = \ell(1/b)$ em situações especiais. Como estabelecido na definição 2.3, sendo b inteiro, $b \geq 3$, primo com 10, o comprimento ℓ do período da dízima periódica de uma fração comum irredutível $\frac{a}{b}$ depende unicamente do denominador b, sendo o comprimento $\ell = \ell(b) = \ell(1/b)$ do período da dízima de $\frac{1}{b}$. Pelo teorema 4.1, ℓ é primeiro inteiro positivo satisfazendo $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$. Por este motivo nos restrigiremos ao estudo de comprimentos de períodos de dízimas de frações $\frac{1}{b}$, sendo $b \geq 3$ primo com 10.

5.1 $\ell(b_1 \cdot b_2)$ quando b_1 e b_2 são primos entre si e primos com 10

Sabemos que $\ell(7) = 6$, $\ell(11) = 2$. Como podemos inferir, a partir desses dados, o valor de $\ell(77)$? A resposta a esta pergunta vem da seguinte proposição.

Proposição 5.1. *Suponhamos que b_1 e b_2 são inteiros primos entre si, ambos primos com 10, com $b_1 \geq 3$, $b_2 \geq 3$.*

Então $\ell(b_1 \cdot b_2)$ é o mínimo múltiplo comum de $\ell(b_1)$ e $\ell(b_2)$.

Observação 5.1. *Da teoria dos números elementar em Hefez [7], o mínimo múltiplo comum de dois inteiros positivos a e b é um inteiro $m = \mathrm{mmc}(a, b)$, caracterizado pelas seguintes propriedades.*

M1. $m > 0$ e m *é múltiplo de ambos,* a e b, *isto é,* $a \mid m$ e $b \mid m$.

M2. Se M é um inteiro múltiplo de ambos a e b então M é também múltiplo de m. Em outras palavras, se M é um inteiro tal que $a \mid M$ e $b \mid M$ então $m \mid M$.

Conforme Hefez [7], um inteiro m que satisfaça as condições M1 e M2 será o menor inteiro positivo múltiplo de a e de b, daí a denominação mínimo múltiplo comum de a e b.

Feita a observação anterior vamos à demonstração da proposição 5.1.

Demonstração da proposição 5.1. Sejam b_1 e b_2 inteiros primos entre si, primos com 10, ambos ≥ 3.

Vamos denotar $\ell_1 = \ell(b_1)$, $\ell_2 = \ell(b_2)$, $\ell = \mathrm{mmc}(\ell_1, \ell_2)$ e $b = b_1 \cdot b_2$.

Trataremos de demonstrar que $\ell = \ell(b)$.

Da caracterização do mmc dada na observação 5.1, $\ell_1 \mid \ell$ e $\ell_2 \mid \ell$.

Portanto existem inteiros positivos q_1, q_2, tal que $\ell = q_1 \cdot \ell_1$, $\ell = q_2 \cdot \ell_2$.

Pelo teorema 4.1, temos $10^{\ell_1} \equiv 1 \pmod{b_1}$ e $10^{\ell_2} \equiv 1 \pmod{b_2}$.

Daí temos,

$10^{\ell} = 10^{q_1 \cdot \ell_1} = (10^{\ell_1})^{q_1} \equiv 1^{q_1} \equiv 1 \pmod{b_1}$.

$10^{\ell} = 10^{q_2 \cdot \ell_2} = (10^{\ell_2})^{q_2} \equiv 1^{q_2} \equiv 1 \pmod{b_2}$.

Pela definição 3.1 de congruência, temos

$b_1 \mid (10^{\ell} - 1)$ e $b_2 \mid (10^{\ell} - 1)$. Como b_1 e b_2 são primos entre si, temos então, necessariamente, $b_1 \cdot b_2$ divide $10^{\ell} - 1$, logo

$$10^{\ell} \equiv 1 \pmod{b_1 \cdot b_2}, \text{ ou seja, } 10^{\ell} \equiv 1 \pmod{b}.$$

Assim sendo, ℓ satisfaz a condição (i) da proposição 4.3, quando $b = b_1 \cdot b_2$. Demonstremos que ℓ também satisfaz a condição (ii) da referida proposição.

Seja m um inteiro positivo tal que $10^m \equiv 1 \pmod{b}$. Demonstraremos que $\ell \mid m$.

Como $b = b_1 \cdot b_2$, temos $b_1 \mid b$ e $b_2 \mid b$. Como $10^m \equiv 1 \pmod{b}$, temos $b \mid (10^m - 1)$. Por transitividade, $b_1 \mid (10^m - 1)$ e $b_2 \mid (10^m - 1)$, logo $10^m \equiv 1 \pmod{b_1}$ e $10^m \equiv 1 \pmod{b_2}$.

Agora, $\ell_1 = \ell(b_1)$, daí de $10^m \equiv 1 \pmod{b_1}$, aplicando a proposição 4.1, $\ell_1 \mid m$.

$\ell_2 = \ell(b_2)$, daí de $10^m \equiv 1 \pmod{b_2}$, $\ell_2 \mid m$.

Como $\ell_1 \mid m$ e $\ell_2 \mid m$, temos pela observação 5.1, $\mathrm{mmc}(\ell_1, \ell_2)$ divide m. Logo, $\ell \mid m$.

Pela proposição 4.3, temos então $\ell = \ell(b)$.

Portanto $\ell(b_1 \cdot b_2) = \mathrm{mmc}(\ell(b_1), \ell(b_2))$. □

5.2 $\ell(p^a)$, $p \geq 3$ primo, $p \neq 5$, e a um inteiro positivo

Não temos uma fórmula mágica que nos dê $\ell = \ell(p)$ instantaneamente para cada primo p, com $p \geq 3$ e $p \neq 5$. A única ferramenta que temos para determinar $\ell(p)$ é o teorema de Gauss, teorema 4.1.

No entanto podemos desenvolver resultados que não dão $\ell(p^a)$ quando $a \geq 2$, a partir de $\ell(p)$. Tais resultados foram organizados a partir de consultas a Dolisi [3], Lyons [10] e Ross [15].

O lema seguinte, desenvolvido em 1875 por Thomas Muir [13], é o primeiro de dois lemas que nos serão necessários para demonstrações de proposições sobre comprimentos de dízimas de $1/p^a$, $p \geq 3$ primo, $p \neq 5$, $a \geq 2$ um inteiro.

Lema 5.1 (Lema 1 de Muir). *Sejam M, a, n inteiros positivos e $p \geq 3$ um número primo.*

1. *Se $M \equiv 1 \pmod{p^a}$ então $M^p \equiv 1 \pmod{p^{a+1}}$.*
2. *Se $M \equiv 1 \pmod{p^a}$ então $M^{p^n} \equiv 1 \pmod{p^{a+n}}$.*

Demonstração. 1. Suponhamos $M \equiv 1 \pmod{p^a}$. Então $M = 1+\lambda p^a$, sendo λ um inteiro. Daí temos

$$\begin{aligned} M^p &= (1+\lambda p^a)^p \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (\lambda p^a)^k \end{aligned}$$

Para cada k, $1 \leq k \leq p-1$, temos $\binom{p}{k}$ divisível por p, conforme Hefez [7]. Então escrevendo $\binom{p}{k} = p \cdot m_k$, m_k inteiro, temos

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} (\lambda p^a)^k &= p \cdot m_k \cdot \lambda^k p^{ka} \\ &= p \cdot m_k \cdot \lambda^k p^{(k-1)a} p^a \quad (\text{temos } k \geq 1) \\ &= n_k \cdot p^{a+1}, \quad n_k \text{ um inteiro.} \end{aligned}$$

Quando $k = p$,

$$\begin{aligned} \binom{p}{k}(\lambda p^a)^k = \binom{p}{p}(\lambda p^a)^p &= \lambda^p p^{pa} = \lambda^p p^{(p-2)a+2a} \\ &= \lambda^p p^{(p-2)a+(a-1)+a+1} = n_p \cdot p^{a+1}, \quad n_p \text{ um inteiro.} \end{aligned}$$

Assim sendo, temos

$$M^p = 1 + \sum_{k=1}^{p} (n_k \cdot p^{a+1}) = 1 + p^{a+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} n_k \right)$$

Logo, $p^{a+1} \mid (M^p - 1)$ e portanto $M^p \equiv 1 \pmod{p^{a+1}}$.

2. Pelo item 1, se $M \equiv 1 \pmod{p^a}$ então $M^p \equiv 1 \pmod{p^{a+1}}$.

   Logo, $(M^p)^p \equiv 1 \pmod{p^{a+2}}$, ou seja, $M^{p^2} \equiv 1 \pmod{p^{a+2}}$.

   Elevando ao expoente p ambos os membros em "$M \equiv 1 \pmod{p^a}$" por n vezes consecutivas, obtemos $M^{p^n} \equiv 1 \pmod{p^{a+n}}$. □

Observação 5.2. *O Lema 1 de Muir, lema 5.1, é um caso particular do seguinte lema, cuja demonstração pode ser desenvolvida de módulo análogo.*

Lema 5.2 (Lema 1 de Muir, caso geral). *Sejam M, N, a, n inteiros positivos e $p \geq 3$ um número primo.*

1. *Se $M \equiv N \pmod{p^a}$ então $M^p \equiv N^p \pmod{p^{a+1}}$.*

2. *Se $M \equiv N \pmod{p^a}$ então $M^{p^n} \equiv N^{p^n} \pmod{p^{a+n}}$.*

Demonstraremos agora a seguinte proposição básica.

Proposição 5.2. *Seja p um inteiro primo, $p \geq 3$, $p \neq 5$, e sejam a e b inteiros positivos. Então temos*

1. *Se $a \geq b$ então $\ell(p^a) \geq \ell(p^b)$.*

2. *$\ell(p^a) = p^s \cdot \ell(p)$ para algum inteiro s, $0 \leq s \leq a - 1$.*

Demonstração. 1. Sejam a e b inteiros positivos, com $a \geq b$. Sendo p primo, $p \geq 3$, $p \neq 5$, $1/p^a$ e $1/p^b$ serão dízimas periódicas simples.

   Pelo teorema 4.1, $10^{\ell(p^a)} \equiv 1 \pmod{p^a}$, logo $p^a \mid (10^{\ell(p^a)} - 1)$.

   Como $b \leq a$, temos $p^b \mid p^a$, logo $p^b \mid (10^{\ell(p^a)} - 1)$ e então $10^{\ell(p^a)} \equiv 1 \pmod{p^b}$.

   Pela proposição 4.3, $\ell(p^b) \mid \ell(p^a)$, portanto $\ell(p^b) \leq \ell(p^a)$, ou seja, $\ell(p^a) \geq \ell(p^b)$.

2. Sendo a um inteiro positivo, usando notações adotadas na demonstração do item anterior, temos $10^{\ell(p^a)} \equiv 1 \pmod{p^a}$, isto é, $p^a \mid (10^{\ell(p^a)} - 1)$. Como $p \mid p^a$, temos então $p \mid (10^{\ell(p^a)} - 1)$, ou seja, $10^{\ell(p^a)} \equiv 1 \pmod{p}$.

   Pela proposição 4.3, temos $\ell(p) \mid \ell(p^a)$.

   Por outro lado, temos $10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p}$.

   Pelo lema 1 de Muir, lema 5.1, então $(10^{\ell(p)})^{p^{a-1}} \equiv 1 \pmod{p^{1+(a-1)}}$, ou seja

$$10^{\ell(p) \cdot p^{a-1}} \equiv 1 \pmod{p^a}$$

Logo, $\ell(p^a) \mid \ell(p) \cdot p^{a-1}$.

Temos então $\ell(p) \mid \ell(p^a)$ e $\ell(p^a) \mid \ell(p) \cdot p^{a-1}$.

Então $\ell(p^a) = k \cdot \ell(p)$ e $\ell(p) \cdot p^{a-1} = k' \cdot \ell(p^a)$, para certos inteiros positivos k e k'.

Daí, $\ell(p) \cdot p^{a-1} = k' \cdot \ell(p^a) = (k' \cdot k) \cdot \ell(p)$, portanto $k \cdot k' = p^{a-1}$.

Sendo p um primo, temos $k = p^s$ para algum inteiro s, $0 \le s \le a - 1$.

Logo, $\ell(p^a) = p^s \cdot \ell(p)$, para algum inteiro s, $0 \le s \le a - 1$. □

Pelo que ficou estabelecido na proposição 5.2, sendo p um número primo, $p \ge 3$ e $p \ne 5$, na sequência de frações comuns

$$1/p,\ 1/p^2,\ 1/p^3,\ 1/p^4, \ldots$$

é esperado que tenhamos dízimas periódicas de comprimentos maiores à medida que o expoente de p aumenta. Além disso, a proposição 5.2 nos garante que sendo a um inteiro positivo, se $\ell(p^a) = \ell(p)$ então $\ell(p^b) = \ell(p)$ para cada inteiro b tal que $1 \le b \le a$. Assim, surge uma primeira questão sobre para quais inteiros positivos a temos $\ell(p^a) = \ell(p)$. Esta questão é respondida pela próxima proposição. O caso $n = 2$ é uma proposição de Dolisi [3], que mostrou-se naturalmente generalizável para $n \ge 2$.

Proposição 5.3. *Seja p um inteiro primo, $p \ge 3$, $p \ne 5$, e seja $n \ge 2$ um inteiro. Então*

$$\ell(p^n) = \ell(p) \text{ se, e somente se, } 10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos $\ell(p^n) = \ell(p)$.

Temos $10^{\ell(p^n)} \equiv 1 \pmod{p^n}$, logo $10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^n}$.

Pelo Pequeno Teorema de Fermat, teorema 3.1, $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Logo, $\ell(p)$ divide $p-1$ (proposição 4.1). Assim sendo $p-1 = k \cdot \ell(p)$ para algum inteiro positivo k.

De $10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^n}$ temos $(10^{\ell(p)})^k \equiv 1^k \pmod{p^n}$.

Logo, $10^{k \cdot \ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^n}$, portanto $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^n}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^n}$.

Então, pela proposição 4.1, $\ell(p^n)$ divide $p - 1$, logo $\ell(p^n) \le p - 1$.

Pela proposição 5.2, $\ell(p^n) = p^s \cdot \ell(p)$, para algum inteiro s, $0 \le s \le n - 1$.

Se $s \ge 1$ então $\ell(p^n) = p^s \cdot \ell(p) \ge p$.

Como $\ell(p^n) \le p - 1$, só é possível que tenhamos $s = 0$, portanto $\ell(p^n) = \ell(p)$. □

Observação 5.3 (Primos de Wieferich na base 10). *Considerando-se o intervalo de primos números* p, $3 \leq p < 1{,}862 \times 10^{14}$, $p \neq 5$, *os três números primos* 3, 487, *e* 56 598 313 *são os únicos satisfazendo* $\ell(p^2) = \ell(p)$, *ou seja, os únicos primos satisfazendo* $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. *Esta informação, atualizada até maio de 2020, nos é repassada por Fisher [4] e pelo* site *OEIS [14]. Tais primos são conhecidos como* primos de Wieferich na base 10. *A finitude do conjunto de primos de Wieferich na base* 10 *é um problema em aberto no momento. Assim, excetuando-se os três primos de Wieferich, os primos* p *no intervalo* $3 \leq p < 1{,}862 \times 10^{14}$, $p \neq 5$ *são tais que* $\ell(p^2) > \ell(p)$.

Computamos $\ell(3) = \ell(3^2) = 1$. *Simples assim,* $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ *e* $\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$.

Como o uso do programa Maple 12, ou pelo site *Wolfram Alpha [20], podemos rapidamente mostrar que* $10^{486} \equiv 1 \pmod{487^2}$ *e que* $10^{56598312} \equiv 1 \pmod{56598313^2}$ *portanto, pela proposição 5.3, temos* $\ell(487^2) = \ell(487)$ *e* $\ell(56598313^2) = \ell(56598313)$. *Também podemos mostrar, com uma certa rapidez, que* $\ell(487) = 486$.

No mesmo intervalo de primos p, $3 \leq p < 1{,}862 \times 10^{14}$ *nenhum primo satisfaz a congruência* $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$, *ou seja, para todos os primos* p *nesse intervalo,* $p \neq 5$, *temos* $\ell(p^3) > \ell(p)$.

Fica claro então que se $n \geq 3$, *é provável que não haja nenhum primo* p, $p \geq 3$ *tal que* $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^n}$. *Pois se* $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^n}$, *com* $n \geq 3$, *então, como* $p^3 \mid p^n$ *e* $p^2 \mid p^n$, *teremos* $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ *e* $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$.

Para os primos p, $p \geq 3$, $p \neq 5$, temos uma proposição que nos dá como obter $\ell(p^a)$ para os expoentes $a \geq 2$. Para sua dedução necessitaremos de um segundo lema de Thomas Muir, que enuncia propriedades recíprocas daquelas enunciadas no lema 1.

Lema 5.3 (Lema 2 de Muir). *Sejam* M, a, n *inteiros positivos e* $p \geq 3$ *um número primo.*

1. *Se* $M^p \equiv 1 \pmod{p^{a+1}}$ *então* $M \equiv 1 \pmod{p^a}$.

2. *Se* $M^{p^n} \equiv 1 \pmod{p^{a+n}}$ *então* $M \equiv 1 \pmod{p^a}$.

Observação 5.4. *É falso o lema 2 de Muir para* $p = 2$ *(mas o lema 1 é verdadeiro também quando* $p = 2$*).*

$M^2 \equiv 1 \pmod{2^{a+1}}$ *não implica em* $M \equiv 1 \pmod{2^a}$. *Como contra-exemplo, para* $p = 2$ *e* $a = 3$, *temos* $7^2 \equiv 1 \pmod{2^{3+1}}$ *mas* $7 \not\equiv 1 \pmod{2^3}$.

Demonstração do lema 2 de Muir, lema 5.3.

1. Por hipótese, $M^p \equiv 1 \pmod{p^{a+1}}$.

   Suponhamos $M > 1$. Se $M = 1$, o lema é trivialmente válido.

   Temos $M - 1 = p^b \cdot \lambda$, sendo $b \geq 0$ e λ um inteiro não divisível por p.

   Vamos demonstrar que $b \geq a$. Suponhamos o contrário, isto é, suponhamos que $0 \leq b \leq a - 1$.

   Sendo $M = 1 + p^b \cdot \lambda$ temos

$$\begin{aligned} M^p &= (1 + p^b \cdot \lambda)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (p^b \cdot \lambda)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} (p^b \cdot \lambda)^k + (p^b \cdot \lambda)^p \end{aligned}$$

   Por hipótese, $M^p = 1 + \gamma \cdot p^{a+1}$ para algum inteiro γ.

   Temos então

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} (p^b \cdot \lambda)^k + (p^b \cdot \lambda)^p = \gamma \cdot p^{a+1} \tag{5.1}$$

   Sendo p primo, os números binomiais $\binom{p}{k}$, com $1 \leq k \leq p - 1$, são todos divisíveis por p. Veja Hefez [7].

   Se $b = 0$, a igualdade (5.1) torna-se

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \lambda^k + \lambda^p = \gamma \cdot p^{a+1}$$

   e então teremos

$$\lambda^p = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} - \gamma \cdot p^{a+1} \tag{5.2}$$

   Como o segundo membro de (5.2) é divisível por p, teremos λ^p divisível por p, o que não é possível pois p não é fator primo de λ. Portanto $b > 0$, e então temos $1 \leq b \leq a - 1$.

   Assim sendo $3 \leq b + 2 \leq a + 1$, e então p^{b+2} divide $\gamma \cdot p^{a+1}$, o segundo membro da igualdade (5.1). Portanto p^{b+2} deve dividir também o primeiro membro de (5.1).

   Notemos que o último termo do primeiro membro de (5.1), $(p^b \cdot \lambda)^p$, é de fato divisível por p^{b+2}. Pois $(p^b \cdot \lambda)^p = p^{p \cdot b} \cdot \lambda^p$ e, sendo $p \geq 3$ e $b \geq 1$ temos $p \cdot b \geq 3b = b + 2b \geq b + 2$, logo p^{b+2} divide $p^{p \cdot b}$, isto é, $p^{p \cdot b} = m_p \cdot p^{b+2}$ para algum inteiro m_p.

   Além disso, se $2 \leq k \leq p - 1$, então $\binom{p}{k}(p^b \cdot \lambda)^k$ também é divisível por p^{b+2}. De fato, para $2 \leq k \leq p - 1$ temos $\binom{p}{k}$ divisível por p, isto é, $\binom{p}{k} = p \cdot n_k$ para algum inteiro n_k. E como $b \cdot k \geq 2b = b + b \geq b + 1$, p^{b+1} divide $p^{b \cdot k}$, isto é, $p^{b \cdot k} = m_k \cdot p^{b+1}$ para algum inteiro m_k.

Daí teremos, para $k \geq 2$,

$$\binom{p}{k}(p^b \cdot \lambda)^k = \lambda^k \binom{p}{k} p^{b \cdot k} = \lambda^k \cdot p \cdot n_k \cdot m_k \cdot p^{b+1} = p^{b+2} \cdot \beta_k$$

com β_k inteiro, logo $\binom{p}{k}(p^b \cdot \lambda)^k$ é divisível por p^{b+2}.

Agora podemos reescrever (5.1) na forma equivalente

$$p \cdot p^b \lambda + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k}(p^b \cdot \lambda)^k + (p^b \cdot \lambda)^p = \gamma \cdot p^{a+1} \tag{5.3}$$

e então deduzir que

$$p^{b+1}\lambda = \gamma \cdot p^{a+1} - \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k}(p^b \cdot \lambda)^k - (p^b \cdot \lambda)^p \tag{5.4}$$

Como deduzido acima, todos os termos do segundo membro de (5.4) são divisíveis por p^{b+2}. Mas como λ não tem p como fator primo, o primeiro membro de (5.4) é divisível por p^{b+1} mas não por p^{b+2}. Temos então uma contradição advinda de termos suposto que $b \leq a - 1$. Logo $b \geq a$.

Temos então

$$M - 1 = p^b \cdot \lambda = p^{a+(b-a)} \cdot \lambda = p^a p^{b-a} \lambda$$

e portanto $p^a \mid (M - 1)$, isto é, $M \equiv 1 \pmod{p^a}$.

2. Se $M^{p^n} \equiv 1 \pmod{p^{a+n}}$ então $(M^{p^{n-1}})^p \equiv 1 \pmod{p^{a+n}}$.

   Pelo item 1, temos então $M^{p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p^{a+n-1}}$.

   Aplicando este raciocínio repetidas vezes chegaremos a $M^p \equiv 1 \pmod{p^{a+1}}$, e então (pelo item 1) $M \equiv 1 \pmod{p^a}$. □

Observação 5.5. *O Lema 2 de Muir, lema 5.3, é um caso particular do seguinte lema, cuja demonstração pode ser desenvolvida de módulo análogo.*

Lema 5.4 (Lema 2 de Muir, caso geral). *Sejam M, N, a, n inteiros positivos e $p \geq 3$ um número primo.*

1. *Se $M^p \equiv N^p \pmod{p^{a+1}}$ e p não divide N então $M \equiv N \pmod{p^a}$.*

2. *Se $M^{p^n} \equiv N^{p^n} \pmod{p^{a+n}}$ e p não divide N então $M \equiv N \pmod{p^a}$.*

Observação 5.6. *Se $M^p \equiv N^p \pmod{p^{a+1}}$ e p não divide N então p também não divide M. Se p divide um dos inteiros M e N, e $M^p \equiv N^p \pmod{p^{a+1}}$, então p também divide o outro, um fato de fácil dedução.*

No caso que N *tem o fator primo* p, *o lema 2 de Muir, caso geral, é falso. Como contra-exemplo, quando* $p = 3$, $6^p \equiv 9^p \pmod{p^3}$ *mas* $6 \not\equiv 9 \pmod{p^2}$.

Também é falso o lema 2 de Muir, caso geral para $p = 2$ *(mas o lema 1, caso geral, é verdadeiro também nesse caso). Como contra-exemplo, para* $p = 2$, $5^p \equiv 3^p \pmod{p^3}$ *mas* $5 \not\equiv 3 \pmod{p^2}$.

Agora, empregando ambos os lemas de Muir, demonstraremos um teorema que nos dá $\ell(p^a)$, quando $a \geq 2$, em função de p e $\ell(p)$. A demonstração foi encontrada, com esta clareza, em Ross [15].

Teorema 5.1. *Sejam* $p \geq 3$, $p \neq 5$, *um número primo e seja* w *o primeiro inteiro positivo tal que* $\ell(p) = \ell(p^w)$ *mas* $\ell(p) < \ell(p^{w+1})$.

Então para cada inteiro a, $a \geq w$, *teremos* $\ell(p^a) = p^{a-w} \cdot \ell(p)$.

Demonstração. Sejam p e w como nas hipóteses e seja a um inteiro, $a \geq w$. Pela proposição 5.2, temos

$$\ell(p^a) = p^s \cdot \ell(p)$$

para algum inteiro s, com $0 \leq s \leq a - 1$.

Vamos demonstrar que $s = a - w$, se $a \geq w$.

Temos $10^{\ell(p^w)} \equiv 1 \pmod{p^w}$. Como $\ell(p) = \ell(p^w)$, então

$$10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^w}.$$

Agora aplicamos o lema 5.1, lema 1 de Muir, e obtemos

$$(10^{\ell(p)})^{p^{a-w}} \equiv 1 \pmod{p^{w+(a-w)}}$$

ou seja,

$$10^{\ell(p) \cdot p^{a-w}} \equiv 1 \pmod{p^a}$$

e concluímos que então $\ell(p^a)$ divide $\ell(p) \cdot p^{a-w}$, isto é,

$$p^s \cdot \ell(p) \mid p^{a-w} \cdot \ell(p),$$

e então $p^s \mid p^{a-w}$, logo $s \leq a - w$.

Queremos mostrar que de fato $s = a - w$. Suponhamos que para algum inteiro a, $a \geq w$, tenhamos $s < a - w$.

Então $a - s > w$, ou $a - s \geq w + 1$.

Como $\ell(p^a) = \ell(p) \cdot p^s$, temos $10^{\ell(p) \cdot p^s} \equiv 1 \pmod{p^a}$.

Então

$$(10^{\ell(p)})^{p^s} \equiv 1 \pmod{p^a}$$

E então, pelo lema 2 de Muir, lema 5.3, deduzimos que

$$10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^{a-s}}.$$

Como $a - s \geq w + 1$, teremos consequentemente

$$10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^{w+1}}$$

e então $\ell(p^{w+1})$ divide $\ell(p)$, o que não é possível pois $\ell(p^{w+1}) > \ell(p)$. □

Corolário 5.1. *Se* p *é um inteiro primo,* $p \geq 3$, $p \neq 5$, *tal que*

$$\ell(p^2) > \ell(p)$$

então

1. $\ell(p^2) = p \cdot \ell(p)$.
2. *para cada inteiro* $a \geq 2$, $\ell(p^a) = p^{a-1} \cdot \ell(p)$.

Demonstração. O corolário é aplicação imediata do teorema 5.1, no caso em que $w = 1$. □

Corolário 5.2. *Se* p *é um primo de Wieferich, isto é,* $p \geq 3$, $\ell(p^2) = \ell(p)$, *e se* $\ell(p^3) > \ell(p)$, *então para cada inteiro* a, $a \geq 2$ *temos*

$$\ell(p^a) = p^{a-2} \cdot \ell(p)$$

Demonstração. O corolário é aplicação imediata do teorema 5.1, no caso em que $w = 2$. □

Exemplo 5.1 (Exemplos de aplicações do teorema 5.1 e seus corolários).

1. Sabemos que $\ell(7) = 6$, sendo $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}$.

   Mas $\ell(7^2) > \ell(7)$, pois $10^{7-1} \not\equiv 1 \pmod{7^2}$.

   Pelo corolário 5.1, temos os exemplos

$$\begin{aligned} \ell(7^2) &= 7 \cdot \ell(7) = 7 \cdot 6 = 42 \qquad \text{(veja exemplo 4.2)} \\ \ell(7^3) &= 7^2 \cdot \ell(7) = 7^2 \cdot 6 = 294 \\ \ell(7^4) &= 7^3 \cdot \ell(7) = 7^3 \cdot 6 = 2058 \end{aligned}$$

2. Sabemos que $\ell(3^2) = \ell(3) = 1$ (3 é um dos raros primos de Wieferich). De fato, $1/3 = 0,\overline{3}$ e $1/9 = 0,\overline{1}$.

   Mas $\ell(3^3) > \ell(3)$, pois $10^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^3}$ quando $p = 3$.

   Pelo corolário 5.2 temos os exemplos

$$\ell(3^3) = 3^{3-2} \cdot \ell(3) = 3$$
$$\ell(3^4) = 3^{4-2} \cdot \ell(3) = 9$$
$$\ell(3^5) = 3^{5-2} \cdot \ell(3) = 27$$

   Para nossa apreciação,

$$1/3^3 = 1/27 = 0,\overline{037}$$
$$1/3^4 = 1/81 = 0,\overline{012345679}$$
$$1/3^5 = 1/243 = 0,\overline{004115226337448559670781893}$$

6. Os teoremas de Midy e Ginsberg

Neste capítulo falaremos sobre certos padrões em dízimas periódicas, que surpreendentemente nos mostram que as sequências de dígitos de certas dízimas periódicas estão longe do que poderiam ser padrões aleatórios.

Claro que podemos criar dízimas com padrões de dígitos ao nosso gosto, por exemplo, podemos "criar" a dízima periódica $0,\overline{123456789}$ bem como também a dízima $0,\overline{232425262728}$.

Mas se a dízima periódica representa uma fração comum irredutível, cujo denominador é um número primo ou potência de um número primo então, como veremos, o padrão de dígitos está bem longe de ser considerado aleatório.

6.1 Os teoremas de Midy e Ginsberg, em suas versões originais

Nesta seção revisitaremos dois teoremas muito interessantes, o primeiro devido a Etiénne Midy, um professor de Matemática francês, que em 1935 publicou-o em um livreto [12] sobre propriedades de dízimas periódicas. O segundo teorema é devido a Brian Ginsberg, jovem matemático americano, atualmente um advogado atuando no estado de Nova York, que em 2004 teve publicado um artigo na revista americana College Mathematics Journal [6], dando uma extensão do teorema de Midy.

Vamos aos enunciados de ambos os teoremas, em suas versões originais.

Teorema 6.1 (Midy, 1935). *Seja $p \geq 7$ um número primo e suponhamos que a dízima periódica de uma fração própria irredutível a/p tenha um comprimento par, isto é, $\ell(p) = 2n$ para algum inteiro $n \geq 1$. Suponhamos que*

$$\frac{a}{p} = 0,\overline{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}}$$

Então as duas "metades" da parte periódica, $a_1 \ldots a_n$ e $a_{n+1} \ldots a_{2n}$ tem soma $\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{dígitos}} = 10^n - 1$, ou seja,

$$a_1 \ldots a_n + a_{n+1} \ldots a_{2n} = \underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{dígitos}}$$

Exemplo 6.1. *Como exemplos ilustrativos do teorema 6.1, temos a seguinte tabela de dízimas periódicas de frações próprias irredutíveis* $\frac{a}{p}$, *com* p *primo e* $\ell(p)$ *par. A tabela foi construída usando-se o programa Maple 12 para obtenção dos primos e das dízimas periódicas.*

primo p	$\ell(p)$	*fração*	*dízima*	*propriedade de Midy*
11	2	8/11	$0,\overline{72}$	$7+2=9$
101	4	58/101	$0,\overline{5742}$	$57+42=99$
7	6	1/7	$0,\overline{142857}$	$142+857=999$
13	6	9/13	$0,\overline{692307}$	$692+307=999$
73	8	41/73	$0,\overline{56164383}$	$5616+4383=9999$
137	8	52/137	$0,\overline{37956204}$	$3795+6204=9999$
9091	10	1234/9091	$0,\overline{1357386426}$	$13573+86426=99999$
9901	12	1234/9901	$0,\overline{124633875366}$	$124633+875366=999999$
17	16	14/17	$0,\overline{8235294117647058}$	$82352941+17647058=99999999$

Teorema 6.2 (Ginsberg, 2004). *Seja* $p \geq 7$ *um número primo e suponhamos que a dízima periódica da fração* $1/p$ *tenha comprimento sendo um múltiplo de 3, isto é,* $\ell(p) = 3n$ *para algum inteiro* $n \geq 1$. *Suponhamos que*

$$\frac{1}{p} = 0,\overline{a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n} a_{2n+1} \ldots a_{3n}}$$

Então os três "terços" da parte periódica, $a_1 \ldots a_n$, $a_{n+1} \ldots a_{2n}$ *e* $a_{2n+1} \ldots a_{3n}$ *tem soma* $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$, *ou seja,*

$$a_1 \ldots a_n + a_{n+1} \ldots a_{2n} + a_{2n+1} \ldots a_{3n} = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$$

Exemplo 6.2. *Como exemplos ilustrativos do teorema 6.2, temos a seguinte tabela de dízimas periódicas de frações* $\frac{1}{p}$, *com* p *primo e* $\ell(p)$ *sendo um múltiplo de* 3. *A tabela foi construída usando-se o programa Maple 12 para obtenção dos primos e das dízimas periódicas.*

primo p	$\ell(p)$	*fração*	*dízima*	*propriedade de Ginsberg*
37	3	1/37	$0,\overline{027}$	$0+2+7=9$
7	6	1/7	$0,\overline{142857}$	$14+28+57=99$
13	6	1/13	$0,\overline{076923}$	$07+69+23=99$
333667	9	1/333667	$0,\overline{000002997}$	$000+002+997=999$
9901	12	1/9907	$0,\overline{000100999899}$	$0001+0099+9899=9999$
2906161	15	1/2906161	$0,\overline{000000344096559}$	$00000+03440+96559=99999$
19	18	1/19	$0,\overline{052631578947368421}$	$052631+578947+368421=999999$
1933	21	1/1933	$0,\overline{000517330574236937403}$	$0005173+3057423+6937403=9999999$

Observação 6.1. *Notemos que o teorema de Midy se aplica a frações irredutíveis* a/p, *com* $p \geq 7$ *e* $\ell(p) = 2n$, *enquanto que o teorema de Ginsberg se aplica apenas a frações "unitárias"*

$1/p$, *com* $p \geq 7$ *e* $\ell(p) = 3n$. *Temos* $\dfrac{3}{7} = 428571$, *mas* $42 + 85 + 71 = 198 = 2 \times 99$. *De fato, uma "generalização" do teorema de Ginsberg para frações irredutíveis* a/p, *com* $p \geq 7$ *e* $\ell(p) = 3n$ *nos garante que a soma dos três terços da dízima será sempre um múltiplo de* $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$.

6.2 O teorema de Midy em um caso mais geral

Agora enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Midy, teorema 6.1, em um caso ligeiramente mais geral.

Adiante trataremos também do teorema de Ginsberg com a mesma generalidade. As demonstrações dos "novos" teoremas, apresentadas neste capítulo, são adaptações de demonstrações encontradas em Ginsberg [6].

O seguinte lema será utilizado na demonstração do caso geral do teorema de Midy.

Lema 6.1. *Sejam* $p \geq 7$ *um número primo,* m *um inteiro positivo, e suponhamos que* $\ell(p^m) = 2n$ *para algum natural* n. *Então* p^m *divide* $10^n + 1$.

Demonstração. Sendo $\ell(p^m) = 2n$, temos $10^{2n} \equiv 1 \pmod{p^m}$.

Logo, p^m divide $10^{2n} - 1 = (10^n - 1)(10^n + 1)$. Afirmamos que p^m divide $10^n + 1$.

p^m não é divisor de $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$, pois caso contrário teríamos $\ell(p^m) \leq n$.

Temos $(10^n - 1)(10^n + 1) = q \cdot p^m$ para algum inteiro positivo q, com $\mathrm{mdc}(q, p) = 1$. Então teremos

$$\begin{aligned} 10^n - 1 &= q_1 \cdot p^r \quad (\text{com } q_1 \text{ sem o fator primo } p) \\ 10^n + 1 &= q_2 \cdot p^s \quad (\text{com } q_2 \text{ sem o fator primo } p) \end{aligned} \tag{6.1}$$

para certos expoentes naturais r e s, sendo $r + s = m$ e $q_1 \cdot q_2 = q$, pois $(10^n - 1)(10^n + 1) = q_1 \cdot q_2 \cdot p^{r+s}$.

Se $s = 0$, então $r = m$ e daí p^m é divisor de $10^n - 1$, o que não ocorre. Logo, $s > 0$.

Se $r = 0$, então $s = m$ e temos a conclusão de que p^m é divisor de $10^n + 1$. Suponhamos que também tenhamos $r > 0$. Então $q_2 \cdot p^s - q_1 \cdot p^r$ é divisível por p. Mas pelas igualdades (6.1) $q_2 \cdot p^s - q_1 \cdot p^r = 2$ e temos uma contradição pois $p \geq 7$.

Portanto, de fato $r = 0$ e p^m é divisor de $10^n + 1$. $\square$

Teorema 6.3 (Midy estendido). *Seja $p \geq 7$ um número primo e suponhamos que a dízima periódica de uma fração própria irredutível a/p^m, $m \geq 1$, tenha comprimento par, isto é, $\ell(p^m) = 2n$ para algum inteiro $n \geq 1$. Suponhamos que*

$$\frac{a}{p^m} = 0,\overline{a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n}}$$

Então as duas "metades" da parte periódica, $a_1 \dots a_n$ e $a_{n+1} \dots a_{2n}$ tem soma $\underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$, ou seja,

$$a_1 \dots a_n + a_{n+1} \dots a_{2n} = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$$

Demonstração. Consideremos as notações já introduzidas no enunciado do teorema. Então

$$\frac{a}{p^m} = 0,\overline{a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n}} = \frac{a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n}}{\underbrace{99\dots9}_{2n \text{ dígitos}}}$$

Consideremos os inteiros $A = a_1 \dots a_n$ e $B = a_{n+1} \dots a_{2n}$.

Temos $a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n} = a_1 \dots a_n \times 10^n + a_{n+1} \dots a_{2n} = A \times 10^n + B$.

Como exemplo elucidativo, temos $\frac{3}{7} = \frac{428571}{999999}$, sendo $A = 428$ e $B = 571$, e $428571 = 428 \times 10^3 + 571$.

Então

$$\frac{a}{p^m} = \frac{10^n \cdot A + B}{10^{2n} - 1}.$$

Daí temos

$$p^m \cdot (10^n \cdot A + B) = a \cdot (10^{2n} - 1).$$

que é equivalente à igualdade

$$p^m \cdot (10^n \cdot A + B) = (10^n - 1)(10^n + 1). \tag{6.2}$$

Como $\ell(p^m) = 2n$, pelo Lema 6.1, temos p^m sendo divisor de $10^n + 1$.

Logo, $\frac{10^n + 1}{p^m}$ é um inteiro e então da igualdade (6.2), obtemos

$$10^n \cdot A + B = (10^n - 1) \cdot \frac{10^n + 1}{p^m}$$

logo $10^n - 1$ divide $10^n \cdot A + B$. Agora temos

$$10^n \cdot A + B = (10^n - 1) \cdot A + (A + B),$$

portanto $10^n - 1$ divide $A + B$ pois

$$(10^n \cdot A + B) - (10^n - 1) \cdot A = A + B.$$

Temos $0 \le A = a_1 \dots a_n \le \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$ e $0 \le B = a_{n+1} \dots a_{2n} \le \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$

Logo $0 \le A + B \le 2 \times \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$.

Como $10^n - 1 = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$ é divisor de $A + B$, temos $A + B = 0$ ou $A + B = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$ ou $A + B = 2 \times \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$.

Porém a primeira possibilidade para $A + B$ fica descartada porque $A = a_1 \dots a_n > 0$ ou $B = a_{n+1} \dots a_{2n} > 0$. Também fica descartada a terceira possibilidade, caso contrário teremos $A = B = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$ e então $\dfrac{a}{p^m} = \dfrac{a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n}}{\underbrace{99\dots9}_{2n \text{ dígitos}}} = 1$.

Logo $A + B = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$ e teorema está demonstrado. □

6.3 O teorema de Ginsberg em um caso mais geral

Na demonstração do teorema abordado nesta seção, o teorema de Ginsberg em um caso mais geral, faremos uso do seguinte lema.

Lema 6.2. *Sejam* $p \ge 7$ *um número primo,* m *um inteiro positivo, e suponhamos que* $\ell(p^m) = 3n$ *para algum natural* n. *Então* p^m *divide* $10^{2n} + 10^n + 1$.

Demonstração. Sendo $\ell(p^m) = 3n$, temos $10^{3n} \equiv 1 \pmod{p^m}$.

Logo, p^m divide $10^{3n} - 1 = (10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1)$. Afirmamos que p^m divide $10^{2n} + 10^n + 1$.

p^m não é divisor de $10^n - 1 = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$, pois caso contrário teríamos $\ell(p^m) \le n$.

Temos $(10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1) = q \cdot p^m$ para algum inteiro positivo q, com $\mathrm{mdc}(q, p) = 1$.

Então teremos

$$\begin{aligned} 10^n - 1 &= q_1 \cdot p^r \quad (\text{com } q_1 \text{ sem o fator primo } p) \\ 10^{2n} + 10^n + 1 &= q_2 \cdot p^s \quad (\text{com } q_2 \text{ sem o fator primo } p) \end{aligned} \tag{6.3}$$

para certos expoentes naturais r e s, sendo $r + s = m$ e $q_1 \cdot q_2 = q$, pois

$$(10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1) = q_1 \cdot q_2 \cdot p^{r+s}.$$

Se $s = 0$, então $r = m$ e daí p^m é divisor de $10^n - 1$, o que não ocorre. Logo, $s > 0$.

Se $r = 0$, então $s = m$ e temos a conclusão de que p^m é divisor de $10^{2n} + 10^n + 1$. Suponhamos que também tenhamos $r > 0$. Então $(q_2 \cdot p^s)^2 - q_1 \cdot p^r$ é divisível por p. Mas pelas igualdades (6.3) $(q_2 \cdot p^s)^2 - q_1 \cdot p^r = 3 \cdot 10^n$ e temos uma contradição pois $p \geq 7$ e os únicos divisores primos de $3 \cdot 10^n$ são 2, 3 e 5.

Portanto, de fato $r = 0$, $s = m$, e p^m é divisor de $10^{2n} + 10^n + 1$. □

Teorema 6.4 (Ginsberg estendido). *Seja* $p \geq 7$ *um número primo e suponhamos que a dízima periódica da fração própria irredutível* $1/p^m$ *tenha comprimento sendo um múltiplo de* 3, *isto é,* $\ell(p^m) = 3n$ *para algum inteiro* $n \geq 1$. *Suponhamos que*

$$\frac{1}{p^m} = 0,\overline{a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n} a_{2n+1} \dots a_{3n}}$$

Então os três "terços" da parte periódica, $a_1 \dots a_n$, $a_{n+1} \dots a_{2n}$ *e* $a_{2n+1} \dots a_{3n}$ *tem soma* $\underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$, *ou seja,*

$$a_1 \dots a_n + a_{n+1} \dots a_{2n} + a_{2n+1} \dots a_{3n} = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ dígitos}}$$

Demonstração. Tal como no enunciado, suponhamos

$$\frac{1}{p^m} = 0,\overline{a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n} a_{2n+1} \dots a_{3n}}.$$

Consideremos os inteiros

$$A = a_1 \dots a_n, \; B = a_{n+1} \dots a_{2n}, \; C = a_{2n+1} \dots a_{3n}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^m} &= \frac{a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2n} a_{2n+1} \dots a_{3n}}{\underbrace{99\dots9}_{3n \text{ dígitos}}} \\ &= \frac{a_1 \dots a_n \times 10^{2n} + a_{n+1} \dots a_{2n} \times 10^n + a_{2n+1} \dots a_{3n}}{\underbrace{99\dots9}_{3n \text{ dígitos}}}\end{aligned}$$

Como exemplo ilustrativo,

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{14 \cdot 10^4 + 28 \cdot 10^2 + 57}{\underbrace{999999}_{3 \cdot 2 \text{ dígitos}}}$$

Logo

$$\frac{1}{p^m} = \frac{A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^n + C}{10^{3n} - 1} \tag{6.4}$$

De (6.4) temos

$$p^m \cdot (A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^n + C) = (10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1) \tag{6.5}$$

Como $\ell(p^m) = 3n$, pelo Lema 6.2, temos p^m sendo divisor de $10^{2n} + 10^n + 1$.

Logo, $\dfrac{10^{2n} + 10^n + 1}{p^m}$ é um inteiro e então da igualdade (6.5), obtemos

$$10^{2n} \cdot A + 10^n \cdot B + C = (10^n - 1) \cdot \frac{10^{2n} + 10^n + 1}{p^m} \tag{6.6}$$

logo $10^n - 1$ divide $10^{2n} \cdot A + 10^n \cdot B + C$. Agora temos

$$\begin{aligned} 10^{2n} \cdot A + 10^n \cdot B + C &= (10^{2n} - 1)A + (10^n - 1)B + (A + B + C) \\ &= (10^n - 1)(10^n + 1)A + (10^n - 1)B + (A + B + C) \end{aligned}$$

portanto $10^n - 1$ divide $A + B + C$ pois

$$(10^{2n} \cdot A + 10^n \cdot B + C) - (10^n - 1)(10^n + 1)A - (10^n - 1)B = A + B + C.$$

Temos

$$0 \le A = a_1 \ldots a_n \le \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}},$$

$$0 \le B = a_{n+1} \ldots a_{2n} \le \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}},$$

$$0 \le C = a_{2n+1} \ldots a_{3n} \le \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$$

Logo $0 \le A + B + C \le 3 \times \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$.

Como $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$ é divisor de $A + B + C$, temos $A + B + C = 0$ ou $A + B + C = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$ ou $A + B + C = 2 \times \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$, ou $A + B + C = 3 \times \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$.

A opção $A + B + C = 0$ ocorrerá somente se $A = B = C = 0$ e portanto está descartada. A opção $A + B + C = 3 \times \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$ ocorrerá somente se $A = B = C = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$ e também está descartada pois neste caso não teremos dízima periódica em $1/p^m$.

Portanto devemos ter $A+B+C = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$ ou $A+B+C = 2\times\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$. A primeira destas duas possibilidades é a tese de nosso teorema. No que segue vamos refutar a segunda possibilidade.

Trabalhando numa demonstração por contradição, suponhamos $A + B + C = 2 \times \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$.

Então $\dfrac{A+B+C}{10^n - 1} = 2$.

Podemos ter $A = 0$ ou $A > 0$.

Se $A = 0$, entao $B + C = 2 \cdot (10^n - 1)$.

Mas como $0 \leq B, C \leq 10^n - 1$ então, necessariamente, $B = C = 10^n - 1$. Usando a igualdade (6.4), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^m} &= \frac{A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^n + C}{10^{3n} - 1} = \frac{B \cdot 10^n + C}{10^{3n} - 1} \\
&= \frac{(10^n - 1) \cdot 10^n + (10^n - 1)}{10^{3n} - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{10^{3n} - 1} \\
&= \frac{(10^n - 1)(10^n + 1)}{(10^n - 1)(10^{2n} + 10^n + 1)} = \frac{10^n + 1}{10^{2n} + 10^n + 1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$p^m = \frac{10^{2n} + 10^n + 1}{10^n + 1} = \frac{10^n(10^n + 1) + 1}{10^n + 1} = 10^n + \frac{1}{10^n + 1}$$

e portanto temos uma contradição pois p^m é um inteiro. Assim o caso $A = 0$ está descartado e portanto $A \geq 1$.

Vamos agora para o restante da demonstração. Apesar de adaptada de Ginsberg [6] para frações da forma $1/p^m$ (a demonstração original de Ginsberg é para frações da forma $1/p$), esta parte da demonstração tem argumentos criativos e bem intrincados devidos inteiramente a Ginsberg [6].

Da igualdade (6.6) temos

$$\begin{aligned}
\frac{10^{2n} + 10^n + 1}{p^m} &= \frac{A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^n + C}{10^n - 1} \\
&= \frac{A(10^{2n} - 1) + B(10^n - 1) + A + B + C}{10^n - 1} \\
&= \frac{A(10^n - 1)(10^n + 1) + B(10^n - 1) + A + B + C}{10^n - 1} \\
&= A(10^n + 1) + B + \frac{A + B + C}{10^n - 1}
\end{aligned}$$

logo, como $\dfrac{A+B+C}{10^n - 1} = 2$,

$$\frac{10^{2n} + 10^n + 1}{p^m} = A(10^n + 1) + B + 2$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por $10^n + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} A + \frac{B+2}{10^n+1} &= \frac{10^n(10^n+1)+1}{p^m(10^n+1)} \\ &= \frac{10^n}{p^m} + \frac{1}{p^m(10^n+1)} \end{aligned}$$

Como $B + 2 > 1$, concluímos então que

$$A + \frac{1}{10^n+1} < A + \frac{B+2}{10^n+1} = \frac{10^n}{p^m} + \frac{1}{p^m(10^n+1)} < \frac{10^n}{p^m} + \frac{1}{10^n+1}$$

logo,

$$A + \frac{1}{10^n+1} < \frac{10^n}{p^m} + \frac{1}{10^n+1}$$

e portanto,

$$A < \frac{10^n}{p^m} \tag{6.7}$$

Prosseguindo, de $\dfrac{A+B+C}{10^n-1} = 2$, temos $C = 2(10^n - 1) - (A + B)$.

Como $A < \dfrac{10^n}{p^m}$ e $B \leq 10^n - 1$, vem

$$\begin{aligned} C &= 2(10^n-1) - A - B \\ &> 2(10^n-1) - \frac{10^n}{p^m} - (10^n-1) \\ &= 10^n - \frac{10^n}{p^m} - 1 \end{aligned}$$

ou seja,

$$C > 10^n - \frac{10^n}{p^m} - 1.$$

Logo,

$$C \cdot p^m > 10^n \cdot p^m - 10^n - p^m$$

isto é,

$$C \cdot p^m > (10^n - 1) \cdot p^m - 10^n$$

Como também $C \leq 10^n - 1$, temos então

$$(10^n - 1) \cdot p^m - 10^n < C \cdot p^m \leq (10^n - 1)p^m \tag{6.8}$$

Da igualdade (6.4), $\dfrac{1}{p^m} = \dfrac{A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^n + C}{10^{3n} - 1}$, temos

$$(A \cdot 10^{2n} + B \cdot 10^n + C) \cdot p^m = 10^{3n} - 1$$

portanto

$$C \cdot p^m = 10^{3n} - 1 - A \cdot 10^{2n} \cdot p^m - B \cdot 10^n \cdot p^m$$

logo

$$C \cdot p^m + 1 = 10^{3n} - A \cdot 10^{2n} \cdot p^m - B \cdot 10^n \cdot p^m$$

O segundo membro da igualdade acima é divisível por 10^n, logo

$$C \cdot p^m + 1 = 10^n \cdot \lambda \tag{6.9}$$

para algum inteiro λ. Somando 1 aos três membros de (6.8), chegamos a

$$(10^n - 1) \cdot p^m - 10^n + 1 < C \cdot p^m + 1 \leq (10^n - 1)p^m + 1$$

e obtemos

$$(10^n - 1) \cdot p^m - 10^n + 1 < 10^n \cdot \lambda \leq (10^n - 1) \cdot p^m + 1$$

e então

$$(p^m - 1) \cdot 10^n - (p^m - 1) < 10^n \cdot \lambda \leq p^m \cdot 10^n - (p^m - 1) \tag{6.10}$$

Dividindo os três membros em (6.10) por 10^n, obtemos

$$p^m - 1 - \frac{p^m - 1}{10^n} < \lambda \leq p^m - \frac{p^m - 1}{10^n} \tag{6.11}$$

De (6.11), está claro que $\lambda < p^m$. Agora, em (6.7) obtivemos $A < \dfrac{10^m}{p^m}$, logo $\dfrac{p^m}{10^n} < \dfrac{1}{A}$.

Assim sendo, $\dfrac{p^m - 1}{10^n} < \dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{A} \leq 1$, logo $\dfrac{p^m - 1}{10^n} < 1$, e portanto

$$p^m - 1 - \frac{p^m - 1}{10^n} > p^m - 2$$

Daí temos, por (6.11),

$$p^m - 2 < \lambda < p^m$$

Sendo λ um inteiro então, necessariamente, $\lambda = p^m - 1$.

De (6.9), obtemos então

$$C \cdot p^m + 1 = 10^n(p^m - 1).$$

e então

$$10^n + 1 = p^m(10^n - C)$$

logo p^m divide $10^n + 1$ e então também é divisor de $10^{3n} + 1 = (10^n + 1)(10^{2n} - 10^n + 1)$. Então temos

$$p^m \text{ divide } 10^{3n} + 1$$
$$p^m \text{ divide } 10^{3n} - 1 \quad (\text{pois } \ell(p^m) = 3n)$$

e então p^m é divisor de $2 = (10^{3n} + 1) - (10^{3n} - 1)$, o que não é possível pois $p \geq 7$.

Assim, no caso $A \geq 1$, temos também uma contradição, advinda do fato de termos suposto $\dfrac{A+B+C}{10^n - 1} = 2$.

Portanto $\dfrac{A+B+C}{10^n - 1} = 1$ e o teorema de Ginsberg está demonstrado. $\square$

6.4 Padrões elementares de divisibilidade em dízimas periódicas

Nesta seção enunciamos e demonstramos algumas proposições que reforçam nossa afirmação de que dízimas periódicas de certas frações irredutíveis não tem padrões aleatórios.

Proposição 6.1. *Seja a/b uma fração própria comum irredutível, com $b \geq 3$, b primo com 10. Suponhamos $a/b = 0,\overline{a_1 \dots a_\ell}$, sendo $\ell = \ell(b)$.*

Então a é divisor do inteiro representado por $a_1 \dots a_\ell$.

Ou seja, o período de qualquer dízima periódica é sempre divisível pelo numerador da sua fração geratriz quando esta estiver representada na forma irredutível.

Demonstração. Sendo $a/b = 0,\overline{a_1 \dots a_\ell}$, temos $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1 \dots a_\ell}{10^\ell - 1}$.

Então temos

$$a \times (10^\ell - 1) = b \times a_1 \dots a_\ell$$

e portanto a é divisor do produto $b \times a_1 \dots a_\ell$.

Como a e b são primos entre si, temos a sendo divisor do numerador $a_1 \dots a_\ell$. $\square$

Proposição 6.2. *Seja a/p uma fração própria comum irredutível, sendo p um número primo, $p \geq 7$. Suponhamos $a/p = 0,\overline{a_1 \dots a_\ell}$, sendo $\ell = \ell(p)$.*

Então o período $a_1 \dots a_\ell$ é um inteiro divisível por 9, ou seja, $a_1 + \cdots + a_\ell$ é divisível por 9.

Demonstração. Sendo $a/p = 0,\overline{a_1 \dots a_\ell}$, temos $\dfrac{a}{p} = \dfrac{a_1 \dots a_\ell}{10^\ell - 1}$.

Então temos

$$a \times (10^\ell - 1) = p \times a_1 \dots a_\ell$$

e portanto p é divisor do produto $a \times (10^\ell - 1)$.

Como p é primo, e primo com a, temos p divisor de $10^\ell - 1$. Agora, $\ell = \ell(p) \geq 2$ pois o único primo com $\ell(p) = 1$ é o inteiro 3 e, por hipótese, $p \geq 7$, Agora, temos a fatoração

$$10^\ell - 1 = (10-1)(10^{\ell-1} + 10^{\ell-2} + \cdots + 10 + 1) = 9 \cdot (10^{\ell-1} + 10^{\ell-2} + \cdots + 10 + 1)$$

Logo, p é divisor de $9 \cdot (10^{\ell-1} + 10^{\ell-2} + \cdots + 10 + 1)$. Sendo p primo, $p \geq 7$, p não é divisor de 9, logo p será divisor de $10^{\ell-1} + 10^{\ell-2} + \cdots + 10 + 1$.

Temos então $\dfrac{10^{\ell-1} + 10^{\ell-2} + \cdots + 10 + 1}{p}$ sendo um inteiro.

Daí, de $a \times (10^\ell - 1) = p \times a_1 \ldots a_\ell$, temos

$$a \times 9 \times (10^{\ell-1} + 10^{\ell-2} + \cdots + 10 + 1) = p \times a_1 \ldots a_\ell$$

e então

$$a \times 9 \times \frac{10^{\ell-1} + 10^{\ell-2} + \cdots + 10 + 1}{p} = a_1 \ldots a_\ell$$

Logo, 9 é divisor do inteiro $a_1 \ldots a_\ell$ e portanto, por [7], $a_1 + \cdots + a_\ell$ é divisível por 9. □

Proposição 6.3. *Seja a/p uma fração própria comum irredutível, sendo p um número primo, $p \geq 7$, $p \neq 11$. Suponhamos $a/p = 0,\overline{a_1 \ldots a_{2n}}$, sendo $2n = \ell(p)$.*

Então o período $a_1 \ldots a_{2n}$ é um inteiro divisível por 11, ou seja, a soma "alternada" $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n}$ é divisível por 11.

Demonstração. Sendo $a/p = 0,\overline{a_1 \ldots a_{2n}}$, temos $\dfrac{a}{p} = \dfrac{a_1 \ldots a_\ell}{10^{2n} - 1}$.

Então temos

$$a \times (10^{2n} - 1) = p \times a_1 \ldots a_\ell$$

e portanto p é divisor do produto $a \times (10^{2n} - 1)$.

Sendo p primo, e primo com a, temos p divisor de $10^{2n} - 1$. Agora, $2n = \ell(p) \geq 4$ pois o único primo com $\ell(p) = 2$ é o inteiro 11 e, por hipótese temos $p \geq 7$, $p \neq 11$.

Agora, sendo $n \geq 2$, temos a fatoração

$$\begin{aligned} 10^{2n} - 1 &= ((10^2)^n - 1) \\ &= (10^2 - 1)((10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \cdots + 10^2 + 1) \\ &= 99 \cdot ((10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \cdots + 10^2 + 1) \end{aligned}$$

Logo, p é divisor de $99 \cdot ((10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \cdots + 10^2 + 1)$. Sendo p primo, $p \geq 7$ e $p \neq 11$, p não é divisor de 99, logo p será divisor de $(10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \cdots + 10^2 + 1$.

Temos então $\dfrac{(10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \cdots + 10^2 + 1}{p}$ sendo um inteiro.

Daí, de $a \times (10^{2n} - 1) = p \times a_1 \ldots a_{2n}$, temos

$$a \times 99 \times ((10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \cdots + 10^2 + 1) = p \times a_1 \ldots a_{2n}$$

e então

$$a \times 9 \times 11 \times \frac{(10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \cdots + 10^2 + 1}{p} = a_1 \ldots a_{2n}$$

Logo, 11 é divisor do inteiro $a_1 \ldots a_{2n}$ e portanto, por [7], a soma alternada de dígitos $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n}$ é divisível por 11. □

6.5 Primos p com $\ell(p) = n$ para cada $n \geq 1$

Ao construir as tabelas nos exemplos 6.1 e 6.2, indagamos se seria possível encontrar um número primo p com $\ell(p) = n$ para cada inteiro positivo n. Com o uso do programa Maple 12 foi possível responder afirmativamente a esta indagação para os inteiros n de 1 a 100. Após alguma pesquisa, descobrimos que a resposta positiva a esta indagação está no teorema de Zsigmondy, encontrado em [11]. O teorema de Zsigmondy enuncia:

> *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Existe existe um divisor primo de $a^n - b^n$ que não divide $a^k - b^k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, exceto nos seguintes casos: (i) $2^6 - 1^6$; (ii) $n = 2$ e $a + b$ é uma potência de 2.*

O teorema de Zsigmondy é portanto verdadeiro no caso $a = 10$ e $b = 1$, sendo esta a resposta positiva à nossa indagação. Pois existindo um primo p tal que p seja divisor de $10^n - 1$ e não seja divisor de $10^k - 1$ para nenhum k tal que $1 \leq k < n$, então $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}}$ será o primeiro múltiplo de p dado por uma fileira de noves, definindo então $\ell(p) = n$.

Tabela 6.1. Inteiros n de 1 a 100, e correspondentes primos p com $\ell(p) = n$. Na construção da tabela, para encontrar os primos p com $\ell(p) = n$, para cada inteiro n dado, o autor buscou os fatores primos de $10^n - 1$ (utilizando o programa Maple 12), descartando destes os primos que também fossem fatores de $10^m - 1$ para algum inteiro m, com $1 \leq m < n$.

n	primos p com $\ell(p) = n$
1	3
2	11
3	37
4	101

5	41, 271
6	7, 13
7	239, 4649
8	73, 137
9	333667
10	9091
11	21649, 513239
12	9901
13	53, 79, 265371653
14	909091
15	31, 2906161
16	17, 5882353
17	2071723, 5363222357
18	19, 52579
19	1111111111111111111
20	3541, 27961
21	43, 1933, 10838689
22	23, 4093, 8779
23	11111111111111111111111
24	99990001
25	21401, 25601, 182521213001
26	859, 1058313049
27	757, 440334654777631
28	29, 281, 121499449
29	3191, 16763, 43037, 62003, 77843839397
30	211, 241, 2161
31	2791, 6943319, 57336415063790604359
32	353, 449, 641, 1409, 69857
33	67, 1344628210313298373
34	103, 4013, 21993833369
35	71, 123551, 102598800232111471
36	999999000001
37	2028119, 247629013, 2212394296770203368013
38	909090909090909091
39	900900900900990990990991
40	1676321, 5964848081
41	83, 1231, 538987, 201763709900322803748657942361
42	127, 2689, 459691

43	173, 1527791, 2140992015395526641, 1963506722254397
44	89, 1052788969, 1056689261
45	238681, 4185502830133110721
46	47, 139, 2531, 549797184491917
47	35121409, 316362908763458525001406154038726382279
48	9999999900000001
49	505885997, 1976730144598190963568023014679333
50	251, 5051, 78875943472201
51	613, 210631, 52986961, 13168164561429877
52	521, 1900381976777332243781
53	107, 1659431, 1371988587994914256602000071, 1325815267337711173
54	70541929, 14175966169
55	1321, 62921, 83251631, 1300635692678058358830121
56	7841, 127522001020150503761
57	21319, 10749631, 3931123022305129377976519
58	59, 154083204930662557781201849
59	2559647034361, 4340876285657460212144534289928559826755746751
60	61, 4188901, 39526741
61	733, 4637, 329401, 974293, 1360682471, 106007173861643, 061709990156159479
62	909090909090909090909090909091
63	10837, 23311, 45613, 45121231, 1921436048294281
64	19841, 976193, 6187457, 834427406578561
65	5538396997364024056286510640780600481, 162503518711
66	599144041, 183411838171
67	493121, 28213380943176667001263153660999177245677, 9863595778924342083
68	28559389, 1491383821, 2324557465671829
69	277, 203864078068831, 1595352086329224644348978893
70	4147571, 265212793249617641
71	241573142393627673576957439049, 45994811347886846310221728895223034301839
72	3169, 98641, 3199044596370769
73	12171337159, 1855193842151350117, 49207341634646326934001739482502131487446637
74	7253, 422650073734453, 296557347313446299
75	151, 4201, 15763985553739191709164170940063151
76	1369778187490592461, 7228170363223379041
77	5237, 42043, 29920507, 136614668576002329371496447555915740910181043
78	157, 6397, 216451, 388847808493
79	317, 6163, 10271, 307627, 49172195536083790769, 3660574762725521461527140564875080461079917

80	5070721, 19721061166646717498359681
81	163, 9397, 2462401, 676421558270641, 130654897808007778425046117
82	2670502781396266997, 3404193829806058997303
83	3367147378267, 346895716385857804544741137394505425384477, 9512538508624154373682136329
84	226549, 4458192223320340849
85	262533041, 8119594779271, 4222100119405530170179331190291488789678081
86	57009401, 2182600451, 7306116556571817748755241
87	4003, 72559, 310170251658029759045157793237339498342763245483
88	617, 16205834846012967584927082656402106953
89	497867, 103733951, 104984505733, 5078554966026315671444089, 403513310222809053284932818475878953159
90	29611, 3762091, 8985695684401
91	547, 14197, 17837, 4262077, 43442141653, 110742186470530054291318013, 316877365766624209
92	1289, 18371524594609, 4181003300071669867932658901
93	900900900900900900900900900900990990990990990990990990990991
94	6299, 4855067598095567, 297262705009139006771611927
95	191, 59281, 63841, 965194617121640791456070347951751, 1289981231950849543985493631
96	97, 206209, 66554101249, 75118313082913
97	12004721, 109399846855370537540339266842070119107662296580348039, 846035731396919233767211537899097169
98	197, 5076141624365532994918781726395939035533
99	199, 397, 34849, 362853724342990469324766235474268869786311886053883
100	60101, 7019801, 1680588011350901, 14103673319201

7. Dízimas periódicas sob encomenda

Este capítulo explora a construção de algumas frações comuns com representações decimais exibindo sequências de inteiros. As ideias deste capítulo vem de trabalhos de Kreminski [8], Schwenk [16] e Smoak e Osler [17]. As deduções mais elaboradas no entanto são fruto da experiência do autor.

A sequência de Fibonacci é uma sequência infinita de inteiros, $f_1, f_2, f_3, \ldots$, definida, por recorrência, da seguinte maneira

$$f_1 = f_2 = 1, \text{ e } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para cada } n \geq 3.$$

Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são dados pela lista

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

Agora observe as seguintes frações com a sequência de Fibonacci aparecendo em suas representações decimais.

$$\frac{100}{9899} = 0,01\,01\,02\,03\,05\,08\,13\,21\,34\,55\ldots \tag{7.1}$$

$$\frac{1000}{998999} = 0,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\,034\,055\ldots \tag{7.2}$$

E que tal estas, com sequências de potências de 2 e de 3 na expansão decimal?

$$\frac{2}{9998} = 0,0002\,0004\,0008\,0016\,0032\,0064\,0128\ldots \tag{7.3}$$

$$\frac{3}{9997} = 0,0003\,0009\,0027\,0081\,0243\,0729\,2187\ldots \tag{7.4}$$

As frações comuns nas igualdades acima foram produzidas de modo a terem exatamente as representações decimais exibidas. Como foram produzidas essas frações? É este assunto que exploraremos nas seções seguintes.

7.1 Produzindo algumas sequências numéricas elementares em dízimas periódicas

7.1.1 Frações com dízimas periódicas exibindo as potências de um número natural

Sem demora, vamos primeiramente esclarecer como foram produzidas as frações comuns com suas representações decimais inusitadas nas igualdades 7.3 e 7.4.

Para uma "produção" ilimitada de exemplos análogos a estes, de frações com representações decimais exibindo a sequência de potências de um inteiro $a \geq 2$, consideremos a função real e de variável real f dada por

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \qquad (0 < x < 1) \tag{7.5}$$

Notemos que para cada x, $0 < x < 1$, $f(x)$ é a soma de uma progressão geométrica infinita, de primeiro termo $a_1 = x$ e razão $q = x$, sendo portanto dada por

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Temos então

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \qquad (\text{se } 0 < x < 1) \tag{7.6}$$

Se $x = \dfrac{2}{10^4}$ temos $0 < x < 1$ e obtemos, por 7.6,

$$\begin{aligned} \frac{2/10^4}{1-2/10^4} &= \frac{2}{10^4} + \left(\frac{2}{10^4}\right)^2 + \left(\frac{2}{10^4}\right)^3 + \left(\frac{2}{10^4}\right)^4 + \left(\frac{2}{10^4}\right)^5 + \cdots \\ &= \frac{2}{10^4} + \frac{2^2}{10^8} + \frac{2^3}{10^{12}} + \frac{2^4}{10^{16}} + \frac{2^5}{10^{20}} + \cdots \\ &= 0,0002 + 0,0000\,0004 + 0,0000\,0000\,0008 + 0,0000\,0000\,0000\,0016 + \cdots \qquad (7.7) \\ &= 0,0002\,0004\,0008\,0016\,0032\ldots \end{aligned}$$

e então, multiplicando por 10^4 o numerador e o denominador da fração $\dfrac{2/10^4}{1-2/10^4}$, obtemos a igualdade 7.3,

$$\frac{2}{10^4 - 2} = \frac{2}{9998} = 0,0002\,0004\,0008\,0016\,0032\,0064\,0128\ldots$$

dando a representação decimal de $\dfrac{2}{9998}$, como descrita em 7.3.

A representação decimal de $\dfrac{2}{9998}$, obtida anteriormente, vai exibir separadamente as potências de 2 até $2^{12} = 4096$. A partir daí a soma em 7.7, que define a representação decimal, vai começar a "embaralhar" dígitos, sobrepondo dígitos das potências de 2, que passam a ter 5 dígitos ou mais, como ilustrado no diagrama a seguir.

$$
\begin{array}{llr}
\ldots\, 4096\ \ 8192 \quad (+) & & \\
\qquad\qquad\quad 1\ 6384 \quad (+) & & (2^{14} = 16384) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3\ 2768 \quad (+) & & (2^{15} = 32768) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6\ 5536\ \ldots \quad (+) & & (2^{16} = 65536) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots & & \\
\hline
2/9998 = 0,\ \ldots\, 4096\ \ 8193\ 6387\ 2774\ 5\ \ldots\ldots & &
\end{array}
$$

Agora, $\dfrac{2}{9998} = \dfrac{1}{4999}$, e 4999 é um número primo [20]. A representação decimal de $1/4999$, dada em 7.3, é portanto uma dízima periódica, de comprimento $\ell(4999) = 357$ (!!), comprimento este obtido por consulta a [20]. Portanto após os 357 primeiros dígitos da representação decimal de $1/4999$, a sequência de potências de 2 será reiniciada na representação decimal!

O leitor facilmente poderá verificar que, para produzir a igualdade 7.4, simplesmente avaliamos ambos os membros da igualdade 7.6 para $x = \dfrac{3}{10^4}$.

A dízima periódica de $\dfrac{3}{9997}$ em 7.4 tem comprimento

$$\ell(9997) = \ell(13 \cdot 769) = \mathrm{mmc}(\ell(13), \ell(769)) = \mathrm{mmc}(6, 192) = 192.$$

Convidamos o leitor a visualizar em uma calculadora e explicar como obter a fração comum que nos dá a igualdade

$$\frac{4}{9996} = \frac{1}{2499} = 0,0004\,0016\,0064\,0256\,1024\,\ldots$$

7.1.2 Frações com dízimas periódicas exibindo a sequência de números naturais

As somas de séries infinitas deduzidas nesta seção e na seção seguinte (tal como a soma 7.8) podem ser facilmente deduzidas pela teoria de séries de potências encontrada em livros universitários de Cálculo, tais como por exemplo Stewart [19], mas neste capítulo fizemos a opção de manter as deduções, na medida do possível, ao nível de matemática do ensino médio.

Nesta seção mostraremos como obter frações comuns cujas dízimas periódicas tem as representações decimais

$$0,01\,02\,03\,04\,05\,06\,07\,08\,09\,10\,11\,12\,13\,\ldots$$

$$0,001\,002\,003\,004\,005\,006\,007\,008\,009\ldots$$

Consideremos a sequência de n somas de progressões geométricas (podemos supor $n \geq 6$), de razão x, definidas para $0 < x < 1$,

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x + x^2 + x^3 + x^4 = \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}\\
f_2(x) &= \quad x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^2(1-x^{n-1})}{1-x} = \frac{x^2 - x^{n+1}}{1-x}\\
f_3(x) &= \quad x^3 + x^4 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^3(1-x^{n-2})}{1-x} = \frac{x^3 - x^{n+1}}{1-x}\\
&\vdots\\
f_{n-1}(x) &= \quad x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n-1}(1-x^2)}{1-x} = \frac{x^{n-1} - x^{n+1}}{1-x}\\
f_n(x) &= \quad x^n = \frac{x^n(1-x^1)}{1-x} = \frac{x^n - x^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}
$$

Para $0 < x < 1$, somando membro a membro as igualdades acima, temos

$$
\begin{aligned}
x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\\
&= \frac{x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n - nx^{n+1}}{1-x}\\
&= \frac{\frac{x(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}
$$

e por uma simplificação chegamos à identidade

$$
x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \frac{x - x^{n+1} - nx^{n+1}(1-x)}{(1-x)^2} \tag{7.8}
$$

Quando n tende ao infinito, como $0 < x < 1$, temos x^n tendendo a 0. Escrevemos $x^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Também teremos $n \cdot x^n$ tendendo a zero quando n tende ao infinito. A justificativa desta afirmação é dada imediatamente a seguir.

Se $0 < x < 1$, então $\frac{1}{x} > 1$. Podemos dizer que $\frac{1}{x} = 1 + a$ sendo $a > 0$, e então $x = \frac{1}{1+a}$. Assim sendo $x^n = \frac{1}{(1+a)^n}$.

Agora temos os desenvolvimento binomial

$$
(1+a)^n = 1 + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1} + a^n > \binom{n}{2}a^2 = \frac{n(n-1)}{2}a^2
$$

ou seja, $(1+a)^n > \frac{n(n-1)a^2}{2}$, logo $x^n = \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{2}{n(n-1)a^2}$ e então

$$
nx^n = \frac{n}{(1+a)^n} < \frac{2 \cdot n}{n(n-1)a^2} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)a^2} = \frac{2}{(n-1)a^2}
$$

Portanto, $0 < nx^n < \frac{2}{(n-1)a^2}$, e como $\frac{2}{(n-1)a^2} \to 0$ quando $n \to \infty$, temos $nx^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Incidentalmente, também deduzimos a desigualdade $0 < x^n < \dfrac{2}{n(n-1)a^2}$ e podemos usá-la para justificar que $x^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Assim, para $0 < x < 1$, quando $n \to \infty$, no membro direito de 7.8 temos

$$\frac{x - \cancelto{0}{x^{n+1}} - \cancelto{0}{nx^{n+1}}(1-x)}{(1-x)^2} \to \frac{x}{(1-x)^2}$$

e deduzimos uma igualdade para a soma de infinitos termos

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (\text{para } 0 < x < 1) \tag{7.9}$$

Por 7.9, temos então, tomando $x = \dfrac{1}{10^2}$,

$$\frac{1}{10^2} + \frac{2}{(10^2)^2} + \frac{3}{(10^2)^3} + \frac{4}{(10^2)^4} + \cdots = \frac{1/10^2}{(1-1/10^2)^2} = \frac{1/10^2}{(1-1/10^2)^2} \times \frac{10^4}{10^4} = \frac{10^2}{(10^2-1)^2}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}\frac{100}{9801} &= \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^6} + \frac{4}{10^8} + \cdots \\ &= 0{,}01 + 0{,}00\,02 + 0{,}00\,00\,03 + 0{,}00\,00\,00\,04 + \cdots \\ &= 0{,}01\,02\,03\,04\,\ldots\end{aligned}$$

Experimente obter 100/9801 usando uma calculadora.

A fração $\dfrac{100}{9801} = \dfrac{10}{3^4 \cdot 11^2}$ é irredutível, sendo sua forma decimal uma dízima periódica de comprimento

$$\ell(9801) = \ell(3^4 \cdot 11^2) = \mathrm{mmc}(\ell(3^4), \ell(11^2))$$

Temos $\ell(3^4) = 3^2 \cdot \ell(3) = 9$ e $\ell(11^2) = 11 \cdot \ell(11) = 22$.

Portanto $\ell(9081) = 9 \cdot 22 = 198$ é o comprimento da dízima periódica de 100/9801.

Deixamos ao leitor a dedução das seguintes igualdades, e experimentar obtê-las usando uma calculadora.

$$\frac{1000}{998001} = 0{,}001\,002\,003\,004\,005\,\ldots \tag{7.10}$$
$$\frac{10000}{99980001} = 0{,}0001\,0002\,0003\,0004\,0005\,\ldots \tag{7.11}$$

Os comprimentos das dízimas periódicas das frações dadas em 7.10 e 7.11 podem ser calculados, sendo 2997 e 39996 respectivamente.

7.1.3 Frações com dízimas periódicas exibindo a sequência de números naturais ímpares

Nesta seção pesquisaremos frações comuns que tem representações decimais

$$0,001\,003\,005\,007\,009\,011,013\,015\ldots$$

$$0,0001\,0003\,0005\,0007\,0009\,0011\,0013\ldots$$

Primeiramente deduziremos uma fórmula fechada para a seguinte soma de n termos, com $n \geq 6$,

$$f_n(x) = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n \quad (\text{para } 0 < x < 1) \tag{7.12}$$

Temos

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots + (2n-1)x^n \\ x \cdot f_n(x) &= \qquad x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots + (2n-3)x^n + (2n-1)x^{n+1} \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} f_n(x) - x \cdot f_n(x) &= x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^n - (2n-1)x^{n+1} \\ &= x + \frac{2x^2(1-x^{n-1})}{1-x} - (2n-1)x^{n+1} \\ &= \frac{x - x^2 + 2x^2 - 2x^{n+1}}{1-x} - (2n-1)x^{n+1} \\ &= \frac{x + x^2 - 2x^{n+1}}{1-x} - (2n-1)x^{n+1} \end{aligned}$$

Logo,

$$(1-x)f_n(x) = \frac{x + x^2 - 2x^{n+1}}{1-x} - (2n-1)x^{n+1}$$

e portanto

$$f_n(x) = \frac{x + x^2 - 2x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(2n-1)x^{n+1}}{1-x} \tag{7.13}$$

Na seção anterior, vimos que sendo $0 < x < 1$, quando $n \to \infty$, $x^{n+1} \to 0$ e $nx^{n+1} \to 0$. Assim sendo, pela igualdade 7.13, quando $x \to 0$, $f_n(x) \to \dfrac{x + x^2}{(1-x)^2}$.

Assim, pelas igualdades 7.12 e 7.13, fazendo $n \to \infty$, chegamos à igualdade

$$\frac{x + x^2}{(1-x)^2} = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots \qquad (\text{se } 0 < x < 1) \tag{7.14}$$

Agora, substituindo $x = \dfrac{1}{10^3}$ em 7.14, chegamos a

$$\frac{1}{10^3} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^9} + \frac{7}{10^{12}} + \cdots = \frac{1/10^3 + 1/10^6}{(1-1/10^3)^2} \times \frac{10^6}{10^6} = \frac{10^3 + 1}{(10^3 - 1)^2}$$

ou seja,

$$\frac{1001}{998001} = 0,001\,003\,005\,007\,009\,011\,013\,015\ldots,$$

uma dízima periódica de comprimento 2997.

Deixamos ao leitor a dedução da fração comum que tem a expansão decimal

$$0,0001\,0003\,0005\,0007\,0009\,0011\,0015\ldots$$

7.1.4 Frações com dízimas periódicas exibindo a sequência de Fibonacci

Revisando o que dissemos no início deste capítulo, a sequência de Fibonacci é uma sequência infinita de inteiros, $f_1, f_2, f_3, \ldots$, definida, por recorrência, da seguinte maneira

$$f_1 = f_2 = 1, \text{ e } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para cada } n \geq 3.$$

Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são dados pela lista

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

A seguir desvendaremos como foi construída a fração de inteiros em 7.2, com dízima periódica exibindo os termos da sequência de Fibonacci,

$$\frac{1000}{998999} = 0,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\,034\,055\ldots$$

Primeiramente deduziremos uma fórmula fechada para a seguinte soma de n termos, com $n \geq 6$,

$$g_n(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + \cdots + f_{n-1}x^{n-1} + f_nx^n \quad (\text{para } 0 < x < 1) \tag{7.15}$$

Temos

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + \cdots + f_{n-1}x^{n-1} + f_nx^n \\
x \cdot g_n(x) &= \qquad f_1x^2 + f_2x^3 + f_3x^4 + \cdots + f_{n-2}x^{n-1} + f_{n-1}x^n + f_nx^{n+1} \\
x^2 \cdot g_n(x) &= \qquad\qquad f_1x^3 + f_2x^4 + \cdots + f_{n-3}x^{n-1} + f_{n-2}x^n + f_{n-1}x^{n+1} + f_nx^{n+2}
\end{aligned}$$

Agora, temos $f_3 = f_2 + f_1$, $f_4 = f_3 + f_2$, $\ldots$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, e então

$$g_n(x) - x \cdot g_n(x) - x^2 \cdot g_n(x) = f_1x + (f_2 - f_1)x^2 - f_nx^{n+1} - f_{n-1}x^{n+1} - f_nx^{n+2}$$

Daí,

$$(1 - x - x^2)g_n(x) = x - f_nx^{n+1} - f_{n-1}x^{n+1} - f_nx^{n+2}$$

e como $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, chegamos então à fórmula

$$g_n(x) = \frac{x - f_{n+1}x^{n+1} - f_n x^{n+2}}{1 - x - x^2} \tag{7.16}$$

Agora queremos demonstrar que, se $0 < x < 1/2$, $f_n \cdot x^n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Notemos que $f_n < 2^n$ para cada n, afirmação que demonstraremos imediatamente a seguir por indução sobre n.

$f_1 = 1 < 2^1$, $f_2 = 1 < 2^2$ e, para $n \geq 3$, supondo $f_{n-1} < 2^{n-1}$ e $f_{n-2} < 2^{n-2}$ então teremos

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

logo $f_n < 2^n$. Assim, por indução sobre n, confirmamos que $f_n < 2^n$ para cada natural $n \geq 1$.

Se $0 < x < 1/2$, então $f_n \cdot x^n < 2^n \cdot x^n = (2x)^n$. Sendo $0 < 2x < 1$, $(2x)^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $0 < f_n \cdot x^n < (2x)^n$, temos então $f_n \cdot x^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Aplicando este resultado nas igualdades dadas em 7.15 e 7.16, obtemos a igualdade

$$f_1\, x + f_2\, x^2 + f_3\, x^3 + f_4\, x^4 + \cdots = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad (\text{se } 0 < x < 1/2) \tag{7.17}$$

Agora substituindo $x = \dfrac{1}{10^3}$ na igualdade 7.17, teremos

$$\frac{f_1}{10^3} + \frac{f_2}{10^6} + \frac{f_3}{10^9} + \frac{f_4}{10^4} + \cdots = \frac{1/10^3}{1 - 1/10^3 - 1/10^6} \times \frac{10^6}{10^6} = \frac{10^3}{10^6 - 10^3 - 1} = \frac{1000}{998999}$$

Agora, pegamos uma calculadora e apreciamos

$$\frac{1000}{998999} = 0,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\ldots$$

uma dízima periódica de comprimento 496620.

Referências Bibliográficas

[1] BULLYNCK, MAARTEN. **Decimal periods and their tables: A German research topic (1765-1801)**. Historia Mathematica 36 (2009) 137–160.

[2] CHILDS, LINDSAY. **A concrete introduction to higher algebra**. 1st ed. New York: (UTM) Springer-Verlag, 1979.

[3] DOLISI, EARL EDWARD. **Periodic Decimal Fractions.** M.A. Thesis. Kansas State Teachers College of Emporia, Emporia: 1973. Disponível em `https://esirc.emporia.edu/bitstream/handle/123456789/2578/Dolisi%201973.pdf?sequence=1`. Acesso em 11/03/2024.

[4] FISCHER, RICHARD. **Tabelle bis Basis 10125 / List from base 2 until 10125 / Update 13.05.2024**. Disponível em `https://www.fermatquotient.com/`. Acesso em 4 de junho de 2024.

[5] GAUSS, CARL FRIEDRICH. **Disquisitiones Arithmeticae**. Trad. Arthur A. Clarke. New York: Springer, 1986.

[6] GINSBERG, BRIAN D. **Midy's (nearly) secret theorem – an extension after 165 years**. College Math J. 35 (2004) 26-30. doi:10.2307/4146879.

[7] HEFEZ, ABRAMO. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[8] KREMINSKI, RICHARD. **Fun Fractions? You've Got to Be Kidding!** The Mathematics Teacher, October 1998, Vol. 91, No. 7 (October 1998), pp. 572–575.

[9] LIMA, ELON LAGES. **Números e funções reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] LYONS, CHRISTOPHER. **The secret life of $1/n$: A journey far beyond the decimal point**. Mathematics Enthusiast: Vol. 13: No. 3, Article 3, 2016. Disponível em `https:scholarworks.umt.edu/tme/vol13/iss3/3`. Acesso em 4/03/2024.

[11] MICHELS, BART. **Zsigmondy's Theorem**. Disponível em `https://pommetatin.be/files/zsigmondy_en.pdf`. Acesso em 28/06/2024.

[12] MIDY, E. **De quelques propriètès de nombres et des fractions décimales periodiques**. Disponível em `https://archive.org/details/1014596483`. Acesso em 4/03/2024.

[13] MUIR, THOMAS. **Theorems on congruences bearing on the question of the number of figures in the periods of the reciprocal of the integers**. Messenger of Mathematics. 4(1875) 1-5.

[14] OEIS. **Primes p such that** `10^(p-1) == 1 (mod p^2)`. The Online Enciclopedia of Integer Sequences. Disponível em `https://oeis.org/A045616`. Acesso em 4 de junho de 2024.

[15] ROSS, KENNETH A. **Repeating Decimals: A Period Piece**. Mathematics Magazine, Vol. 83, No. 1 (February 2010), pp. 33-45.

[16] SCHWENK, ALLEN. **An Unanticipated Decimal Expansion**. Math Horizons, Vol. 20, No. 1 (September 2012), pp. 10–12.

[17] SMOAK, JAMES e OSLER, THOMAS J. **A Magic Trick From Fibonacci**. The College Mathematics Journal, Jan. 2003. Vol. 34. No. 1 (Jan. 2003), pp. 58–60.

[18] STARK, HAROLD M. **An Introduction to Number Theory**. Cambridge: The MIT Press, 1998.

[19] STEWART, JAMES. **Cálculo: volume 2. 6ª ed.** Trad. de Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

[20] `https://www.wolframalpha.com/` Acesso em 11/03/2024.