



A Geometria das Cúpulas :  
da Arquitetura Ocidental Antiga  
às Construções Índigenas Brasileiras

Flausino Lucas Neves Spindola  
*Universidade Federal do Maranhão*

São Carlos - SP

2024

# Dedicatória

A Ana Neves, minha mãe.



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>v</b>  |
| <b>1 Arquitetura e História</b>                                    | <b>1</b>  |
| 1.1 Civilização egípcia . . . . .                                  | 1         |
| 1.2 Civilização Romana . . . . .                                   | 1         |
| 1.3 Império Bizantino . . . . .                                    | 4         |
| 1.4 Período Medieval e Renascentista . . . . .                     | 4         |
| <b>2 Curvas Planas e Espaciais</b>                                 | <b>9</b>  |
| 2.1 Curvas no Plano . . . . .                                      | 9         |
| 2.2 Curvas no Espaço . . . . .                                     | 20        |
| <b>3 Superfícies</b>   | <b>27</b> |
| 3.1 Superfície Parametrizada Regular . . . . .                     | 27        |
| 3.2 Plano Tangente e Vetor Normal . . . . .                        | 29        |
| 3.3 Primeira e Segunda Formas Fundamentais . . . . .               | 30        |
| 3.4 Curvatura Normal e Curvaturas Principais . . . . .             | 33        |
| 3.5 Equação Diferencial das Linhas de Curvatura . . . . .          | 45        |
| 3.6 Superfície Regrada . . . . .                                   | 49        |
| <b>4 O Elipsoide de Monge</b>                                      | <b>55</b> |
| 4.1 O Projeto da Cúpula Elipsoidal . . . . .                       | 55        |
| 4.2 Resolução Computacional das Linhas sobre o Elipsoide . . . . . | 59        |
| <b>5 As Habitações Indígenas do Alto Xingú</b>                     | <b>67</b> |
| Referências Bibliográficas . . . . .                               | 73        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                  | <b>73</b> |



# Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Tesouro de Atreu. . . . .  | 2  |
| 1.2  | Arco com aduelas . . . . .   | 2  |
| 1.3  | Abóbada de Berço e Aresta. . . . .   | 3  |
| 1.4  | Basílica de São Vital. . . . .   | 4  |
| 1.5  | Duomo Florense . . . . .   | 6  |
| 1.6  | Batistério de Pisa. . . . .  | 6  |
| 1.7  | Campanário de Pisa. . . . .  | 7  |
|      |  |    |
| 2.1  | Ilustração da curva do Exemplo 2.2. . . . .  | 10 |
| 2.2  | Ilustração do traço de uma curva plana do Exemplo 2.3. . . . .   | 10 |
| 2.3  | Trajetória elipsoidal de uma partícula, com vetor velocidade e vetor aceleração . . . . .                        | 12 |
| 2.4  | À esquerda, a reta real ilustrando a parametrização da curva à direita, de $\alpha(t_0)$ a $\alpha(t)$ . . . . . | 13 |
| 2.5  | Circunferência de raio $r$ ilustrando o comprimento de arco de $c(0)$ a $c(t)$ , conforme Exemplo 2.13. . . . .  | 15 |
| 2.6  | Ilustração do Referencial de Frenet ao longo de uma curva plana. . . . .   | 17 |
| 2.7  | Ilustração da hélice do Exemplo 2.24. . . . .  | 21 |
| 2.8  | Ilustração do vetor velocidade e vetor aceleração na curva do Exemplo 2.25. . . . .                              | 22 |
| 2.9  | Ilustração do Triedro de Frenet ao longo da curva. . . . .   | 25 |
|      |  |    |
| 3.1  | Ilustração da curva do Exemplo 3.1. . . . .  | 28 |
| 3.2  | Representação Vetor Tangente à superfície . . . . .  | 29 |
| 3.3  | Plano Tangente ao parabolóide hiperbólico $z = xy$ , na origem $(0, 0, 0)$ . . . . .                             | 29 |
| 3.4  | Ilustração do Helicóide . . . . .  | 32 |
| 3.5  | Ilustração do ângulo formado entre o vetor normal à curva e o vetor normal à superfície . . . . .                | 35 |
| 3.6  | Ilustração de uma casca cilíndrica . . . . .   | 38 |
| 3.7  | Ilustração de um parabolóide hiperbólico . . . . .   | 40 |
| 3.8  | Ilustração de uma casca elipsoidal . . . . .   | 42 |
| 3.9  | Ilustração de uma esfera . . . . .   | 43 |
| 3.10 | Linhas de Curvatura do Parabolóide Hiperbólico . . . . .   | 47 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.11 | Ilustração do Parabolóide Elíptico . . . . .  | 48 |
| 3.12 | Linhas de Curvatura do Parabolóide Elíptico . . . . .   | 49 |
| 3.13 | Ilustração do Cone . . . . .  | 50 |
| 3.14 | Paraboloide Hiperbolico parametrizado como superfície regradada. . . . .                                  | 51 |
| 4.1  | Gaspard Monge . . . . .   | 55 |
| 4.2  | Duomo de Florença . . . . .   | 56 |
| 4.3  | Esfera, à direita, e semi-paraboloide de revolução, à esquerda . . . . .                                  | 56 |
| 4.4  | Elipsoide de Monge . . . . .  | 56 |
| 4.5  | Linhas de curvatura no elipsoide, originalmente desenhadas por Monge. . . . .                             | 57 |
| 4.6  | Projeto de construção da cúpula elipsoidal . . . . .  | 57 |
| 4.7  | Ilustração do Elipsoide Triaxial da Equação 4.2 . . . . .   | 59 |
| 4.8  | Campos de Direções Principais no Elipsóide de Monge . . . . .   | 61 |
| 4.9  | Resolução Computacional da Eq. Dif. Linhas de Curvatura sobre Elipsoide de Monge . . . . .                | 63 |
| 4.10 | Resolução Computacional da Eq. Dif. Linhas de Curvatura sobre Elipsoide de Monge . . . . .                | 64 |
| 4.11 | Equação Diferencial das linhas de curvatura sobre o Elipsoide de Monge: Resolução Computacional . . . . . | 65 |
| 5.1  | Localização e divisão do território xinguano . . . . .  | 67 |
| 5.2  | Planta baixa elipsoidal da maloca Yawalapiti . . . . .  | 68 |
| 5.3  | Estrutura da casa Yawalapiti. À esquerda, construção e, à direita, vista da cúpula. . . . .               | 69 |
| 5.4  | Comunidade em construção da maloca. À esquerda, visão externa, à direita, visão interna. . . . .          | 69 |
| 5.5  | Maquete 3d da casa Kamayura [11] . . . . .  | 70 |
| 5.6  | Maquete da casa Kamayurá em software Revit™ [20] . . . . .  | 70 |
| 5.7  | Resolução Computacional da Eq. Dif. Linhas de Curvatura sobre Elipsoide de Monge . . . . .                | 71 |
| 5.8  | Comparativo entre figuras com estruturas de linhas similares. . . . .                                     | 71 |

# Introdução

O presente texto destina-se às notas de minicurso proferido na XI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. O propósito deste texto é abordar os conceitos de Geometria Diferencial, mais especificamente de curvas e de superfícies, sob o ponto de vista interdisciplinar. Buscamos compreender as cúpulas, de modo especial aquelas em formato elipsoidal, e a partir disso motivar o estudo da teoria de linhas de curvatura.

Este trabalho é fruto de estudos, pesquisas e orientação de monografias de alunos do curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Maranhão. O primeiro capítulo, em que é traçada a abordagem histórica e arquitetônica em vários períodos, teve a contribuição da professora e arquiteta Marina Martins, a qual colaborou na orientação dos já engenheiros Patrick Jesus, Deyvisson Pires e Manoele Santos. A leitura completa deste TCC pode ser conferida em [15].

Já no segundo capítulo, realizamos uma abordagem elementar de curvas, tanto planas quanto espaciais. Procuramos exibir bastante exemplos, para que o estudantes acompanhem os cálculos, e vejam as ilustrações. Caso queira, você pode acompanhar por um sistema computacional, como Maple™, MatLab™ ou outro de preferência. Mas, se o contato com esta teoria for pela primeira vez, não há melhores amigos para a aprendizagem que o lápis e a borracha. A referência principal para este capítulo é [23].

No capítulo terceiro estudamos as superfícies. Do ponto de vista da aplicação a arquitetura, as cúpulas são consideradas superfícies, por isso este capítulo precisa ser bem estudado. Ilustramos e efetuamos cálculos com as formas fundamentais no caso das cascas cilíndricas, das cascas em formas de parabolóide hiperbólico, do parabolóide elíptico e demais superfícies. Dedicamos uma seção a função curvatura normal e às curvaturas principais, e demonstramos a equação diferencial das linhas de curvatura. Com uso do software Maple™, resolvemos computacionalmente a equação das linhas, para algumas superfícies conhecidas, bem como efetuamos o plot destas linhas. Finalizamos o capítulo com um breve estudo das superfícies regradas.

O capítulo quatro vai tratar do elipsoide de Monge, das linhas de curvatura do elipsoide e do projeto da cúpula do prédio do Parlamento Francês, no fim do século XVIII, cuja estrutura obedecia à configuração principal do elipsoide. É efetuada a resolução computacional da equação diferencial das linhas de curvatura sobre um elipsoide de Monge, e o retrato destas resoluções.

Neste último capítulo, trazemos a discussão sobre as habitações indígenas do alto

Xingu, cujos povos na construção de sua habitação coletiva, a maloca, realizam estrutura que muito se assemelha àquela do elipsoide de Monge. Utilizamos acervos de imagens de livros, revistas e grupos de pesquisas da FAU-USP, UFMT e UFBA. É mostrado que existe um diálogo entre o conhecimento científico europeu e o conhecimento tradicional dos povos indígenas do Xingu no que tange a cúpulas elipsoidais. Apesar das culturas absolutamente distintas, ambos chegam aproximadamente a mesma solução construtiva para o problema geométrico.

Esperamos que este texto seja útil, contribua para a aprendizagem, e traga uma nova compreensão sobre o saber dos povos originários.

Flausino Lucas Neves Spindola  
Barretos, 21 de julho de 2024

## Capítulo 1

# Arquitetura e História

### 1.1 Civilização egípcia

Uma das principais civilizações da Antiguidade, os egípcios possuíam uma rica organização social e cultural, o que refletia-se na construção. Com a crença na vida após a morte, dava-se muita importância aos locais de sepultamento, que inicialmente ocorriam em locais de formato retilíneo, e posteriormente, deram origem às pirâmides. Alguns templos funerários passaram a apresentar arcos em suas entradas principais. O aparecimento das estruturas com segmentos curvos como sistema estrutural caracteriza-se como um marco na evolução da arquitetura. Supõe-se, portanto, que o arco tenha sido criado na Mesopotâmia e no Antigo Egito, há cerca de 6000 anos, embora tenham sido os Romanos os responsáveis pela transição das estruturas retilíneas helenísticas para as estruturas curvas, divididas em arcos, abóbadas e cúpulas.

Os formatos curvos não foram utilizados por todas as civilizações, a exemplo dos Astecas, Maias e Incas, que continuaram a construir com formatos retilíneos durante séculos. As estruturas abobadadas são uma generalização do arco e surgiram pouco tempo depois. Na Babilônia e no Egito identificaram-se exemplos de abóbadas de canhão ou abóbadas de berço, executadas sem cimbra - armação utilizada como molde na construção de estruturas curvas - através da técnica de leitos inclinados.

As cúpulas remetem à civilização Micênica e trata-se de uma construção conhecida como tholos. O processo construtivo dessa estrutura baseia-se no posicionamento dos blocos de pedra de maneira desencontrada, tendo como consequência as fiadas em balanço, configurando-se um perfil ogival, a exemplo do Tesouro de Atreu (Figura 1.1). Os Romanos contribuíram para a evolução dessas estruturas.

### 1.2 Civilização Romana

A cidade romana surgiu por volta de 753 a.C. Sua formação cultural deve-se aos gregos e etruscos, civilização que transmitiu o legado dos arcos e abóbadas nas construções. Apesar da importância, o funcionamento dessas estruturas e suas vantagens demoraram a ser compreendidas. Os romanos conseguiram atingir uma elevada maestria na execução

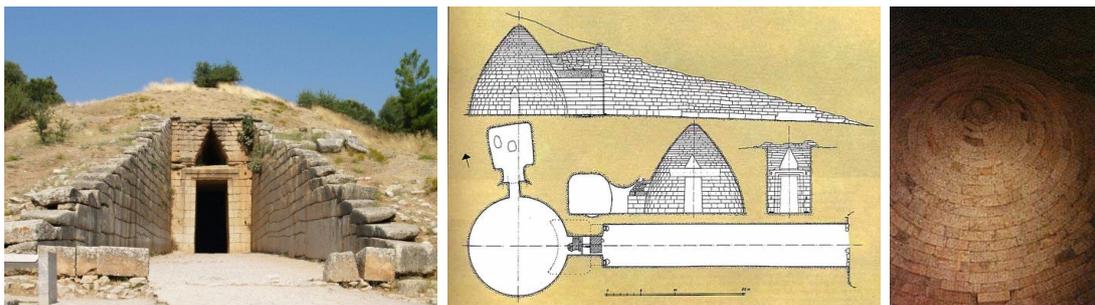


Figura 1.1: Tesouro de Atreu.

dessas obras, possibilitando a construção de amplas estruturas com dimensões extensas, mais duráveis e resistentes.

Antes do surgimento do arco, as construções romanas eram compostas por várias colunas de sustentação, pois o vão entre elas era limitado pelo tamanho da travessa, e quanto maior a viga apoiada, maior era a tensão existente sobre elas, e sendo a pedra o material utilizado, não havia resistência às grandes tensões. Dessa forma, os espaços de circulação eram reduzidos. Com os arcos a resistência aumentou, assim como o espaço de circulação, pela ampliação do vão entre as colunas devido à não sobrecarga no centro em relação às extremidades, resultando em uma melhor distribuição de cargas.

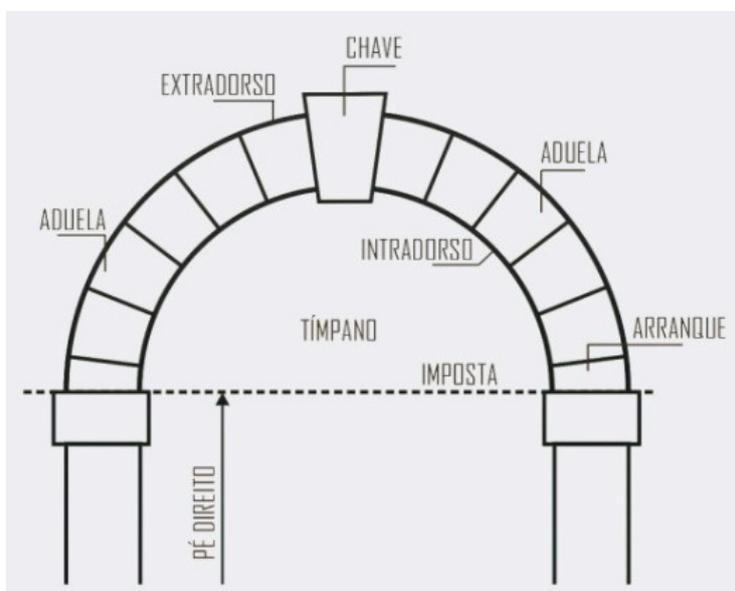


Figura 1.2: Arco com aduelas

Destacam-se também o uso de novos materiais, de novas técnicas construtivas e a concepção de novos perfis de abóbadas. No campo dos materiais, sobressai-se a produção de tijolos, que começaram a ter dimensões normalizadas, e o aparecimento do concreto. Os romanos utilizavam o cimbra como técnica construtiva, uma armação de madeira como molde para a construção do arco ou da abóbada nas suas edificações monumentais.

Em abóbadas com maiores dimensões, usava-se outra técnica de construção, compósita, que consistia em executar uma camada de tijolo com função de cimbra, que se encontraria no interior da peça. Foi desenvolvida, além da abóbada de berço, a abóbada de aresta, que resultava da intersecção de duas abóbadas de berço, originando arestas convexas no intradorso, resultando no aumento dos vãos, redução da espessura das paredes que as sustentavam (pés-direitos) e, ainda possibilitando incorporar aberturas nessas paredes. Isto deve-se ao sistema de encaminhamento das cargas, que nas abóbadas de aresta, se faz pela concentração de tensões nas arestas, aliviando, deste modo, as paredes laterais. No entanto, o sistema estrutural apresentava algumas limitações. Adaptava-se bem a uma base quadrada, porém nas bases de formatos retangulares exigia-se um comprimento múltiplo da largura. Já nas diagonais via-se a dificuldade inerente a estereotomia (corte das pedras) que eram agravadas em abóbadas com base retangular, pois a intersecção de abóbadas de berço possui vãos diferentes. O mesmo se deu em abóbadas de arestas resultantes da intersecção de abóbadas de berço com diferentes alturas. Sendo assim, os arquitetos começaram a adaptar plantas retangulares múltiplas de bases quadradas, sobre as quais surgiam-se abóbadas de arestas (ver Figura 1.3).

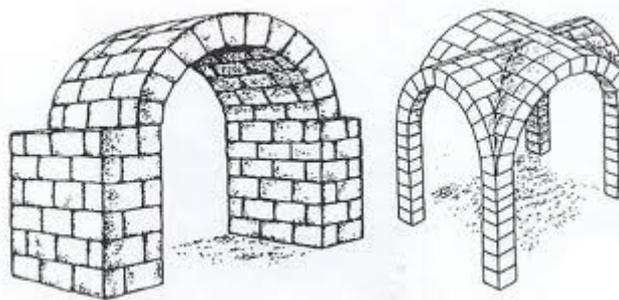


Figura 1.3: Abóbada de Berço e Aresta.

Para suprir o problema das tensões diagonais, fizeram a construção das abóbadas pelos arcos de alvenaria nestas zonas que depois seriam embebidos nas cascas. Assim solucionou-se o problema geométrico ligado ao corte das pedras nas arestas, consequentemente melhorando o comportamento da estrutura. Permitiu-se reduzir e padronizar o nível de tensões na casca, confirmando uma melhor transmissão dos esforços solicitantes aos apoios.

Os templos tradicionais de Roma apresentavam-se em um plano mais elevado, com uma escadaria na entrada, apresentando elementos arquitetônicos como pórticos. No templo de Panteão foi incorporado a nova forma de construir. Feito para cultuar os diversos deuses romanos, este templo possuía uma grande área planejada por uma planta circular. Dessa forma, esta civilização também desenvolveu a cúpula. Enquanto tem-se a abóbada como a translação de um arco, a cúpula é entendida como o resultado da rotação de um arco em um eixo determinado. Outro exemplo é a cúpula do templo de Minerva Médica, com planta circular graças à dificuldade de execução de cúpulas em plantas com

outras geometrias, limitação superada no Império Bizantino.

### 1.3 Império Bizantino

Fruto do Império Romano no Oriente e da mudança da capital do Império de Roma para Bizâncio, a maior contribuição da cultura bizantina sob o ponto de vista estrutural, foi o desenvolvimento da solução que permitia a sobreposição de cúpulas em bases não circulares, o que introduziu elementos esféricos triangulares entre a cúpula e a base. Um exemplo é a Basílica de Santa Sofia, com cúpula equilibrada sobre base quadrada, formada por meio de quatro arcos e aplicada em duas absides, espécie de concha, que, por sua vez, encontra-se situada sobre mais cinco absides menores.

Na cidade de Ravena é percebida outra grande estrutura que mescla arquitetura romana com elementos da cultura bizantina, a Basílica de São Vital, onde observa-se um formato de base octogonal e uma cúpula centralizada, com outras oito semi-cúpulas absidais em volta da principal, em forma de pétala.

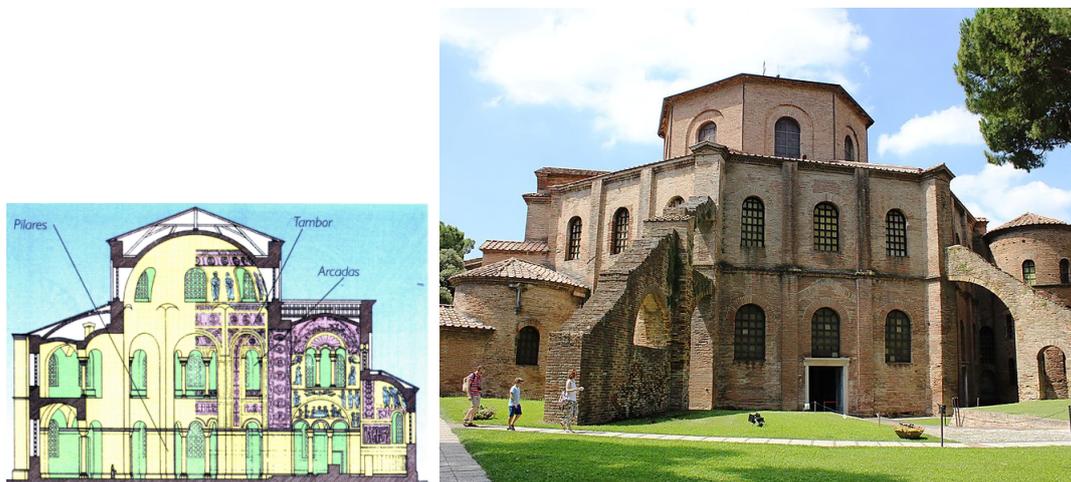


Figura 1.4: Basílica de São Vital.

As elaboradas técnicas construtivas dos bizantinos os levaram a ser considerados mestres da construção sem o uso de cimbra, sob influência do conhecimento dos sistemas construtivos de abóbadas da engenharia Persa Aquemênida.

### 1.4 Período Medieval e Renascentista

Após a decadência do Império Romano deu-se o surgimento da Idade Média, caracterizando-se como um período instável político e economicamente, fato que afetou o desenvolvimento arquitetônico da época. O desmembramento do antigo Império Romano, que antes executava grandes obras, acarretou no enfraquecimento da sua logística de construção, bem como da inovação e do desenvolvimento dos estudos construtivos e estruturais. Nesse período a construção não foi vista como prioridade, voltando-se a mão-de-obra para a guerra ou para os campos agrícolas. Interrompida a atividade, ressurgiram princípios e regras na construção romana, desenvolvendo-se a união de arquitetura com religião. Esta

teve como contribuição as catedrais, dadas de forma sólidas e duradouras devido a suas alvenarias robustas e/ou contrafortes para absorção das cargas de arcos e abóbadas.

Este estilo romano marcou bastante a arquitetura. Havia dois tipos de abóbadas: as de berço e as de aresta. As primeiras eram mais simples e concebidas num semicírculo, denominado arco pleno, com a desvantagem do elevado peso do teto de alvenaria, que provocava desabamentos. Outro fator negativo era a pouca luminosidade do ambiente, devido às janelas estreitas, uma vez que a ampliação desses espaços era inviável, visto que aumentariam as tensões nas paredes e as chances de desabamento.

O segundo tipo de abóbada foi desenvolvido justamente por essas desvantagens supracitadas. A partir de uma interseção em ângulo reto de duas abóbadas de berço apoiadas sobre pilares, foi possível obter maior leveza no teto de alvenaria e maior iluminação. As bases, então, deveriam ser no formato quadrado, dividido em setores que correspondiam a cada uma dessas abóbadas.

A arquitetura românica é notável na Itália, onde o conjunto mais conhecido encontra-se na cidade de Pisa. Ele é formado por quatro grandes edifícios situados em uma área popular por Piazza Del Duomo ou Campo Dei Miracoli. As três estruturas mais importantes são a Igreja ou Duomo (Figura 1.5), o Batistério e o Campanário (Figura 1.7), que assemelham-se pela presença de arcadas sustentadas por colunatas e pela uniformidade de material. O Batistério de Pisa encontra-se executado sobre uma planta concêntrica, e alinhada porta a porta com a igreja. A torre é deslocada para uma das laterais do Duomo. A igreja apresenta formas simples e fachada com paredes triangulares sem abertura, ressaltando sua cobertura de duas águas, maiores que as laterais. A estética da fachada baseia-se em quatro níveis de colunatas aplicadas sobre a arcada inferior. A estrutura apresenta altas pilastras alçadas por grandes arcos da seção mais próxima do chão, que tornou desnecessário o uso de paredes maciças para absorver as cargas atuantes constantes. De maneira diferente, as lóginas - tipos de pórtico - superiores desempenham um papel mais decorativo que estrutural. Porém as galerias de colunas diminuem a espessura da parede externa dessa fachada, juntamente com seu peso.

O Batistério (Figura 1.6), por sua vez, possui outro sistema de sustentação para telhado de formato redondo, onde a cobertura acompanha o formato da estrutura, finalizando com um cone, resiliente a uma série de colunas internas. O cone puxa o volume para cima e acentua as nervuras. O Duomo possui planta em forma de cruz latina basicamente retangular, que posteriormente ganhou contornos mais específicos para este tipo de implantação. Seus transeptos possuem absides semicirculares cobertos por semi-cúpula, semelhante a uma concha. A cúpula era formada por tijolo e pedra. No Camposanto de Pisa percebe-se uma cúpula na capela, onde as aberturas são determinadas com arco pleno, com volta perfeita.



Figura 1.5: Duomo Florense



Figura 1.6: Batistério de Pisa.

Em uma fase mais avançada da Idade Média, houve o surgimento da arquitetura gótica, onde ocorreu a transição do arco circular para o arco quebrado, ogival, que colaborou para a redução dos impulsos horizontais dos arcos e das abóbadas, resultando na redução das espessuras dos elementos que os apoiavam. A Itália não teve tanta influência gótica nas suas construções quanto outros países da Europa, como a França. A arquitetura gótica trouxe outras inovações como o arcobotante, em forma de meio arco; o pináculo, ponto mais alto da edificação; e os contrafortes, reforços que permitiram a transmissão de cargas para as fundações.



Figura 1.7: Campanário de Pisa.



## Capítulo 2

# Curvas Planas e Espaciais

Neste capítulo abordaremos conceitos de Curvas Planas e Espaciais, discorrendo sobre os elementos que estruturam essas curvas, tais como vetor tangente, vetor normal, vetor binormal e referencial de Frenet. Baseamos nosso estudo em [23] e [6]. Para melhor entendimento do assunto, o capítulo trará exemplos de [4], [9] e [21].

### 2.1 Curvas no Plano

**Definição 2.1** (Curvas Planas). Seja  $I$  um subconjunto não-vazio de  $\mathbb{R}$ .

- i)* Uma *curva plana* é uma função  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , denotada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Aqui,  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções reais definidas em  $I$ , chamadas *funções coordenadas*, e  $t$  é chamado *parâmetro* da curva.
- ii)* No caso em que as funções  $x$  e  $y$  são contínuas em  $I$ , dizemos que a curva  $\alpha$  é *contínua*.
- iii)* Se  $x$  e  $y$  forem diferenciáveis de ordem  $n$  em  $I$ , dizemos que  $\alpha$  é uma *curva diferenciável de ordem  $n$* .

É usual chamar de curva  $\alpha$  o conjunto imagem  $\alpha(I) = \{\alpha(t); t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ , que é intuitivamente o desenho realizado por  $\alpha(t)$  quando variamos  $t$ . Para evitar confusão, deve-se estar atento ao contexto, de modo a ficar claro quando esta palavra for usada para se referir à função  $\alpha(t)$ , ou ao conjunto  $\alpha(I)$ .

*Exemplo 2.2.* A curva plana  $\alpha(t) = (t, |t|)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é uma curva contínua mas não diferenciável, pois  $y(t)$  não é derivável em  $0 \in \mathbb{R}$ . (Veja Figura 2.1).

*Exemplo 2.3.* Considere a curva plana  $\alpha(t) = (t, t^2)$  com  $t \in \mathbb{R}$ . Esta curva é derivável de ordem  $n$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Ilustramos, na Figura 2.2, o conjunto  $\alpha(\mathbb{R})$ , também chamado de traço da curva.

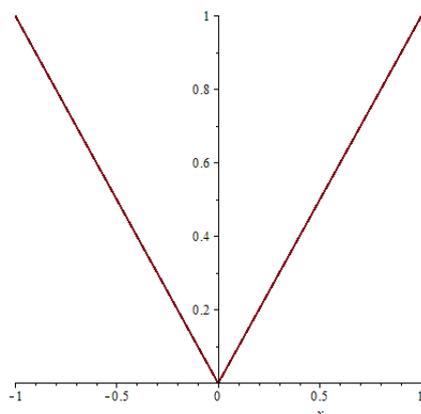


Figura 2.1: Ilustração da curva do Exemplo 2.2.

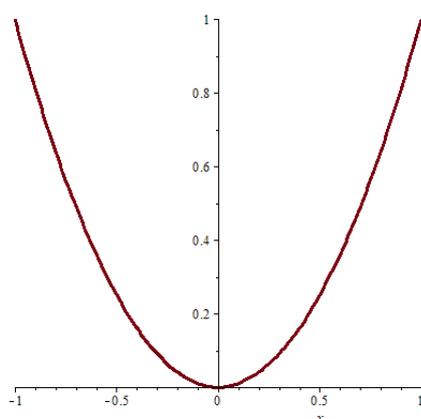


Figura 2.2: Ilustração do traço de uma curva plana do Exemplo 2.3.

No caso em que uma curva plana  $\alpha$  é diferenciável, o vetor cujas coordenadas são  $x'(t)$  e  $y'(t)$  é chamado de *vetor tangente* à curva em  $\alpha(t)$ , denotado por  $\alpha'(t)$ . Assim,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (x'(t), y'(t)) \\ \alpha''(t) &= (x''(t), y''(t)) \\ &\vdots \\ \alpha^{(n)}(t) &= (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)),\end{aligned}$$

onde  $x^{(n)}(t)$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $x$  em  $t$ . Caso  $\alpha$  seja infinitas vezes diferenciável em  $I$ , diremos que a curva  $\alpha$  é *suave*.

*Exemplo 2.4.* As retas em  $\mathbb{R}^2$  são exemplos de curvas planas. De fato, considere  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (x_0 + v_1 \cdot t, y_0 + v_2 \cdot t) \\ &= (x_0, y_0) + (v_1, v_2) \cdot t \\ &= P_0 + t \cdot \vec{v},\end{aligned}$$

sendo  $P_0$  o ponto inicial  $(x_0, y_0)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  o vetor diretor. Note que  $\alpha'(t)$  é exatamente o vetor diretor  $\vec{v}$ .

*Exemplo 2.5.* No caso da curva do Exemplo 2.3, temos que  $\alpha'(t) = (1, 2t)$ ,  $\alpha''(t) = (0, 2)$ , e  $\alpha^{(n)}(t) = (0, 0)$ ,  $\forall n \geq 3$ .

*Observação 2.6.* Além do vetor tangente  $\alpha'(t)$ , o vetor  $\alpha''(t)$  desempenha um papel fundamental na teoria de curvas, sendo chamado de *vetor aceleração* da curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t)$ . A motivação para esses nomes vem da Mecânica: se considerarmos a curva como a trajetória percorrida por uma partícula, onde  $\alpha(t)$  é a posição da partícula no instante  $t$ , então:

$$\alpha'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

é a velocidade instantânea da partícula no instante  $t$ . Como a aceleração mede a variação instantânea da velocidade, temos:

$$\alpha''(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha'(t + \Delta t) - \alpha'(t)}{\Delta t}.$$

É importante ressaltar que, nesta teoria,  $\alpha(t)$  é visto como o ponto em  $\mathbb{R}^2$  de coordenadas  $(x(t), y(t))$ , e  $\alpha'(t)$ ,  $\alpha''(t)$  são vistos como vetores partindo do ponto  $\alpha(t)$ .

*Exemplo 2.7.* Considere uma partícula que percorre uma trajetória elíptica  $\varepsilon : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , segundo a função  $\alpha(t) = (2 \cos t, \sin t)$ . Aqui  $t$  denota o tempo em segundos e  $\alpha(t)$  a posição da partícula no plano cartesiano.

Veja que,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-2 \sin t, \cos t) \text{ e} \\ \alpha''(t) &= (-2 \cos t, -\sin t).\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ \alpha''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

Na figura 2.3, ilustramos a posição da partícula, vetor velocidade e o vetor aceleração no instante  $t = \frac{\pi}{4} s$ .

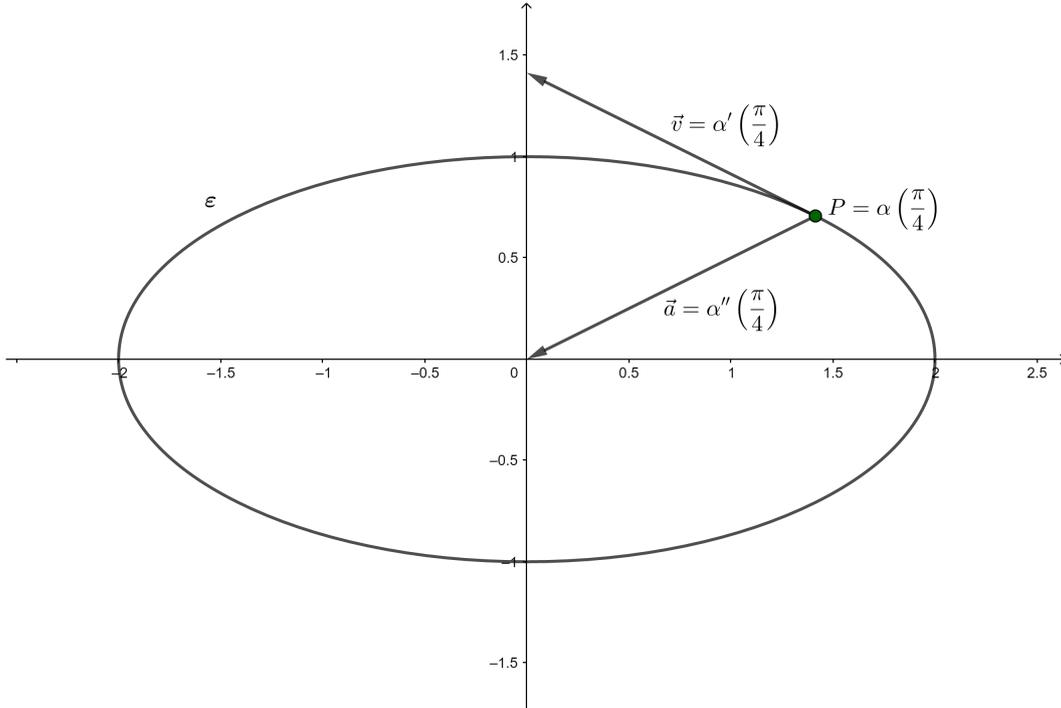


Figura 2.3: Trajetória elipsoidal de uma partícula, com vetor velocidade e vetor aceleração

*Exemplo 2.8.* No caso da reta  $\alpha(t) = P_0 + tv$ , temos que  $\alpha'(t) = \vec{v}$ , ou seja, o vetor velocidade é constante, e portanto  $\alpha''(t) = \vec{0}, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.9** (Curva Regular). Dizemos que uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é regular se  $\alpha'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in I$

*Exemplo 2.10.* Considere a curva dada por  $\alpha(t) = (1, 1), \forall t \in \mathbb{R}$ . Ou seja, a imagem é constituída apenas pelo ponto  $(1, 1)$ . Neste caso,  $\alpha'(t) = (0, 0) = \vec{0}$ . Este é um exemplo de curva que não é regular. As curvas dos Exemplos 2.3 e 2.7 são curvas regulares, e as retas (Exemplo 2.4) são regulares quando o vetor diretor  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

A seguir apresentamos, no formato de definição, o conceito de comprimento de arco. De fato este conceito pode ser deduzido a partir do cálculo integral, sendo uma importante aplicação do estudo de integral definida nos cursos básicos de Cálculo. Aqui apenas apresentamos como definição para não fugir ao objetivo central do texto, mas sua dedução pode ser encontrada em [9], vol. 2, pg. 140.

**Definição 2.11** (Comprimento de Arco). Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, e fixe  $t_0 \in I$ . O comprimento do arco  $\alpha(t_0) \alpha(t)$  é dado por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau, \quad (2.1)$$

onde  $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ .

Assim,  $s(t)$  mede a distância percorrida por uma partícula que percorre a curva de  $\alpha(t_0)$  a  $\alpha(t)$ . Esta fórmula de comprimento de arco é de grande importância nos estudos de curvas. Ilustramos na Figura 2.4 a parametrização de uma curva de  $t_0$  a  $t$  e o arco  $\alpha(t_0)$  a  $\alpha(t)$ , cujo comprimento é dado pela Equação (2.1).

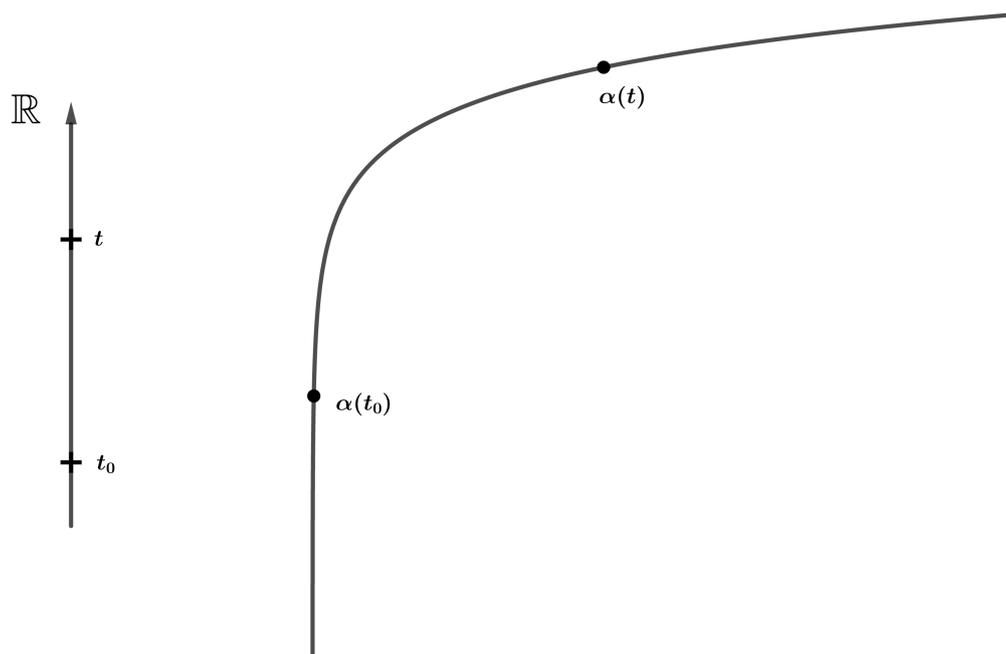


Figura 2.4: À esquerda, a reta real ilustrando a parametrização da curva à direita, de  $\alpha(t_0)$  a  $\alpha(t)$ .

*Exemplo 2.12.* Vamos calcular o comprimento da parábola  $\alpha(t) = (t, t^2)$  com  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Pela Fórmula (2.1),

$$s = \int_0^{1/2} |\alpha'(t)| dt.$$

Como  $\alpha'(t) = (1, 2t)$ , segue que  $|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$ . Assim, devemos calcular:

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Utilizando o método da substituição faremos:  $2t = \tan(u)$  e portanto,  $2dt = \sec^2(u)du$ . Quando  $t = 0$ , temos que  $u = 0$  e quando  $t = \frac{1}{2}$ , temos  $u = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ . Assim, a

integral fica:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt{1+4t^2} dt &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+(2t)^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 u} \cdot \sec^2 u \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec^3 u du \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de recorrência da secante, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec^3 u du &= \left[ \frac{\tan u \cdot \sec u}{4} \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \sec u du \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \left[ \ln |\sec u + \tan u| \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{2} + 1) \\ &= \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right) \end{aligned}$$

Logo o comprimento do arco de parábola do ponto  $(0,0)$  a  $(1/2, 1/4)$  é  $\frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{4}$ .

*Exemplo 2.13.* Considere o círculo de raio  $r$ :  $x^2 + y^2 = r^2$ , o qual pode ser parametrizado por  $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$  (veja Figura 2.5). Com a Fórmula (2.1), podemos construir uma função que mede o comprimento da curva, partindo de  $(a, 0)$ , dependente do parâmetro  $t$ . Assim, o comprimento de arco de  $c(0)$  a  $c(t)$  é:

$$s(t) = \int_0^t |c'(\tau)| d\tau.$$

Como  $c'(\tau) = (-r \sin \tau, r \cos \tau)$ , resulta que  $|c'(\tau)| = \sqrt{r^2 \sin^2 \tau + r^2 \cos^2 \tau} = r$ . Assim,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t r d\tau \\ &= r\tau \Big|_0^t \\ &= rt. \end{aligned}$$

Portanto,  $s(t) = rt$ . Veja que, no caso de uma volta completa ( $t = 2\pi$ ), temos a famosa fórmula do comprimento da circunferência  $C = 2\pi r$ .

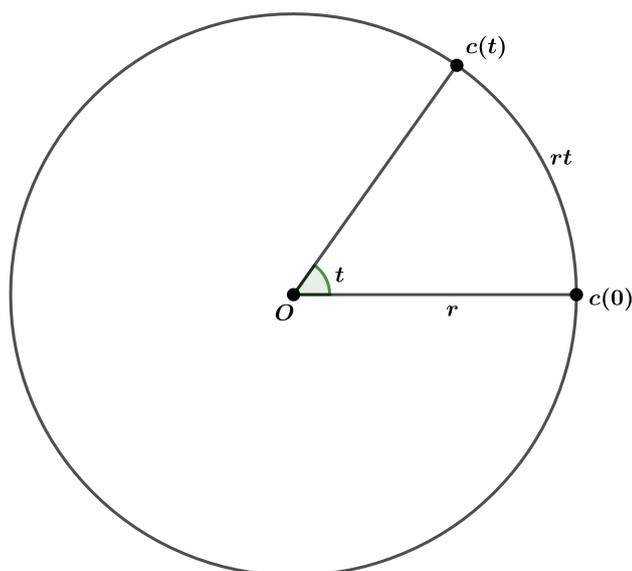


Figura 2.5: Circunferência de raio  $r$  ilustrando o comprimento de arco de  $c(0)$  a  $c(t)$ , conforme Exemplo 2.13.

**Proposição 2.14.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma curva diferenciável regular. Fixe  $t_0 \in I$  e seja  $t \in I$  um ponto arbitrário. Nestas condições,*

$$s(t) = t - t_0 \iff |\alpha'(t)| = 1, \quad \forall t \in I$$

**Demonstração:** Suponha que  $s(t) = t - t_0$ . Então,  $s'(t) = 1$ . Por outro lado, usando a derivação sob o sinal da integral, temos que:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau \\ s'(t) &= |\alpha'(t)| \end{aligned}$$

Consequentemente,  $|\alpha'(t)| = 1, \quad \forall t \in I$ .

Agora, suponha que  $|\alpha'(t)| = 1, \quad \forall t \in I$ . Então o cálculo da integral fica:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t d\tau \\ &= \tau \Big|_{t_0}^t \\ &= t - t_0. \end{aligned}$$

■

*Exemplo 2.15.* Considere o círculo de raio  $r$ :  $x^2 + y^2 = r^2$ . Se, ao invés da parametrização efetuada no Exemplo 2.13, considerarmos

$$\alpha(s) = \left( r \cos \left( \frac{s}{r} \right), r \sin \left( \frac{s}{r} \right) \right),$$

temos que

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)| &= \left| \left( -r \sin \left( \frac{s}{r} \right) \frac{1}{r}, r \cos \left( \frac{s}{r} \right) \frac{1}{r} \right) \right| \\ &= \sqrt{\sin^2 \left( \frac{s}{r} \right) + \cos^2 \left( \frac{s}{r} \right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Assim, o comprimento de arco partindo de  $(r, 0)$  é  $\ell(s) = s$ .

Curvas cujo comprimento de arco se expressam na forma  $s(t) = t - t_0$  recebem o nome especial de *curvas parametrizadas pelo comprimento de arco*, abreviadas por *ppca*. Dada uma curva diferenciável regular, é sempre possível reparametrizá-la pelo comprimento de arco: de fato, expresse a função  $s(t)$  conforme a Equação (2.1). Como  $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ ,  $\forall t$ , segue que a função  $s$  é estritamente crescente e portanto inversível. Basta reparametrizar a curva pela função inversa  $t = t(s)$ . Veja que foi exatamente isto que fizemos no Exemplo 2.15.

Como toda curva regular pode ser parametrizada pelo comprimento de arco, vamos iniciar uma análise agora supondo que a curva  $\alpha(s)$  é ppca. Primeiramente, podemos notar que, se  $\alpha$  é ppca, então  $|\alpha'(s)| = 1$ ,  $\forall s$ . Daí:

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 &\Rightarrow \frac{d}{ds} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \frac{d}{ds} 1 \\ &\Rightarrow \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Logo, para curvas ppca, o vetor velocidade e o vetor aceleração são ortogonais. Com isso podemos falar em uma teoria local de curvas regulares ppca.

**Definição 2.16** (Vetor Tangente e Vetor Normal). Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  uma curva regular ppca. O vetor unitário  $t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$  é chamado *vetor tangente* e o vetor unitário  $n(s) = (-y'(s), x'(s))$  é chamado *vetor normal* à curva  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ . A dupla  $\{t(s), n(s)\}$  forma um referencial ortonormal, chamado *Referencial de Frenet* ao longo da curva  $\alpha$ .

*Exemplo 2.17.* Parametrizando o círculo de raio  $r$ :  $x^2 + y^2 = r^2$  pelo comprimento de

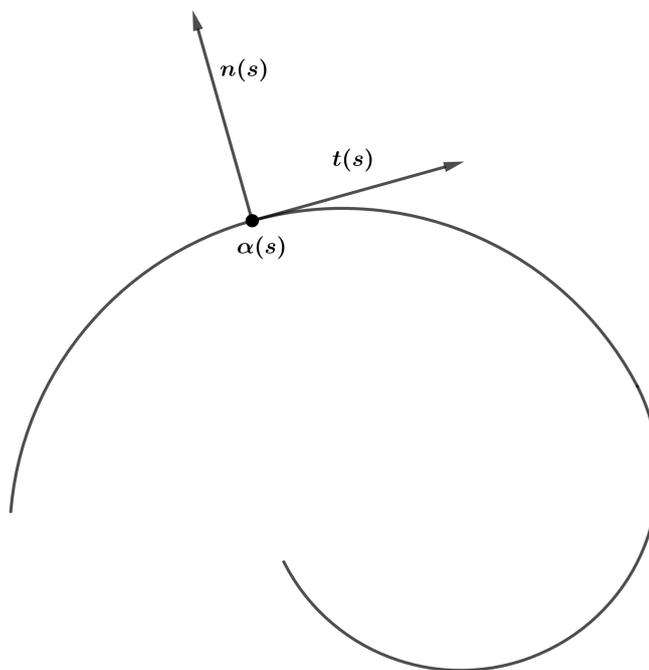


Figura 2.6: Ilustração do Referencial de Frenet ao longo de uma curva plana.

arco, temos, como no Exemplo 2.15:

$$\alpha(s) = \left( r \cos \left( \frac{s}{r} \right), r \sin \left( \frac{s}{r} \right) \right).$$

Assim,

$$t(s) = \left( -\sin \left( \frac{s}{r} \right), \cos \left( \frac{s}{r} \right) \right),$$

e

$$n(s) = \left( -\cos \left( \frac{s}{r} \right), -\sin \left( \frac{s}{r} \right) \right).$$

Note que

$$\alpha''(s) = \left( -\cos \left( \frac{s}{r} \right) \cdot \frac{1}{r}, -\sin \left( \frac{s}{r} \right) \cdot \frac{1}{r} \right)$$

Ou seja,

$$\alpha''(s) = \frac{1}{r} \cdot n(s)$$

De fato, para curvas ppca, como  $\alpha'(s) \perp \alpha''(s)$ , então  $\alpha''(s)$  para  $n(s)$ . Assim, existe um escalar, denotado por  $k(s)$ , tal que  $t'(s) = \alpha''(s) = k(s)n(s)$ .

**Definição 2.18** (Curvatura). Definimos o escalar  $k(s)$ , tal que  $t'(s) = k(s)n(s)$ , como a *curvatura* da curva  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ .

Uma maneira simples de calcular a curvatura de uma curva ppca é fazendo o produto escalar entre  $\alpha''(s)$  e  $n(s)$ . De fato, como  $\{t(s), n(s)\}$  é um referencial ortonormal, todo

vetor  $w(s)$  ao longo da curva se escreve como

$$w(s) = \langle w(s), t(s) \rangle t(s) + \langle w(s), n(s) \rangle n(s).$$

Isto pode ser verificado em qualquer livro de Álgebra linear. Assim:

$$\alpha''(s) = \langle \alpha''(s), t(s) \rangle t(s) + \langle \alpha''(s), n(s) \rangle n(s)$$

Como  $\langle \alpha''(s), t(s) \rangle = 0$ , resulta:

$$\alpha''(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle n(s)$$

Consequentemente,

$$k(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle. \quad (2.2)$$

*Exemplo 2.19.* Voltando ao Exemplo 2.17, verificamos que

$$t(s) = \frac{1}{r} \cdot n(s),$$

e portanto a circunferência de raio  $r$  tem curvatura constante  $k(s) = \frac{1}{r}$ ,  $\forall s$ .

*Exemplo 2.20.* Considere a curva

$$\alpha(t) = (e^t \cdot \cos t, e^t \cdot \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

cujos traço é uma espiral em torno da origem. Esta curva não está parametrizada pelo comprimento de arco, pois:

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{(e^t \cdot \cos t - e^t \cdot \sin t)^2 + (e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t)^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} \cdot [(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2]} \\ &= e^t \cdot \sqrt{\cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t} \\ &= e^t \cdot \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{2} \cdot e^t. \end{aligned}$$

Ou seja,  $|\alpha'(t)| \neq 1$ , em geral. Vamos então usar a Equação (2.1) para encontrar um parâmetro por comprimento de arco. Calculando a integral indefinida, temos:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int |\alpha'(t)| \, dt \\ &= \int \sqrt{2} \cdot e^t \, dt \\ &= \sqrt{2} \cdot e^t + K \end{aligned}$$

Tomando  $K = 0$ , temos

$$s(t) = \sqrt{2} \cdot e^t \iff e^t = \frac{s}{\sqrt{2}} \iff t(s) = \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

Assim, uma parametrização por comprimento de arco é dada por:

$$\alpha(s) = \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), \frac{s}{\sqrt{2}} \sin \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) \right)$$

Daí,

$$\begin{aligned} t(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) - \sin \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) + \sin \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \\ n(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) - \sin \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) - \sin \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \\ \alpha''(s) &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot s} \left( -\sin \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) - \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), -\sin \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) + \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Fazendo  $\langle \alpha''(s), n(s) \rangle$ , obtemos  $k(s) = \frac{1}{s}$ .

Mas podemos também falar em curvatura para curvas não-ppca. Neste sentido, a Proposição 2.21 estabelece uma fórmula para a curvatura no caso em que a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Proposição 2.21** ([23], pg. 46). *Seja  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ ,  $r \in I$  uma curva plana regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Então:*

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{(x', y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ n(r) &= \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ k(r) &= \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

*Exemplo 2.22.* Considere a elipse  $\alpha(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ , com  $a \neq b$ . Neste caso:

$$\begin{aligned} t(\theta) &= \frac{(-a \sin \theta, b \cos \theta)}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ n(\theta) &= \frac{(-b \cos \theta, -a \sin \theta)}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ k(r) &= \frac{ab}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

Para encerrar a sessão, vamos exibir as *Equações de Frenet* para curvas planas ppca, que expressa os vetores  $t'$  e  $n'$  em termos do referencial ortonormal  $\{t, n\}$  ao longo da

curva. De fato, como o referencial é ortonormal:

$$\begin{aligned}t'(s) &= \langle t'(s), t(s) \rangle \cdot t(s) + \langle t'(s), n(s) \rangle \cdot n(s) \\n'(s) &= \langle n'(s), t(s) \rangle \cdot t(s) + \langle n'(s), n(s) \rangle \cdot n(s)\end{aligned}$$

Já verificamos que  $\langle t'(s), t(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ , visto que a curva é ppca. De modo análogo,  $\langle n'(s), n(s) \rangle = 0$ .

Como  $\{t(s), n(s)\}$  é referencial ortonormal, derivando ambos os lados temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \langle t(s), n(s) \rangle = \frac{d}{ds} 0 &\implies \langle t'(s), n(s) \rangle + \langle t(s), n'(s) \rangle = 0 \\&\implies \langle t(s), n'(s) \rangle = -\langle t'(s), n(s) \rangle \\&\implies \langle n'(s), t(s) \rangle = -k(s)\end{aligned}$$

Assim, temos o sistema linear:

$$\begin{aligned}t'(s) &= k(s) \cdot n(s) \\n'(s) &= -k(s) \cdot t(s)\end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

## 2.2 Curvas no Espaço

Nesta seção, falaremos de curvas em  $\mathbb{R}^3$ . Os conceitos envolvidos nesta seção são muito similares aos conceitos da seção anterior. De fato, diferenciabilidade, continuidade, velocidade, aceleração, comprimento de arco são definidos de forma análoga, com os devidos ajustes na dimensão. O que se altera aqui é que, curvas espaciais, além de terem curvatura, têm também torção, e ao longo da curva temos um referencial de três vetores ortonormais: o tangente, o normal, e o binormal.

**Definição 2.23** (Curvas Espaciais). Uma *curva espacial* é uma função  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , denotada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , onde  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são funções reais definidas em  $I$ , chamadas *funções coordenadas*, e  $t$  é chamado *parâmetro*. Quando  $x$ ,  $y$  e  $z$  são contínuas em  $I$ , dizemos que a curva  $\alpha$  é *contínua*. Se  $x$ ,  $y$  e  $z$  forem diferenciáveis de ordem  $n$  em  $I$ , dizemos que  $\alpha$  é uma *curva diferenciável de ordem  $n$* .

*Exemplo 2.24.* As hélices são exemplos de curvas espaciais. Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$\alpha(t) = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t, c \cdot t)$$

com  $a, b, c$  constantes reais. Aplicações deste tipo constituem exemplos de curvas espaciais diferenciáveis. No caso em que  $a = b = c = 1$ , temos a hélice ilustrada na Figura 2.7.

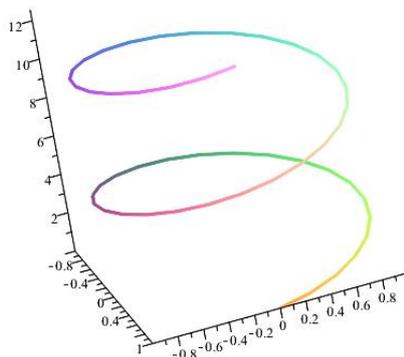


Figura 2.7: Ilustração da hélice do Exemplo 2.24.

De modo análogo ao que fizemos na Seção 2.23, quando a curva for diferenciável, temos o vetor velocidade:

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

e o vetor aceleração:

$$\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

*Exemplo 2.25.* Considerando a hélice do Exemplo 2.24, temos que

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t, c \cdot t) \\ \alpha'(t) &= (-a \cdot \sin t, b \cdot \cos t, c) \\ \alpha''(t) &= (-a \cdot \cos t, -b \cdot \sin t, 0).\end{aligned}$$

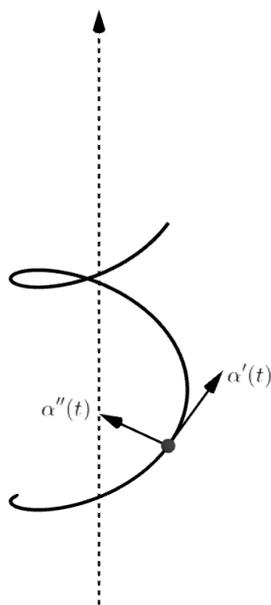


Figura 2.8: Ilustração do vetor velocidade e vetor aceleração na curva do Exemplo 2.25.

A curva é regular quando  $|\alpha'(t)| \neq 0$ ,  $\forall t \in I$  e, assim como em curvas planas, no espaço há um conceito para comprimento de arco, o qual não é muito diferente do que é feito na equação 2.1:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau.$$

Entretanto, a diferença é que agora  $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ .

A sequência óbvia após tratarmos de comprimento de arco é discorrer sobre parametrização por comprimento de arco. Aqui também vale a Proposição 2.14, considerando o devido conceito de módulo em  $\mathbb{R}^3$ .

*Exemplo 2.26.* Vamos parametrizar pelo comprimento de arco a hélice:

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Sabemos que o vetor velocidade é dado por:

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, \cos t, 1),$$

cujos módulo é:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2}.$$

Assim, considerando como ponto inicial  $t_0 = 0$ , temos que:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Disso, temos a relação  $t = \frac{\sqrt{2}}{2}s$ , e assim, a curva:

$$\alpha(s) = \left( \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right)$$

está parametrizada pelo comprimento de arco.

Aproveitando os conhecimentos apresentados até aqui, trataremos de um referencial ortonormal ao longo de uma curva regular ppca de  $\mathbb{R}^3$ , conhecido como *Triedro de Frenet*.

No caso de uma curva ppca, o vetor tangente é um vetor unitário, e é ortogonal ao vetor aceleração. Definimos o *vetor tangente*  $t(s)$  e o *vetor normal*  $n(s)$  por:

$$\begin{aligned} t(s) &= \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)) \\ n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}. \end{aligned}$$

**Definição 2.27.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva espacial regular parametrizada pelo comprimento de arco. A *Curvatura* de  $\alpha$  em  $s \in I$ , é o número real

$$k(s) = |\alpha''(s)|.$$

Do ponto de vista geométrico, a curvatura expressa a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Como  $t(s)$  e  $n(s)$  são vetores unitários, com  $t(s) \perp n(s)$ , existe um vetor ortogonal a  $n(s)$  e  $t(s)$ , simultaneamente. Este vetor é chamado *vetor binormal*, denotado por  $b(s)$ . Este é determinado pela relação:

$$b(s) = t(s) \wedge n(s).$$

Com isso, ao longo da curva, temos um referencial ortonormal  $\{t(s), n(s), b(s)\}$ , chamado de *Triedro de Frenet*. Valem as relações:

$$\begin{aligned} t'(s) &= \alpha''(s) \\ &= k(s) \cdot n(s) \end{aligned}$$

Daí

$$t'(s) = k(s) \cdot n(s) \tag{2.4}$$

Como o referencial  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  é ortonormal, temos que:

$$n'(s) = \langle n'(s), t(s) \rangle \cdot t(s) + \langle n'(s), n(s) \rangle \cdot n(s) + \langle n'(s), b(s) \rangle \cdot b(s)$$

Porém, como  $t(s) \perp n(s)$ , segue:

$$\begin{aligned} \langle t(s), n(s) \rangle = 0 &\implies \frac{d}{ds} \langle t(s), n(s) \rangle = \frac{d}{ds} 0 \\ &\implies \langle t'(s), n(s) \rangle + \langle t(s), n'(s) \rangle = 0 \\ &\implies \langle n'(s), t(s) \rangle = -\langle t'(s), n(s) \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle t'(s), n(s) \rangle &= \langle \alpha''(s), n(s) \rangle \\ &= \langle k(s)n(s), n(s) \rangle \\ &= k(s), \end{aligned}$$

segue que

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = -k(s).$$

Como  $\langle n(s), n(s) \rangle = 1$ , resulta que  $\langle n'(s), n(s) \rangle = 0$ . Definimos:

**Definição 2.28** (Torção). O número  $\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$  é chamado *torção* da curva em  $s$ .

Com isto, temos que:

$$n'(s) = -k(s) \cdot t(s) + \tau(s) \cdot b(s). \quad (2.5)$$

Agora veja que:

$$b'(s) = \langle b'(s), t(s) \rangle \cdot t(s) + \langle b'(s), n(s) \rangle \cdot n(s) + \langle b'(s), b(s) \rangle \cdot b(s).$$

Evidentemente  $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$ . Como  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ , segue que

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s).$$

Como  $t'(s) \parallel n(s)$ , temos  $t'(s) \wedge n(s) = 0$ , daí:

$$\langle b'(s), t(s) \rangle = \langle t(s) \wedge n'(s), t(s) \rangle = 0,$$

pois  $(t(s) \wedge n'(s)) \perp t(s)$ . Por fim,

$$\langle b'(s), n(s) \rangle = -\langle n'(s), b(s) \rangle = -\tau(s).$$

Com isso,

$$b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s) \quad (2.6)$$

Das Equações (2.4), (2.5) e (2.6), temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s) \cdot n(s) \\ n'(s) = -k(s) \cdot t(s) + \tau(s) \cdot b(s) \\ b'(s) = -\tau(s) \cdot b(s) \end{cases} \quad (2.7)$$

Matricialmente, escrevemos

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

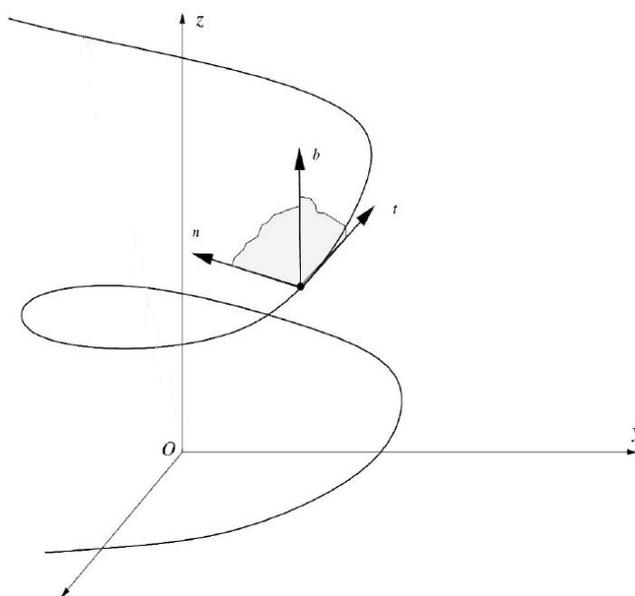


Figura 2.9: Ilustração do Triângulo de Frenet ao longo da curva.

*Exemplo 2.29.* Vamos calcular o triângulo de frenet, bem como curvatura e torção ao longo da hélice ppca:

$$\alpha(s) = \left( \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right).$$

Temos que, o vetor tangente é:

$$t(s) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

e o vetor aceleração:

$$\alpha''(s) = \left( -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), 0 \right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} k(s) &= |\alpha''(s)| \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$n(s) = \left( -\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), 0 \right).$$

Segue que o vetor binormal é:

$$\begin{aligned} b(s) &= t(s) \wedge n(s) \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Por fim, calculamos a torção. Da Definição 2.28, temos a fórmula  $\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$ .

Calculando  $n'(s)$  obtemos:

$$n'(s) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), 0 \right)$$

de modo que, efetuando o produto interno de  $n'(s)$  com  $b(s)$ , resulta

$$\tau(s) = \frac{1}{2}.$$

Temos, portanto, o sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}.$$

## Capítulo 3

# Superfícies

Este capítulo procura abordar, de forma bastante direta e sucinta, o estudo de superfícies. Para o estudo profundo, com todo o rigor e demonstrações necessárias, uma boa indicação é o clássico [6]. Como o interesse é partir para a compreensão das curvaturas principais e da equação diferencial das linhas de curvatura (objeto deste minicurso), detalhes da teoria não são tratados e certos teoremas são enunciados sem demonstrações, mas com a devida indicação de onde encontrá-las.

Procura-se realizar muitos exemplos, apresentando principalmente os cálculos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais para superfícies conhecidas. Consideramos extramente importante que o estudante realize estes cálculos, principalmente com lápis e papel em um primeiro momento, a fim de que a aprendizagem se consolide. Visualizar com o auxílio de um software computacional estas superfícies pode ajudar muito na compreensão.

Este capítulo é finalizado com a resolução computacional da equação diferencial das linhas de curvatura para algumas superfícies, bem como o gráfico da solução, e um pequeno escrito sobre superfícies regradas.

### 3.1 Superfície Parametrizada Regular

Primordialmente, é necessário entender no que consiste uma superfície regular. Intuitivamente, entendemos uma superfície como tomando pedaços do plano, deformando e rearranjando-os de maneira que não formem pontas ou arestas, de modo exista um plano tangente à superfície em cada ponto.

**Definição 3.1** ([23], pg. 109). Uma *superfície parametrizada regular*, ou simplesmente *superfície* é uma aplicação  $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo  $\mathcal{U}$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$  tal que:

- a)  $X$  é diferenciável de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
- b) Para todo  $q = (u, v) \in \mathcal{U}$ , a diferencial de  $X$  em  $q$ ,  $DX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora;

Na Definição 3.1,  $u$  e  $v$  são chamados de parâmetros da superfície e a imagem  $X(\mathcal{U})$  de traço da superfície. Uma superfície parametrizada deixa de ser regular caso apresente pontos de singularidades, isto é, pontos  $q$  tais que  $DX_q$  é não injetora.

Consideramos, portanto, aplicações do tipo:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de duas variáveis reais, de maneira que as componentes  $u$  e  $v$  variam em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

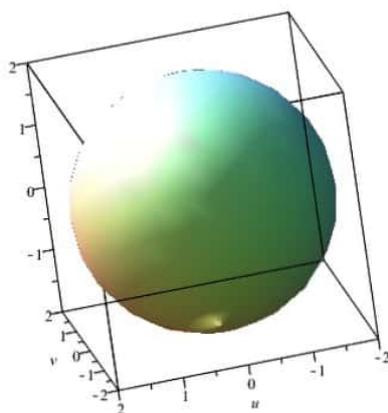
Para verificar se uma superfície parametrizada é regular no ponto  $(u_0, v_0)$  basta determinar uma das seguintes condições equivalentes:

- i)* os vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  devem ser linearmente independentes;
- ii)* e o produto vetorial entre eles deve ser diferente de zero.

*Exemplo 3.2.* Seja uma superfície parametrizada por

$$X(u, v) = (a \sin v \cos u, a \sin v \sin u, a \cos v),$$

onde  $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times (0, \pi) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < v < \pi\}$ . Podemos demonstrar que essa superfície é regular pela Definição 3.1 (Veja Figura 3.1).



Scanned by CamScanner

Figura 3.1: Ilustração da curva do Exemplo 3.1.

Primeiramente, deve-se determinar as derivadas com relação a  $u$  e com relação a  $v$ . Assim, temos:

$$X_u = (-a \sin v \sin u, a \sin v \cos u, 0)$$

$$X_v = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, -a \sin v).$$

Conseqüentemente:

$$X_u \wedge X_v = (-a^2 \sin^2 v \cos u, -a^2 \sin^2 v \sin u, -a^2 \sin v \cdot \cos v)$$

o qual nunca se anula em  $\mathcal{U}$ , pois  $|X_u \wedge X_v| = a^2 \cdot \sin v$ . Apresentamos, neste exemplo, uma parametrização regular da esfera de raio  $a$ .

### 3.2 Plano Tangente e Vetor Normal

**Definição 3.3.** Seja  $X(u, v)$  uma parametrização da superfície regular  $M$ , dizemos que um vetor  $v$  de  $\mathbb{R}^3$  é um *vetor tangente* à superfície em  $p = X(u_0, v_0)$  se existir uma curva  $\gamma$  contida em  $X$ , com  $\gamma(t_0) = p$  e  $\gamma'(t_0) = v$ . Veja Figura (3.2).

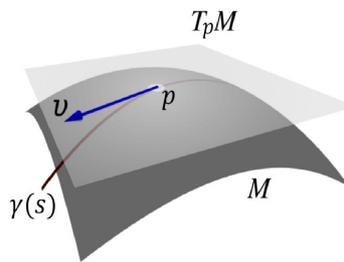


Figura 3.2: Representação Vetor Tangente à superfície

O conjunto de vetores tangentes a  $M$  em um ponto  $p = X(u_0, v_0)$  coincide com o subespaço vetorial em  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$ . Como estes vetores são linearmente independentes, o espaço tangente a  $S$  tem dimensão 2. Assim, temos um plano chamado *plano tangente*. Denotamos o plano tangente à superfície em  $p$  por  $T_pM$ .

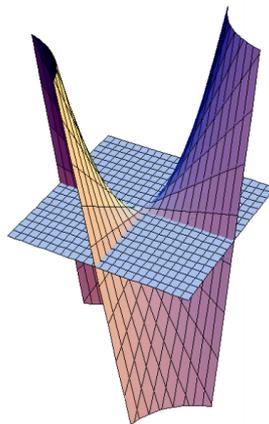


Figura 3.3: Plano Tangente ao parabolóide hiperbólico  $z = xy$ , na origem  $(0, 0, 0)$

Em cada ponto da superfície parametrizada regular, fica definido o *vetor normal*

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} \quad (3.1)$$

onde por abreviação omitimos a coordenada  $(u, v)$ .

### 3.3 Primeira e Segunda Formas Fundamentais

A Primeira Forma Fundamental da superfície  $M$  no ponto  $p$  é uma aplicação:

$$\begin{aligned} I_p : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

Seja  $w \in T_p M$ . Então  $w = \gamma'(t)$ , onde  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ . Assim, pela regra da cadeia:

$$w = u'(t) \cdot X_u + v'(t) \cdot X_v.$$

Fazendo  $a = u'(t)$  e  $b = v'(t)$ , podemos escrever  $w = a \cdot X_u + b \cdot X_v$  e assim:

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle \\ I_p(w) &= a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

Fazendo:

$$\langle X_u, X_u \rangle = E; \langle X_u, X_v \rangle = F; \langle X_v, X_v \rangle = G.$$

Temos:

$$I_p(w) = a^2 E + 2abF + b^2 G.$$

Diremos que uma superfície regular é *orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície; a escolha de um tal campo  $N$  é chamada uma *orientação* de  $M$ .

**Definição 3.4.** Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

A aplicação  $N : M \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de  $M$ .

A Segunda Forma Quadrática tem relação aos estudos de engenheiros civis quanto a relação da construção de estruturas em cascas e a distribuição de esforços porque é relacionada ao estudo de curvaturas de curvas da superfície.

Seja  $p = X(u_0, v_0)$ . Dado  $w \in T_p M$ , tome  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tal que,  $\alpha(0) =$

$p, \alpha'(0) = w$ . Tem-se:

$$\begin{aligned} II_p : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle \alpha''(0), N(u_0, v_0) \rangle \end{aligned}$$

Assim, sendo:

$$\alpha'(t) = u'(t) \cdot X_u(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot X_v(u(t), v(t))$$

pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u'(t)[X_{uu}(u(t), v(t))u'(t) + X_{uv}(u(t), v(t))v'(t)] + u''(t)X_u(u(t), v(t)) \\ &+ v'(t)[X_{uv}(u(t), v(t))u'(t) + X_{vv}(u(t), v(t))v'(t)] + v''(t)X_v(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

Denotando  $u'(0) = a$ ,  $v'(0) = b$  e lembrando que  $X_u \perp N$  e  $X_v \perp N$ , efetuamos o produto interno e obtemos:

$$\begin{aligned} II_p(w) &= \langle \alpha''(0), N(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle (u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle (u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle (u_0, v_0) \end{aligned}$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, N \rangle &= e \\ \langle X_{uv}, N \rangle &= f \\ \langle X_{vv}, N \rangle &= g \end{aligned}$$

Tem-se a equação que define a Segunda Forma Quadrática:

$$II_p(w) = a^2 \cdot e + 2 \cdot a \cdot b \cdot f + b^2 \cdot g$$

$e, f, g$  são denominados os coeficientes da segunda forma fundamental.

*Exemplo 3.5.* Considere o helicóide parametrizado por:

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

Efetuamos os cálculos e verificamos que:

$$\begin{aligned} X_u &= (\cos v, \sin v, 0) \\ X_v &= (-u \sin v, u \cos v, 1). \end{aligned}$$

Assim,

$$X_u \wedge X_v = (\sin v, -\cos v, u)$$

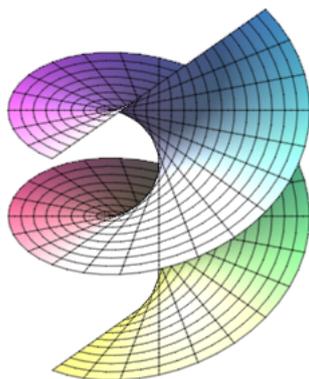


Figura 3.4: Ilustração do Helicóide

e então

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{1 + u^2},$$

o qual nunca se anula. Logo, o helicóide é uma superfície parametrizada regular. Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle \\ &= 1 + u^2 \end{aligned}$$

Assim, a primeira forma fundamental calculada em um vetor tangente  $w = (a, b)$  à superfície no ponto  $p = X(u, v)$  é:

$$I_p(w) = a^2 + (1 + u^2) \cdot b^2.$$

Calculemos agora os coeficientes da segunda forma fundamental. Para tal, calculamos primeiramente o vetor normal unitário:

$$N = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1 + u^2}}$$

E computamos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, 0, 0) \\ X_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \end{aligned}$$

Efetuando o produto interno, temos:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle X_{uv}, N \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a segunda forma fundamental calculada em um vetor tangente  $w = (a, b)$  à superfície no ponto  $p = X(u, v)$  é:

$$II_p(w) = -\frac{2}{\sqrt{1+u^2}} \cdot a \cdot b.$$

### 3.4 Curvatura Normal e Curvaturas Principais

**Definição 3.6.** Seja  $X(u, v)$  uma parametrização da superfície regular  $M$  e  $p = X(u_0, v_0) \in M$ . A função curvatura normal em  $p$  é uma aplicação  $k_n : T_p M - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que, para cada vetor  $w \in T_p M$  não nulo, associa o número:

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}$$

ou seja,

$$k_n(w) = \frac{a^2 \cdot e + 2ab \cdot f + b^2 \cdot g}{a^2 \cdot E + 2ab \cdot F + b^2 \cdot G} \quad (3.2)$$

Veja que, como a aplicação primeira forma e segunda forma são quadráticas, temos:

$$\begin{aligned}
 k_n(\lambda w) &= \frac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)} \\
 &= \frac{(\lambda a)^2 \cdot e + 2(\lambda a)(\lambda b) \cdot f + (\lambda b)^2 \cdot g}{(\lambda a)^2 \cdot E + 2(\lambda a)(\lambda b) \cdot F + (\lambda b)^2 \cdot G} \\
 &= \frac{\lambda^2 II_p(w)}{\lambda^2 I_p(w)} \\
 &= \frac{II_p(w)}{I_p(w)} \\
 &= k_n(w)
 \end{aligned}$$

Assim, podemos falar em curvatura normal na direção de  $w$ , e mais ainda, podemos considerar a aplicação curvatura normal restrita ao círculo unitário  $S_p^1$  de  $T_p M$ .

Dado um vetor unitário  $w$  em  $T_p M$ , seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva na superfície de modo que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ . Como curva espacial, esta curva é ppca e possui vetor aceleração  $\alpha''(0)$ , vetor normal  $n(0)$  e curvatura  $k$  de modo que  $\alpha''(0) = k(0) \cdot n(0)$ . Já do ponto de vista como uma curva dentro da superfície, podemos considerar o vetor normal à superfície restrito à curva  $\alpha$ , de modo que  $N(p) = (N \circ \alpha)(0)$ . Veja que, como  $I_p(w) = 1$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 k_n(w) &= II_p(w) \\
 &= \langle \alpha''(0), N(p) \rangle \\
 &= \langle k(0) \cdot n(0), (N \circ \alpha)(0) \rangle \\
 &= k(0) \cdot \langle n(0), N(p) \rangle,
 \end{aligned}$$

Com isso, obtemos uma relação importante entre a curvatura normal e a curvatura da curva. Omitindo o número 0 para simplificação, e com cautela para evitar confusão, temos:

$$k_n = k \cdot \cos \theta$$

onde  $\theta = \angle(n, N)$ , ou seja, o ângulo entre o vetor normal à curva como curva espacial e o vetor normal à superfície.

**Proposição 3.7** ([6], pg.167). *Todas as curvas de uma superfície  $M$  que têm, em um ponto  $p \in M$ , a mesma reta tangente têm, nesse ponto, a mesma curvatura normal.*

A função curvatura normal, restrita à esfera unitária, é uma função diferenciável (e consequentemente contínua) definida em um conjunto compacto. Logo admite máximo e mínimo. Esses máximos e mínimos são chamados de *curvaturas principais*, e as direções em que eles ocorrem são chamadas de *direções principais*. Estas são as direções em que a superfície se curva extremamente em determinado ponto. Enunciaremos uma proposição,

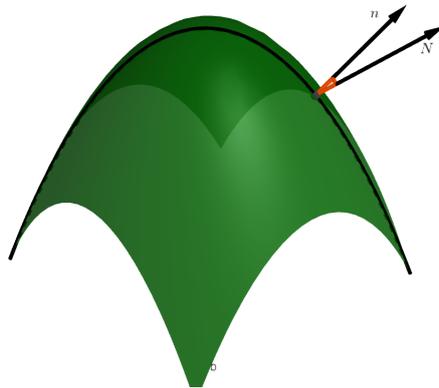


Figura 3.5: Ilustração do ângulo formado entre o vetor normal à curva e o vetor normal à superfície

que garante que, além de existirem essas direções, elas são ortogonais.

**Proposição 3.8** ([23], pg. 161). *Sejam  $X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e  $k_n$  a função curvatura normal de  $M$  em  $p = (u_0, v_0)$ . Então, existem vetores unitários e ortogonais  $w_1, w_2 \in T_p M$  tais que,  $k_1 = k_n(w_1)$  e  $k_2 = k_n(w_2)$  são os valores mínimo e máximo da função  $k_n$ . Além disso  $w_1 \perp w_2$ .*

**Demonstração:** Considere a função:

$$k_n(w) = \frac{a^2 \cdot e + 2ab \cdot f + b^2 \cdot g}{a^2 \cdot E + 2ab \cdot F + b^2 \cdot G}$$

Caso ela seja constante em  $T_p M - \{(0, 0)\}$ , quaisquer pares de vetores ortogonais satisfazem a condição da proposição. Suponha que não seja constante.

Esta função é diferenciável e, restrita ao círculo unitário de  $T_p M$ , pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, admite valor máximo e valor mínimo. Seja  $w_1 = (a_1, b_1)$  e  $w_2 = (a_2, b_2)$  vetores de  $T_p M$  tais que

$$k_n(w_1) = k_1 \quad ; \quad k_n(w_2) = k_2$$

os valores mínimo e máximo, respectivamente, desta função. Assim:

$$k_1 = \frac{a_1^2 \cdot e + 2a_1 b_1 \cdot f + b_1^2 \cdot g}{a_1^2 \cdot E + 2a_1 b_1 \cdot F + b_1^2 \cdot G}$$

o que implica:

$$a_1^2(e - Ek_1) + 2a_1 b_1(f - Fk_1) + b_1^2(g - Gk_1) = 0$$

Como  $w_1$  é ponto de ótimo da função, ao derivar com relação a  $a$ , obtemos, em  $(a_1, b_1)$ :

$$a_1(e - Ek_1) + b_1(f - Fk_1) = 0 \quad (3.3)$$

e, derivando com relação a  $b$ , obtemos no ponto  $(a_1, b_1)$ :

$$a_1(f - Fk_1) + b_1(g - Gk_1) = 0. \quad (3.4)$$

De modo análogo, no ponto ótimo  $w_2 = (a_2, b_2)$ , temos

$$a_2(e - Ek_2) + b_2(f - Fk_2) = 0 \quad (3.5)$$

e

$$a_2(f - Fk_2) + b_2(g - Gk_2) = 0. \quad (3.6)$$

Supondo  $a_1, a_2, b_1, b_2$  todos não-nulos, fazemos a Equação (3.5) multiplicada por  $a_1$  menos a Equação (3.3) multiplicada por  $a_2$  e obtemos:

$$a_1a_2E(k_1 - k_2) + a_1b_2(f - Fk_2) - a_2b_1(f - Fk_1) = 0 \quad (3.7)$$

Agora, fazemos a Equação (3.6) multiplicada por  $b_1$  menos a Equação (3.4) multiplicada por  $b_2$  e obtemos:

$$b_1b_2G(k_1 - k_2) + a_2b_1(f - Fk_2) - a_1b_2(f - Fk_1) = 0 \quad (3.8)$$

Somamos, então, Equação (3.7) com Equação (3.8), e temos:

$$(k_1 - k_2)(a_1a_2E + a_1b_2F + a_2b_1F + b_1b_2G) = 0 \quad (3.9)$$

Como  $k_1 \neq k_2$ , segue que:

$$a_1a_2E + a_1b_2F + a_2b_1F + b_1b_2G = 0$$

que se trata do produto escalar  $\langle w_1, w_2 \rangle$ . O caso em que algum  $a_i$  ou algum  $b_i$  for igual a zero segue de modo análogo. Caso  $w_1$  ou  $w_2$  não sejam vetores unitários, basta normalizá-los e obtemos os vetores unitários desejados. ■

Há um tipo especial de curva ao longo de uma superfície, que são aquelas curvas que, em cada ponto, são tangentes a uma direção principal. Estas curvas recebem o nome de *linhas de curvatura*, conforme enuncia a próxima definição.

**Definição 3.9.** Se uma curva regular e conexa  $C$  em  $M$  é tal que para todo  $p \in C$  a reta tangente a  $C$  é uma direção principal em  $p$ , então dizemos que  $C$  é uma linha de curvatura de  $M$ .

Em [6], pg. 171, é enunciada uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular  $C$  em  $M$  seja uma linha de curvatura de  $M$ . Esta condição, chamada de *Teorema de Olinde-Rodriguez*, é que:

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$$

Para qualquer parametrização  $\alpha(t)$  de  $C$ , onde  $N(t) = N \circ \alpha(t)$  e  $\lambda(t)$  é uma função diferenciável de  $t$ . Nesse caso  $-\lambda(t)$  é a curvatura (principal) segundo  $\alpha'(t)$ .

**Definição 3.10.** Definimos a *Curvatura Gaussiana* da superfície  $M$  em  $p$  como o produto das curvaturas principais em  $p$

$$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$$

e a *Curvatura Média* de  $M$  em  $p$  como a média aritmética entre as curvaturas principais.

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Em termos simples, podemos escrever

$$K = k_1 \cdot k_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

e observamos que  $k_1$  e  $k_2$  são raízes da equação:

$$x^2 - 2Hx + K = 0.$$

**Proposição 3.11** ([23], pg. 166). *Seja  $X(u, v)$  uma parametrização da superfície regular  $M$  e  $p \in M$ . Então*

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}$$

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

*Exemplo 3.12.* Considere uma casca cilíndrica, parametrizada por:

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Efetuamos os cálculos e verificamos que:

$$X_u = (-\cos u, \sin u, 0)$$

$$X_v = (0, 0, 1).$$

Assim,

$$X_u \wedge X_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

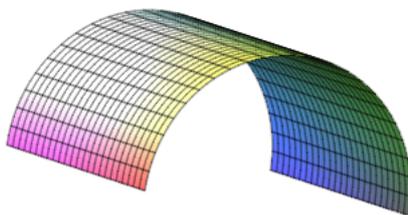


Figura 3.6: Ilustração de uma casca cilíndrica

e então

$$|X_u \wedge X_v| = 1,$$

o qual nunca se anula. Logo, a casca cilíndrica é uma superfície parametrizada regular. Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

Calculemos agora os coeficientes da segunda forma fundamental. Para tal, calculamos primeiramente o vetor normal unitário:

$$N = (\cos u, \sin u, 0)$$

E computamos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-\cos u, -\sin u, 0) \\ X_{uv} &= (0, 0, 0) \\ X_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Efetuando o produto interno, temos:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle X_{uv}, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$K = 0$$

e

$$H = -\frac{1}{2}$$

. Logo, trata-se de uma casca com curvatura Gaussiana nula.

*Exemplo 3.13.* Considere uma casca em formato de parabolóide hiperbólico, parametrizada por:

$$X(u, v) = (u, v, u \cdot v).$$

Efetuamos os cálculos e verificamos que:

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, v) \\ X_v &= (0, 1, u). \end{aligned}$$

Assim,

$$X_u \wedge X_v = (-v, -u, 1)$$

e então

$$|X_u \wedge X_v| = \sqrt{1 + u^2 + v^2},$$

o qual nunca se anula. Logo, a casca cilíndrica é uma superfície parametrizada regular.

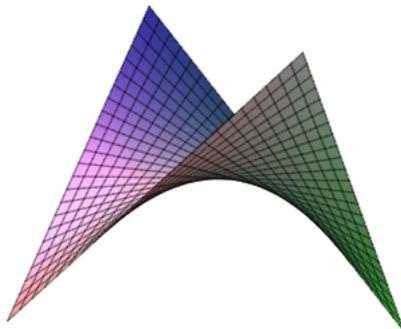


Figura 3.7: Ilustração de um parabolóide hiperbólico

Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= 1 + v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= uv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle \\ &= 1 + u^2 \end{aligned}$$

Calculemos agora os coeficientes da segunda forma fundamental. Para tal, calculamos primeiramente o vetor normal unitário:

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \cdot (-v, -u, 1)$$

E computamos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, 0, 0) \\ X_{uv} &= (0, 0, 1) \\ X_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Efetuando o produto interno, temos:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle X_{uv}, N \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$K = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

e

$$H = -\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

. Logo, trata-se de uma casca com curvatura Gaussiana negativa.

*Exemplo 3.14.* Considere uma casca em formato elipsoidal, parametrizada por:

$$X(u, v) = (2 \sin v \cos u, 2 \sin v \sin u, \cos v).$$

Efetuamos os cálculos e verificamos que:

$$\begin{aligned} X_u &= (-2 \sin v \sin u, 2 \sin v \cos u, 0) \\ X_v &= (2 \cos v \cos u, 2 \cos v \sin u, -\sin v). \end{aligned}$$

Assim,

$$X_u \wedge X_v = -(2 \sin^2 v \cos u, 2 \sin^2 v \sin u, 2 \sin(2v))$$

e então

$$|X_u \wedge X_v| = 2\sqrt{(1+3 \cdot \cos^2 v) \cdot \sin^2 v},$$

o qual nunca se anula somente nos polos, que são pontos isolados. Logo, a casca cilíndrica é uma superfície parametrizada regular. Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= 4 \sin^2 v \end{aligned}$$

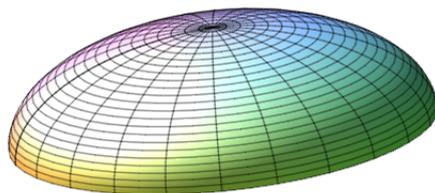


Figura 3.8: Ilustração de uma casca elipsoidal

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle \\ &= 3 \cos^2 v + 1 \end{aligned}$$

Calculemos agora os coeficientes da segunda forma fundamental. Para tal, calculamos primeiramente o vetor normal unitário:

$$N = -\frac{1}{\sqrt{(1 + 3 \cdot \cos^2 v) \cdot \sin^2 v}} \cdot (\sin^2 v \cos u, \sin^2 v \sin u, \sin(2v))$$

E computamos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-2 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, 0) \\ X_{uv} &= (-2 \sin u \cos v, 2 \cos u \cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-2 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, -\cos v) \end{aligned}$$

Efetuando o produto interno, temos:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ &= 2 \frac{\sin^2 v}{\sqrt{3 \cos^2 v + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle X_{uv}, N \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= \frac{2 \sin v}{\sqrt{(1 + 3 \cdot \cos^2 v) \cdot \sin^2 v}} \end{aligned}$$

Assim,

$$K = \frac{1}{(3 \cos^2 v + 1)^2},$$

e

$$H = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cos^2 v + 5}{(3 \cos^2 v + 1)^{3/2}}$$

. Logo, trata-se de uma casca com curvatura Gaussiana positiva.

**Definição 3.15.** Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular  $M$ . Dizemos que um ponto  $p \in M$  é um *ponto umbílico* da superfície  $M$  se as curvaturas principais de  $M$  em  $p$  coincidem. Consequentemente, a curvatura normal em qualquer direção é constante.

*Exemplo 3.16.* Considere uma esfera de parametrização

$$X(u, v) = (2 \sin v \cos u, 2 \sin v \sin u, 2 \cos v)$$

com  $0 < v < \pi$  e  $0 < u < 2\pi$  (ver Figura 3.9).

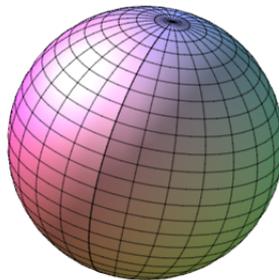


Figura 3.9: Ilustração de uma esfera

Vamos verificar que em uma esfera todos os pontos são umbílicos e todas as curvas

são principais. Computamos:

$$\begin{aligned}Xu &= (-2 \sin v \sin u, 2 \sin v \cos u, 0) \\Xv &= (2 \cos v \cos u, 2 \cos v \sin u, -2 \sin v) \\Xuu &= (-2 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, 0) \\Xuv &= (-2 \cos v \sin u, 2 \cos v \cos u, 0) \\Xvv &= (-2 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, -2 \cos v)\end{aligned}$$

Após obter as derivadas, continuaremos agora em busca do vetor normal. Denotemos por:

$$\begin{aligned}n &= \langle Xu, Xv \rangle \\n &= -(4 \sin^2 v \cos u, 4 \sin^2 v \sin u, 2 \sin(2v))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|n\| &= \sqrt{(4 \sin^2 v \cos u)^2 + (4 \sin^2 v \sin u)^2 + (2 \sin(2v))^2} \\ \|n\| &= 4 \cdot \sin v\end{aligned}$$

Assim, o normal unitário à superfície é:

$$\begin{aligned}N &= \frac{n}{\|n\|} \\ &= -(\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)\end{aligned}$$

Calculemos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned}E &= 4 \sin^2 v \\ F &= 0 \\ G &= 4 \\ e &= 2 \sin^2 v \\ f &= 0 \\ g &= 2\end{aligned}$$

Temos também que

$$K = \frac{1}{4}$$

e

$$H = \frac{1}{2}$$

e portanto a esfera é uma superfície com curvatura gaussiana constante positiva, e também de curvatura média positiva constante.

A partir da Equação (3.3), temos que, tomando uma direção  $w = (a, b)$  no plano tangente à superfície em um ponto fixado:

$$kn(w) = \frac{1}{2}$$

Portanto, a curvatura normal é constante em todos os pontos da esfera. Logo,  $k_1 = k_2$  em todos os pontos. Segue-se então que todos os pontos em uma esfera são umbílicos.

### 3.5 Equação Diferencial das Linhas de Curvatura

Vamos tratar nesta seção da equação diferencial que governa as linhas de curvatura de uma superfície. Enunciamos a seguir a proposição que define tal equação diferencial.

**Proposição 3.17.** *Seja  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , uma curva regular de uma superfície parametrizada regular  $M$ . Então  $\alpha$  é uma linha de curvatura de  $M$  se, e somente se,  $u(t)$  e  $v(t)$  satisfazem:*

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \quad (3.10)$$

**Demonstração:** Seja  $\alpha(t)$  uma curva na superfície de modo que  $\alpha(0) = p$ . Para que  $w = (a, b) = (u'(0), v'(0))$  seja uma direção principal, é necessário e suficiente que este seja ponto ótimo da função

$$k_n(a, b) = \frac{a^2 \cdot E + 2ab \cdot F + b^2 \cdot G}{a^2 \cdot e + 2ab \cdot f + b^2 \cdot g}$$

Calculando as derivadas parciais com relação a  $a$  e  $b$ , temos que

$$\frac{\partial k_n}{\partial a} = -\frac{2b \cdot \sigma}{(a^2 E + 2ab F + b^2 G)^2} = 0$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial b} = \frac{2a \cdot \sigma}{(a^2 E + 2ab F + b^2 G)^2} = 0.$$

Como  $a$  e  $b$  não podem ser simultaneamente nulos, segue que a direção é principal se, e somente se:

$$\sigma = (Fg - Gf)b^2 + (Eg - Ge)ab + (Ef - Fe)a^2 = 0$$

e portanto

$$(Fg - Gf)v'(0)^2 + (Eg - Ge)u'(0)v'(0) + (Ef - Fe)u'(0)^2 = 0.$$

O caminho  $\alpha(t)$  tem todos seus vetores tangentes como direção principal se, em cada ponto  $\alpha(t)$ , ocorrer:

$$(Fg - Gf) v'(t)^2 + (Eg - Ge) u'(t)v'(t) + (Ef - Fe) u'(t)^2 = 0.$$

de onde segue a equação diferencial. ■

É interessante observar que, se escrevermos  $u'(t) = \frac{du}{dt}$  e  $v'(t) = \frac{dv}{dt}$ , temos a seguinte expressão:

$$(Fg - Gf) \frac{dv^2}{dt} + (Eg - Ge) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (Ef - Fe) \frac{du^2}{dt} = 0.$$

Considerando a expressão em 1-forma, fica:

$$(Fg - Gf) dv^2 + (Eg - Ge) du \cdot dv + (Ef - Fe) du^2 = 0.$$

Lembrando que os coeficientes da primeira e segunda forma estão em função de  $(u, v)$ , e considerando localmente  $v = v(u)$ , obtemos [8]:

$$(Fg - Gf) \frac{dv^2}{du} + (Eg - Ge) \frac{dv}{du} + (Ef - Fe) = 0. \quad (3.11)$$

Vamos denotar:

$$L(u, v) = (Fg - Gf)$$

$$M(u, v) = (Eg - Ge)$$

$$N(u, v) = (Ef - Fe)$$

Denotando por  $\lambda = \frac{dv}{du}$ , a equação diferencial das linhas de curvatura tem a expressão quadrática:

$$L(u, v) \cdot \lambda^2 + M(u, v) \cdot \lambda + N(u, v) = 0 \quad (3.12)$$

A seguir, ilustramos, considerando o domínio  $\mathcal{U}$  da parametrização local da superfície, as soluções da equação diferencial das linhas de curvatura para algumas superfícies conhecidas:

*Exemplo 3.18.* No caso da casca em formato de parabolóide hiperbólico (ver Figura 3.7):

$$X(u, v) = (u, v, u \cdot v)$$

temos que a equação diferencial das linhas de curvatura é:

$$v'(u) = \pm \sqrt{\frac{1+v^2}{1+u^2}}. \quad (3.13)$$

A Equação (3.13) tem por solução duas famílias ortogonais de curvas, descritas na forma implícita por:

$$\text{Sol1 : } \operatorname{arcsinh}(v) + 1/2 \ln(v^2 + 1) - \ln\left(\sqrt{v^2 + 1}u + \sqrt{(u^2 + 1)(v^2 + 1)}\right) = C$$

e

$$\text{Sol2 : } \operatorname{arcsinh}(v) - 1/2 \ln(v^2 + 1) + \ln\left(\sqrt{v^2 + 1}u + \sqrt{(u^2 + 1)(v^2 + 1)}\right) = C$$

Ilustramos abaixo o retrato de fase da equação:

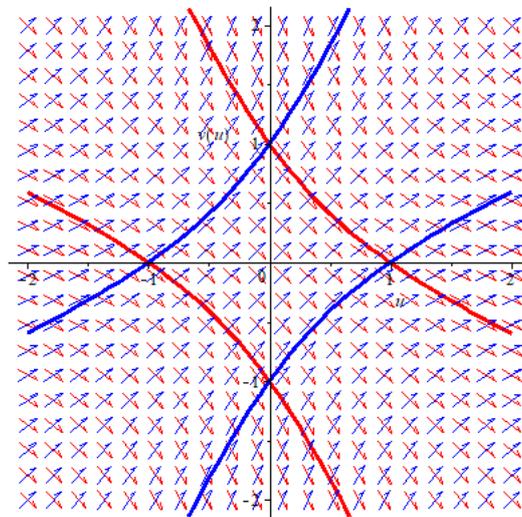


Figura 3.10: Linhas de Curvatura do Parabolóide Hiperbólico

*Exemplo 3.19.* No caso da casca em formato de parabolóide elíptico:

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

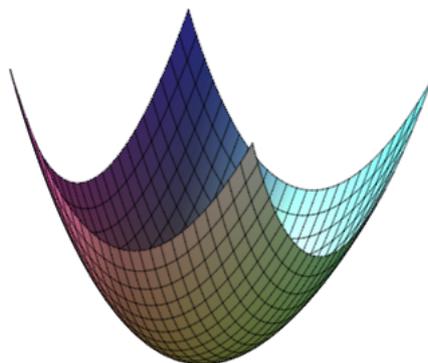


Figura 3.11: Ilustração do Parabolóide Elíptico

A equação diferencial das linhas de curvatura se resume a:

$$v'(u) = \frac{v(u)}{u} ; \quad v'(u) = -\frac{u}{v(u)}$$

que tem por solução duas famílias ortogonais de curvas, a saber:

$$\text{Sol1 : } v = C \cdot u$$

e

$$\text{Sol2 : } u^2 + v^2 = C$$

Ilustramos o retrato de fase:

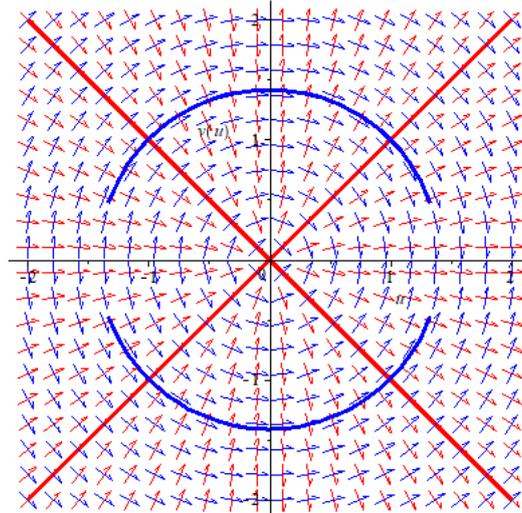


Figura 3.12: Linhas de Curvatura do Parabolóide Elíptico

### 3.6 Superfície Regrada

Superfícies regradas consistem em superfícies parametrizadas de grande interesse em áreas como: Computação Gráfica, Desenho e Engenharia. É entendido por superfície regrada aquela formada por uma reta que se move ao longo de uma determinada curva  $\alpha$ .

Uma família a um-parâmetro de retas  $\{\alpha(t), w(t)\}$  é uma correspondência que associa a cada  $t \in I$  um ponto  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$  e um vetor  $w(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $w(t) \neq 0$ , tais que ambos  $\alpha(t)$  e  $w(t)$  sejam diferenciáveis em  $t$ . Para cada  $t \in I$ , a reta  $L_t$  passando por  $\alpha(t)$  e gerada por  $w(t)$  é chamada a reta da família em  $t$ . [6]

Considere:

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$$

Sendo  $\alpha(t)$  uma curva regular e  $w(t)$  um vetor. Chamamos esta de superfície regrada gerada pela família  $\{\alpha(t), w(t)\}$ . As retas  $L_t$  são chamadas geratrizes, e a curva  $\alpha(t)$  é chamada de diretriz da superfície parametrizada. [6]

*Exemplo 3.20.* Um cilindro é uma superfície regrada. De fato, considere:  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  e  $w(t) = (0, 0, 1)$ . Temos assim a superfície

$$X(t, v) = (\cos t, \sin t, v)$$

com  $0 < t < 2\pi$  e  $v \in \mathbb{R}$  consiste num cilindro reto. Caso  $w(t) = (1, 1, 1)$ , temos um cilindro oblíquo.

*Exemplo 3.21.* Considere  $\alpha(t) = (0, 0, 1)$  e  $w(t) = (\cos t, \sin t, 0) - (0, 0, 1) = (\cos t, \sin t, -1)$ .

Temos assim a superfície parametrizada:

$$X(t, v) = (v \cos t, v \sin t, 1 - v)$$

cujo traço é o cone: Note que

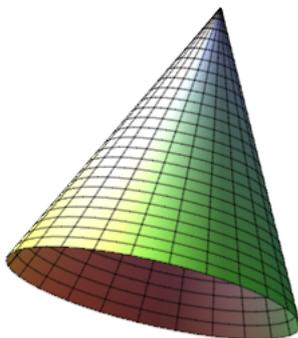


Figura 3.13: Ilustração do Cone

$$X_t = (-v \sin t, v \cos t, 0)$$

e

$$X_v = (\cos t, \sin t, -1).$$

Assim,

$$\|X_t \wedge X_v\| = \sqrt{2} \cdot |v|$$

e portanto a superfície é regular em todos os pontos, menos o vértice  $(0, 0, 1)$ .

*Exemplo 3.22.* Considere  $\alpha(t) = (t, 0, 0)$  e  $w(t) = \frac{(0, 1, t)}{\sqrt{1+t^2}}$ . Temos a superfície regrada:

$$X(t, v) = \left( t, \frac{v}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{vt}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$

Veja que a terceira coordenada é o múltiplo das duas primeiras, e portanto esta é uma parametrização do parabolóide hiperbólico  $z = xy$  (ver Figura 3.14)

Considere uma superfície regrada não-cilíndrica, ou seja,  $|w'(t)| \neq 0$ , ou que  $w'(t) = 0$  ocorra apenas em pontos isolados. Suponha ainda que  $|w(t) = 1| \Rightarrow \langle w(t), w(t) \rangle = 1 \Rightarrow \langle w(t), w'(t) \rangle = 0$ .

Compreende-se que a geratriz é de suma importância, mas se faz necessário a utilização de um termo que independa da escolha de uma geratriz. Tentemos encontrar uma curva

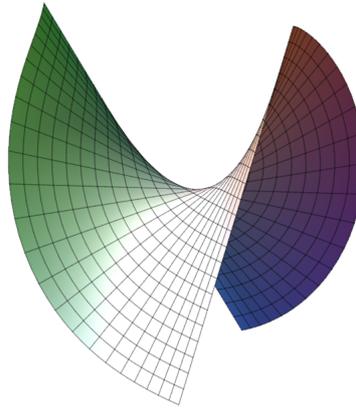


Figura 3.14: Paraboloides Hiperbolicos parametrizados como superfícies regradas.

$\beta$  na superfície de modo que  $\langle \beta(t), w'(t) \rangle = 0$ . Assim, pretendemos encontrar uma função escalar  $u(t)$  tal que:

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \alpha(t) + u(t)w(t) \\ \beta'(t) &= \alpha'(t) + u'w + uw' \\ \langle \beta', w' \rangle &= \langle \alpha' + u'w + uw', w' \rangle \\ \langle \beta', w' \rangle &= \langle \alpha', w' \rangle + u\langle w', w' \rangle\end{aligned}$$

Tomando

$$u(t) = -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\langle w'(t), w'(t) \rangle}$$

Temos:

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\langle w'(t), w'(t) \rangle} \cdot w$$

Mostremos que  $\beta$  independe da escolha da geratriz  $\alpha$ . A curva  $\beta$  é chamada de *linha de estrição* e seus pontos de *pontos centrais* da superfície.

Suponhamos que  $\bar{\alpha}$  seja outra geratriz de superfície. Utilizando a parametrização de uma superfície regrada não-cilíndrica.

$$\begin{aligned}X(t, v) &= \alpha(t) + vw(t) \\ &= \bar{\alpha} + sw(t)\end{aligned}$$

Agora veja que:

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\langle w'(t), w'(t) \rangle} w \\
\bar{\beta}(t) &= \bar{\alpha}(t) - \frac{\langle \bar{\alpha}'(t), w'(t) \rangle}{\langle w'(t), w'(t) \rangle} w \\
\beta(t) - \bar{\beta}(t) &= \alpha(t) - \bar{\alpha}(t) + \frac{\langle \bar{\alpha}'(t) - \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\langle w'(t), w'(t) \rangle} w \\
\alpha(t) - \bar{\alpha}(t) &= (s - v)w \\
\alpha'(t) - \bar{\alpha}'(t) &= (s - v)w' \\
\bar{\alpha}'(t) - \alpha'(t) &= (v - s)w' \\
\beta(t) - \bar{\beta}(t) &= (s - v)w + \frac{\langle (v - s)w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w \\
\beta(t) - \bar{\beta}'(t) &= (s - v)w + (v - s)w \\
\beta(t) - \bar{\beta}'(t) &= 0
\end{aligned}$$

Portanto  $\beta$  é a única linha de estrição, ou seja, uma curva cujos pontos são chamados de pontos centrais da superfície regradada, e é onde se encontram os pontos singulares, caso houver, que são os pontos onde ocorre  $Xu \wedge Xv = 0$ .

Dando continuidade, teremos:

$$\begin{aligned}
X(t, v) &= \beta(t) + vw(t) \\
X_t &= \beta'(t) + vw'(t) \\
X_v &= w(t) \\
X_t \wedge X_v &= \beta'(t)w(t) + vw'(t) \wedge w(t)
\end{aligned}$$

Reassumindo alguns termos indicados anteriormente e indo mais afundo, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle w(t), w'(t) \rangle &= 0 \\
\langle w(t), \beta'(t) \rangle &= 0 \\
\langle \beta'(t) \wedge w(t) \rangle &= \lambda w' \\
X_t \wedge X_v &= \lambda w'(t) + vw'(t) \wedge w(t)
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
|X_t \wedge X_v|^2 &= |\lambda w'(t) + vw'(t) \wedge w(t)|^2 \\
&= \lambda^2 |w'(t)|^2 + v^2 |w'(t) \wedge w(t)|^2 \\
&= \lambda^2 |w'(t)|^2 + v^2 |w'(t)|^2 \\
&= (\lambda^2 + v^2) |w'(t)|^2
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |X_t \wedge X_v| &= (\lambda^2 + v^2) |w'(t)|^2 \\ \langle \beta' \wedge w, w' \rangle &= \langle \lambda w', w' \rangle \\ \langle \beta' \wedge w, w' \rangle &= \lambda \langle w', w' \rangle \\ \lambda &= \frac{[\beta', w, w']}{|w'|^2} \end{aligned}$$

E por fim, caso  $[\beta', w, w'] = 0$ , dizemos que a superfície é desenvolvível, o que significa intuitivamente que a superfície pode ser formada por uma chapa, sem esticar enrugar, rasgar ou vincar.



## Capítulo 4

# O Elipsoide de Monge

### 4.1 O Projeto da Cúpula Elipsoidal

Gaspard Monge (1746 a 1818) foi um célebre matemático e engenheiro francês, o qual desenvolveu o método da geometria descritiva e um estudioso da Geometria Diferencial. Monge esteve envolvido na reforma do sistema educacional francês, ajudando a fundar a famosa *École Polytechnique*. Teve também importante papel político na França pós-revolução, exercendo a função de Ministro da Marinha, senador, embaixador e amigo pessoal de Napoleão Bonaparte.

Nas palavras de Étienne Ghys, ainda mais importante entender que Monge colocou uma ênfase considerável no ensino. Ele entendeu que a nação precisava de um grande número de trabalhadores, engenheiros e cientistas, e que eles precisavam de educação de qualidade, especialmente em matemática. Para ele, a pesquisa matemática e o ensino são duas facetas de uma mesma atividade.”



Figura 4.1: Gaspard Monge

As cúpulas das construções da Europa medieval ou do período renascentista, em geral, têm formato que podem ser modelados por uma esfera ou por um elipsoide de revolução. Como exemplo, podemos citar o Duomo de Florença, retratado na Figura 4.2, cuja construção iniciou em 1293 e foi concluída em 1436.



Figura 4.2: Duomo de Florença

A figura geométrica elipsoide, ensinada nos cursos de geometria analítica, tem expressão implícita:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.1)$$

sendo  $x, y, z$  as variáveis e  $a, b, c$  os parâmetros, todos não-nulos. Quando ocorrer  $a = b = c \neq 0$ , temos uma esfera. Sendo dois destes parâmetros iguais, e um diferente, temos o caso de um elipsoide de revolução:

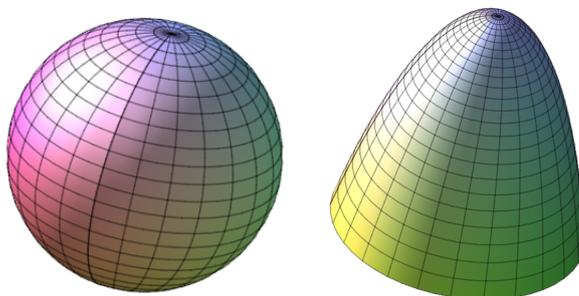


Figura 4.3: Esfera, à direita, e semi-paraboloide de revolução, à esquerda

No caso em que  $a \neq b \neq c$  e  $a \neq c$ , sendo todos não-nulos, temos o elipsoide de três eixos distintos, o qual é denominado *Elipsoide de Monge*.

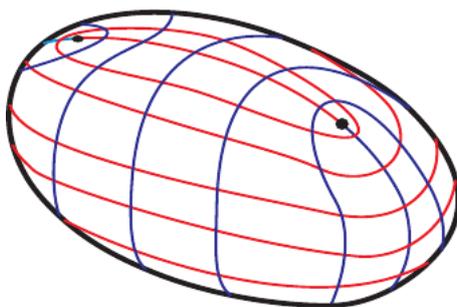


Figura 4.4: Elipsoide de Monge

As linhas de curvatura desenhadas originalmente por Monge são reproduzidas na Figura 4.5, retiradas de “Aplicações de Análise a Geometria”.

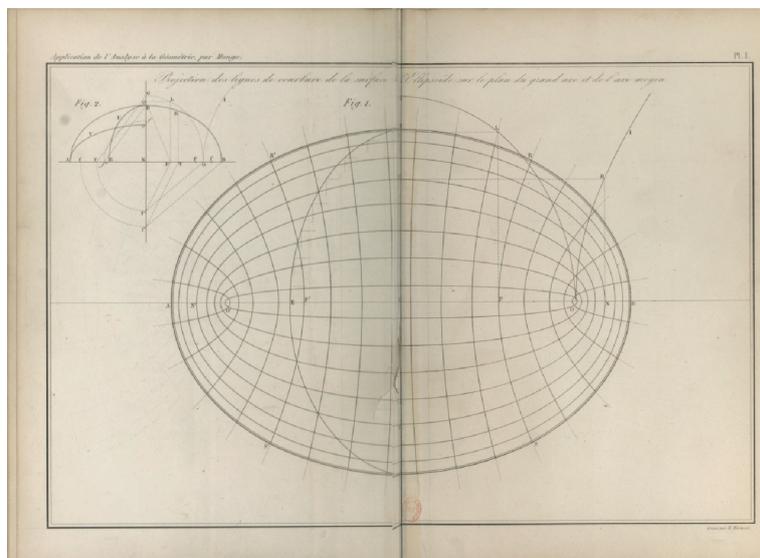


Figura 4.5: Linhas de curvatura no elipsoide, originalmente desenhadas por Monge.

Segundo Sakarovitch (2009), Monge propôs construir uma abóbada elipsoidal, por meio da técnica de montagem das pedras, sem argamassa, para o prédio do parlamento francês. Complementa ainda Reventós (2018), que, no caso, “o parlatório seria colocado logo abaixo de um dos pontos umbilicais da abóbadas, e o espaço poderia ser decorado colocando colunas seguindo as linhas de curvatura. Monge também imaginava dois lustres pendurados nos pontos umbilicais”.

O projeto proposto está ilustrado conforme a Figura 4.6:

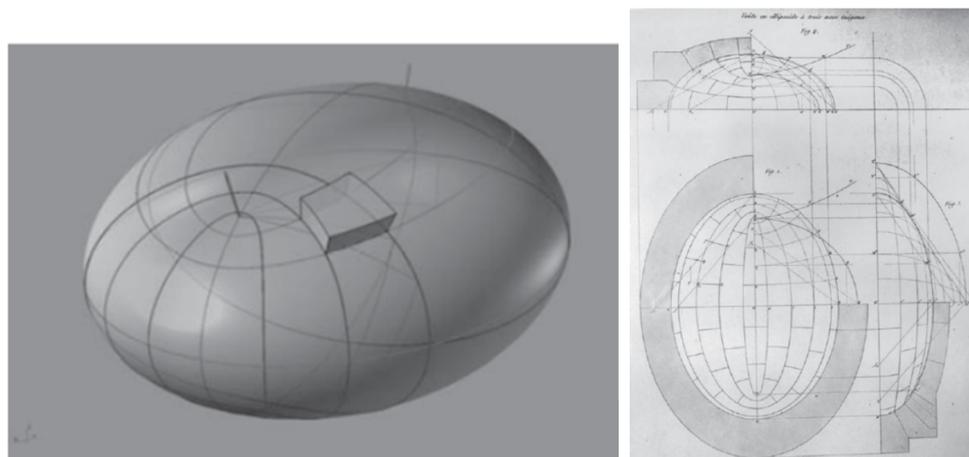


Figura 4.6: Projeto de construção da cúpula elipsoidal

Este projeto não consta como realizado. Conforme Sakarovitch (2009), “não conseguimos encontrar exemplares nem obras arquitetônicas sem argamassa envolvendo superfícies ou abóbadas envolvendo intradados com superfícies complexas, montadas segundo as linhas de curvatura.”

Ainda que, do ponto de vista construtivo, o objeto real da cúpula do parlamento francês em forma elipsoidal não exista, esta história motiva o ensino e a aprendizagem da teoria de linhas de curvatura e pontos umbílicos por meio do elipsoide de Monge.

## 4.2 Resolução Computacional das Linhas sobre o Elipsoide

Um elipsoide de Monge tem expressão implícita dada pela Equação 4.1, onde consideramos todos os parâmetros  $a, b, c$  não-nulos e dois a dois diferentes. Vamos considerar, nestas condições:

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a equação na forma implícita:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \quad (4.2)$$

Que pode ser parametrizada por:

$$X(u, v) = (3 \sin v \cos u, 2 \sin v \sin u, \cos v)$$

sendo  $0 < u < 2\pi$  e  $0 < v < \pi$ .

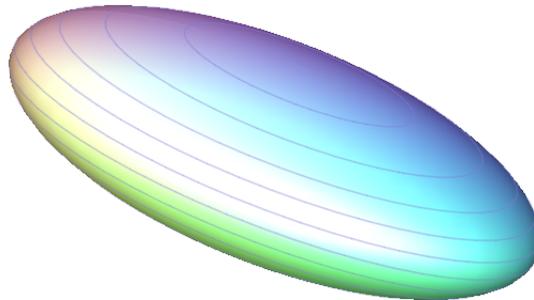


Figura 4.7: Ilustração do Elipsoide Triaxial da Equação 4.2

Nesta parametrização:

$$\begin{aligned} X_u &= (-3 \sin v \sin u, 2 \sin v \cos u, 0) \\ X_v &= (3 \cos v \cos u, 2 \cos v \sin u, -\sin v) \end{aligned}$$

e portanto:

$$X_u \wedge X_v = -(2 \sin^2 v \cos u, 3 \sin^2 v \sin u, 3 \sin(2v))$$

De onde,

$$\|X_u \wedge X_v\| = \sin v \cdot \sqrt{9 + 27 \cos^2 v - 5 \sin^2 v \cos^2 u}$$

Com isso, o normal unitário ao longo da superfície é:

$$N = -\frac{1}{\sqrt{9 + 27 \cos^2 v - 5 \sin^2 v \cos^2 u}} \cdot (2 \sin v \cos u, 3 \sin v \sin u, 6 \cos v)$$

Computamos também as derivadas de segunda ordem, e obtemos:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-3 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, 0) \\ X_{uv} &= (-3 \cos v \sin u, 2 \cos v \cos u, 0) \\ X_{vv} &= (-3 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, -\cos v) \end{aligned}$$

Com isso, os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E &= \sin^2(v) \cdot (9 - 5 \cos^2 u) \\ F &= -\frac{5}{4} \cdot \sin(2u) \cdot \sin(2v) \\ G &= 1 + \cos^2(v) \cdot (3 + 5 \cos^2 u) \end{aligned}$$

e os coeficientes da segunda forma:

$$\begin{aligned} e &= \frac{6 \sin^3 v}{\sin v \sqrt{9 + 27 \cos^2 v - 5 \sin^2 v \cos^2 u}} \\ f &= 0 \\ g &= \frac{6 \sin v}{\sin v \sqrt{9 + 27 \cos^2 v - 5 \sin^2 v \cos^2 u}} \end{aligned}$$

Conforme a Equação 3.12, considerando localmente  $v = v(u)$ , a fim de encontrar o retrato de fase, temos:

$$\begin{aligned} L(u, v) &= -\frac{15 \sin(2u) \cdot \sin v(u) \cdot \cos v(u)}{\sqrt{9 + 27 \cos^2 v(u) - 5 \cos^2 u}} \\ M(u, v) &= -\frac{6 \sin^2 v(u) \cdot (5 \cos^2 u \cdot \cos^2 v(u) + 5 \cos^2 u + 3 \cos^2 v(u) - 8)}{\sqrt{9 + 27 \cos^2 v(u) - 5 \cos^2 u}} \\ N(u, v) &= \frac{15 \sin 2u \sin 2v(u) \sin^2 v(u)}{2\sqrt{9 + 27 \cos^2 v(u) - 5 \cos^2 u}} \end{aligned}$$

Assim, localmente, a equação

$$L \cdot (v'(u))^2 + M \cdot v'(u) + N = 0$$

fica

$$v'(u) \sin v(u) \left( \left( \cos^2 u + \frac{3}{5} \right) \cos^2 v(u) + \cos^2 u - \frac{8}{5} \right) + \cos v(u) \cos u \sin u \cdot (v'(u)^2 - \sin^2 u) = 0$$

Ao plotar a resolução desta equação no plano  $uv$ , com o auxílio do software Maple™, obtemos a configuração ilustrada na Figura 4.8

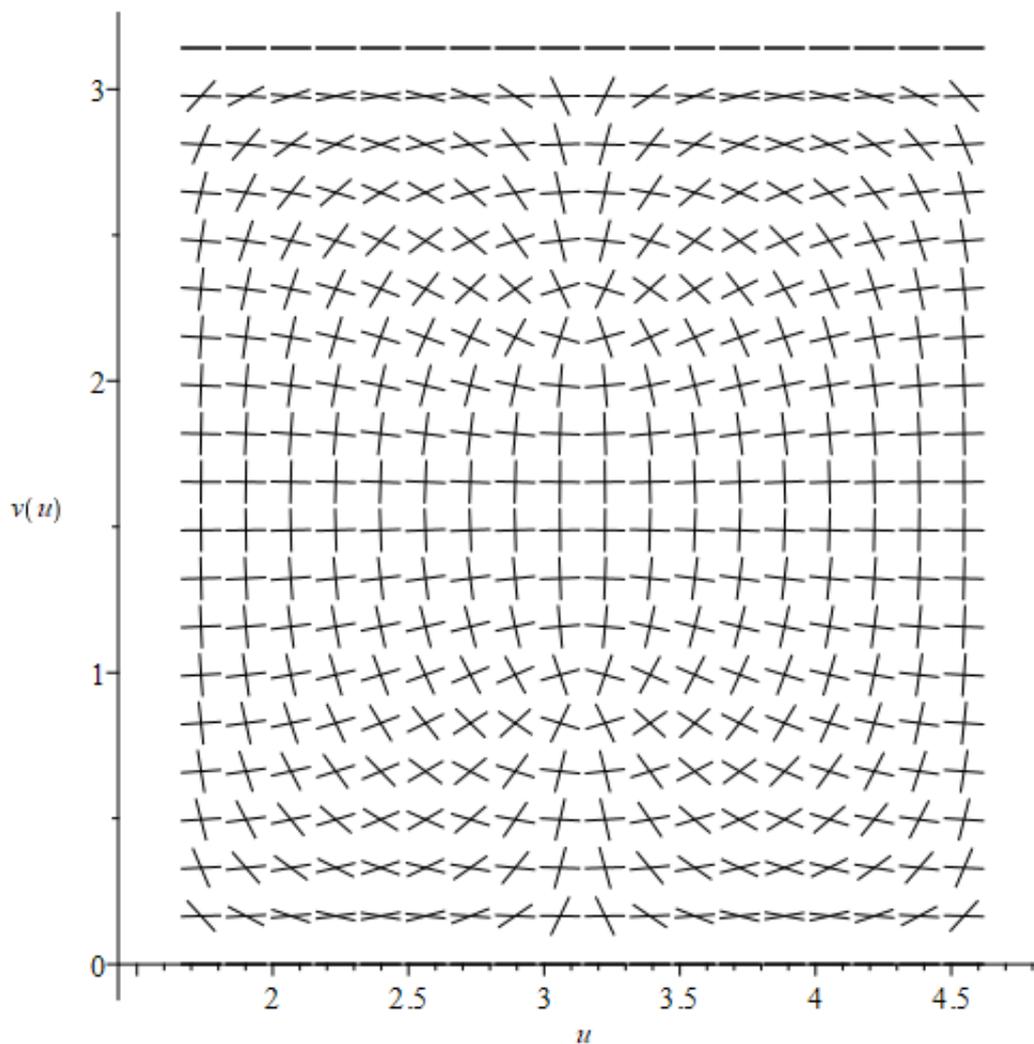


Figura 4.8: Campos de Direções Principais no Elipsóide de Monge

Ainda, com uso do Maple™, podemos obter, por meio do comando `DEplot`, as configurações ilustradas na Figura 4.9 e na Figura 4.10

Em um plot conjunto, obtemos a Figura 4.11.

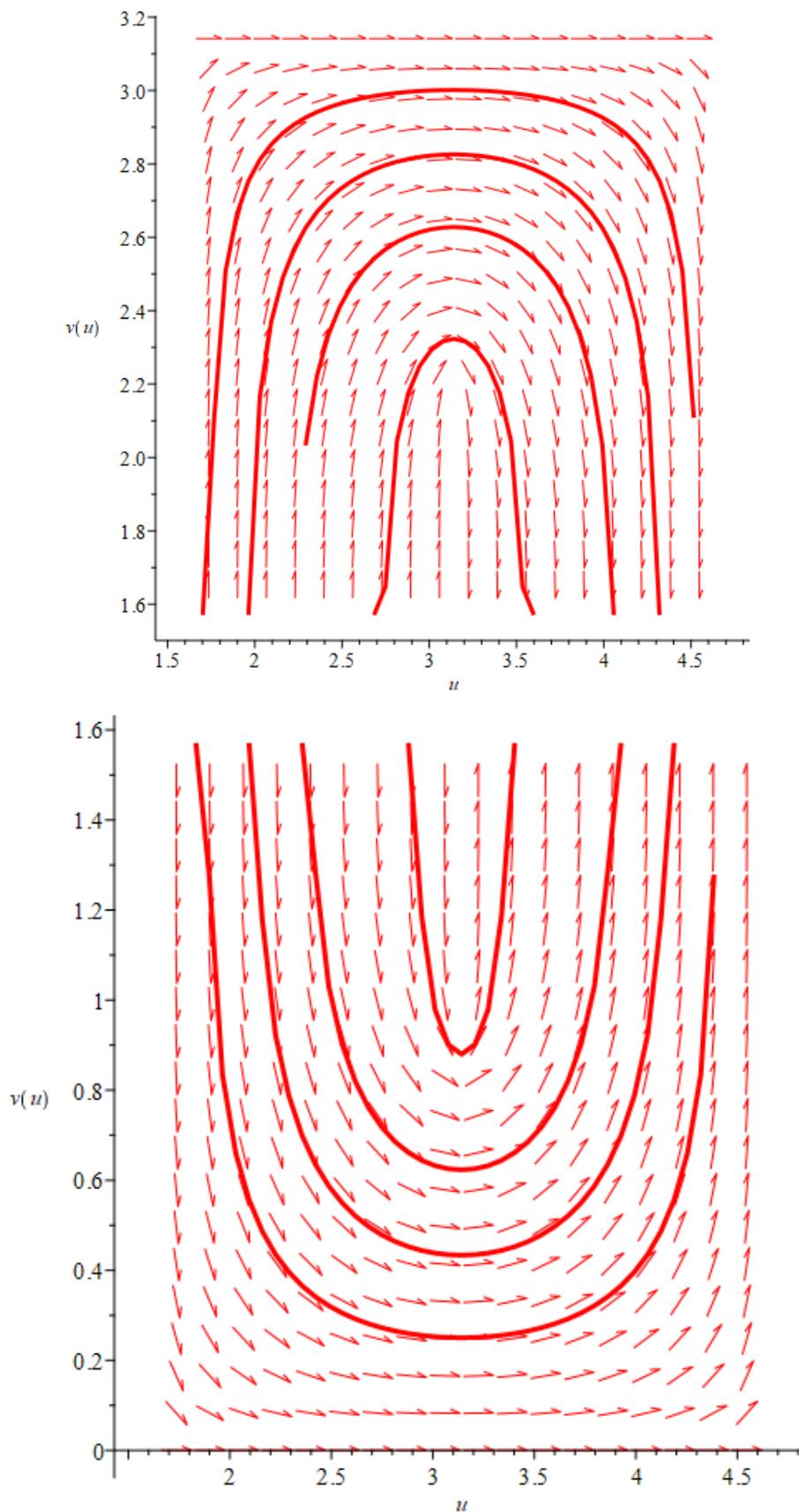


Figura 4.9: Resolução Computacional da Eq. Dif. Linhas de Curvatura sobre Elipsoide de Monge

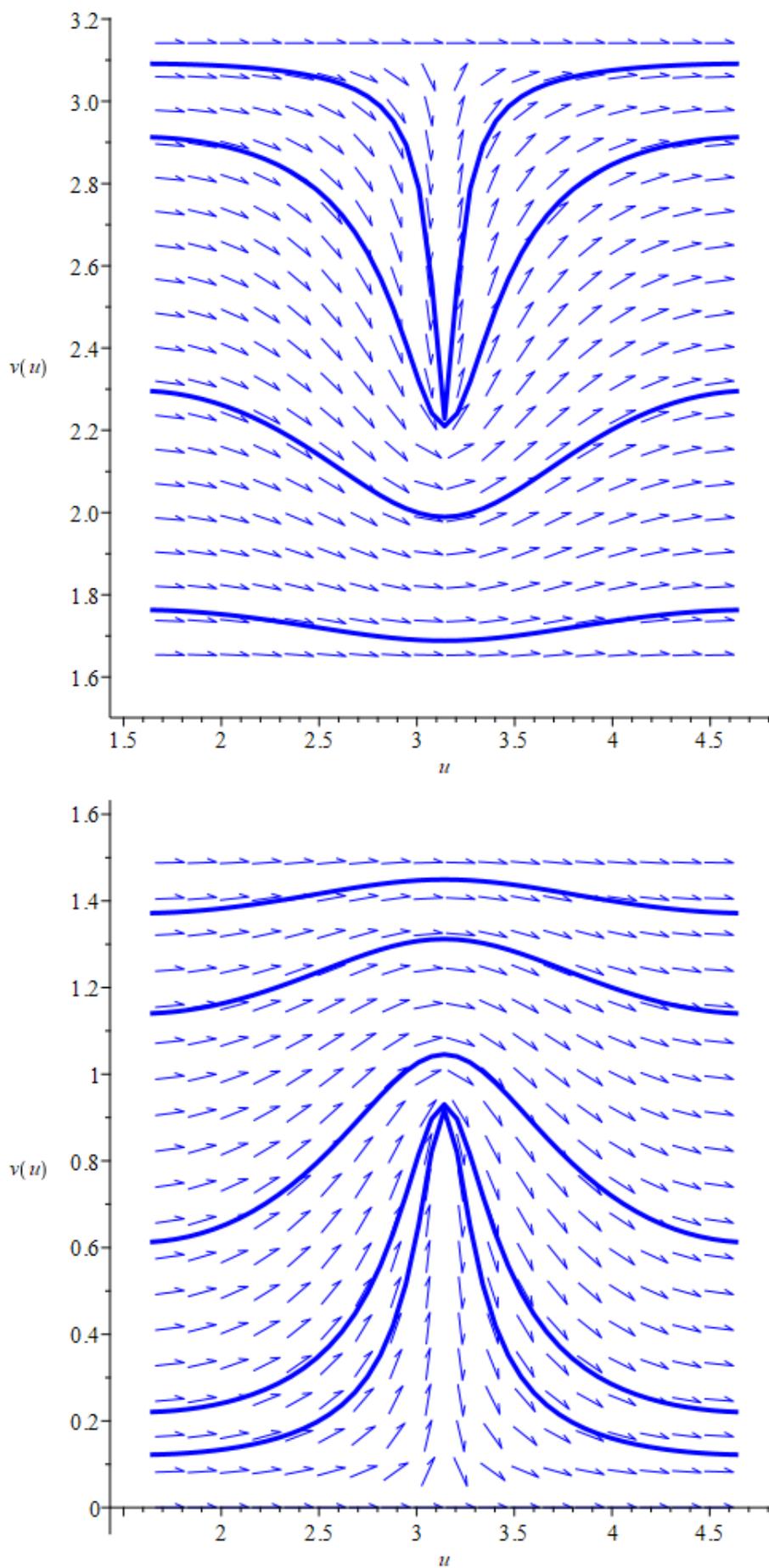


Figura 4.10: Resolução Computacional da Eq. Dif. Linhas de Curvatura sobre Elipsoide de Monge

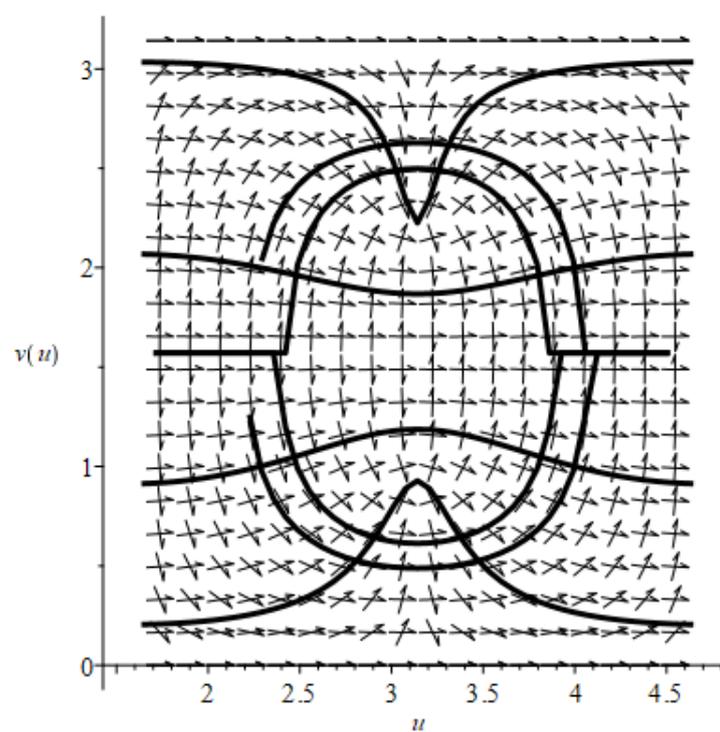


Figura 4.11: Equação Diferencial das linhas de curvatura sobre o Elipsoide de Monge: Resolução Computacional



## Capítulo 5

# As Habitações Indígenas do Alto Xingú

O Território Indígena do Xingu (TIX) está situado ao norte do estado do Mato Grosso, no Brasil, com área de 2.825.470 hectares, ao sul da Amazônia brasileira.

A TIX se divide em quatro terras indígenas: Terra Indígena Parque Indígena do Xingu (TIPIX), TI Batovi, TI Wawi e TI Pequizal Naruvòtu. A região chamada de Alto Xingu, mais ao sul, compreende 11 povos.

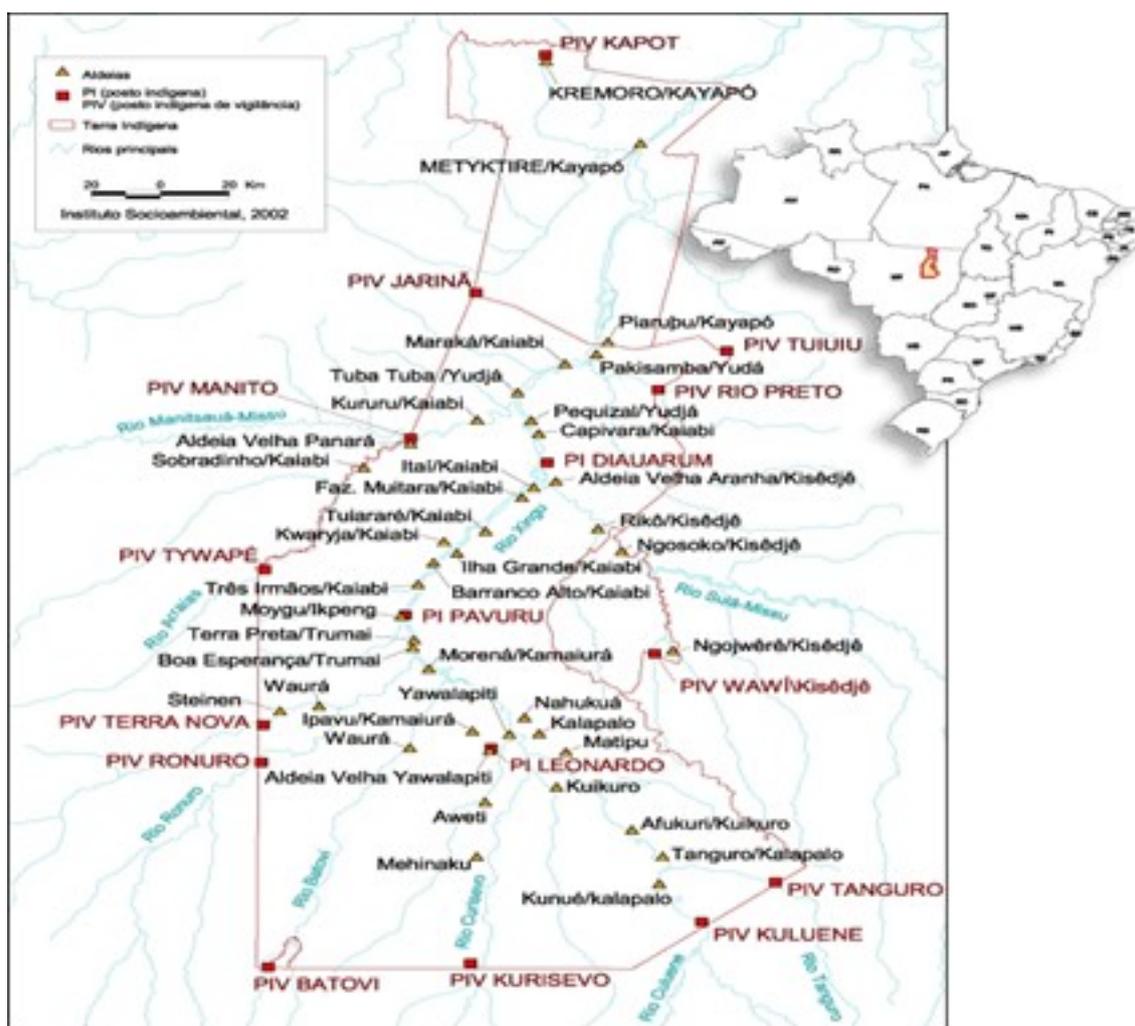


Figura 5.1: Localização e divisão do território xingano

Nesta região estão os povos Aweti, Kalapalo, Kamayurá, Kuikuru, Matipu, Mehinako, Nahukuá, Naruvôtu, Trumai, Waujá e Yawalapiti. Apesar de terem línguas diferentes, apresentam costumes, modo de vida e visão de mundo semelhantes, embora cada um desses povos mantenha sua identidade étnica. ([24], 2019, p. 708)

Sá e Corrêa relataram a construção da casa Yawalapiti ([13], 1979, p. 133-139), de planta baixa elipsoidal, como na Figura 5.2, cuja construção demorou em torno de seis meses. Os pontos pretos onde estão alocados os caibros de sustentação da maloca, coincidem aproximadamente com os focos da elipse da planta baixa.

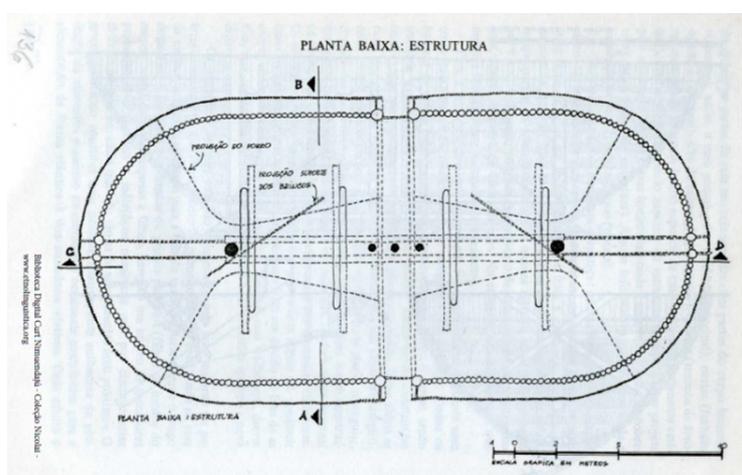


Figura 5.2: Planta baixa elipsoidal da maloca Yawalapiti

Sobre a organização da aldeia, Cristina Sá ainda escreveu:

Todas as casas da aldeia Yawalapiti seguem o mesmo padrão de organização espacial, independentemente de terem a forma tradicional, de se apresentarem com diferenciação entre teto e parede, ou mesmo de terem planta baixa retangular. Esse padrão é o mesmo observado nas casas de outras aldeias do Alto-Xingu, mesmo naquelas que são fortemente influenciadas por modelos externos à cultura xinguaná, tais como as casas de taipa de mão das aldeias Kamayurá e Kalapalo. ([12], 1983, p. 117)

Por meio de representação imagética, identificou-se que a estrutura de sustentação das malocas dos povos indígenas do alto Xingu seguem, aproximadamente, as mesmas linhas do projeto da cúpula elipsoidal ilustradas na Figura 4.6. Tal coincidência de linhas fica mais evidente na Figura 5.3, onde está exibida a elevação da maloca Yawalapiti.

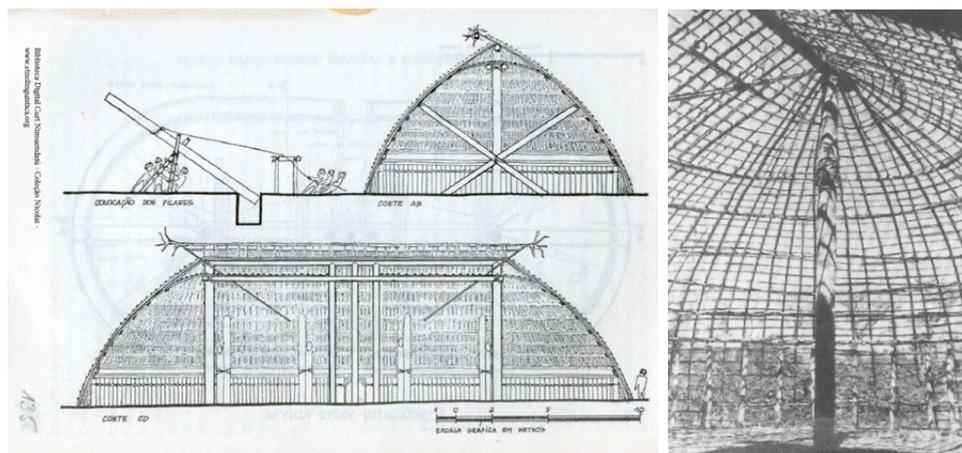


Figura 5.3: Estrutura da casa Yawalapiti. À esquerda, construção e, à direita, vista da cúpula.

Nas Figura 5.4 ilustramos imagens da comunidade perante a construção da maloca. Nestas imagens, com ponto de vista tanto externo quanto interno das habitações, é possível verificar o comportamento elíptico que seguem as linhas de sustentação do domo.



Figura 5.4: Comunidade em construção da maloca. À esquerda, visão externa, à direita, visão interna.

Ilustramos, ainda, uma maquete 3d da casa Kamayurá. Considerando esta maloca, podemos modelá-la aproximadamente por um elipsoide de Monge, de modo que, imediatamente acima dos dois caibros de sustentação estão os pontos umbílicos da abóbada. Ligando os dois pontos umbílicos, temos, no modelo visual, a chamada separatriz umbílica.

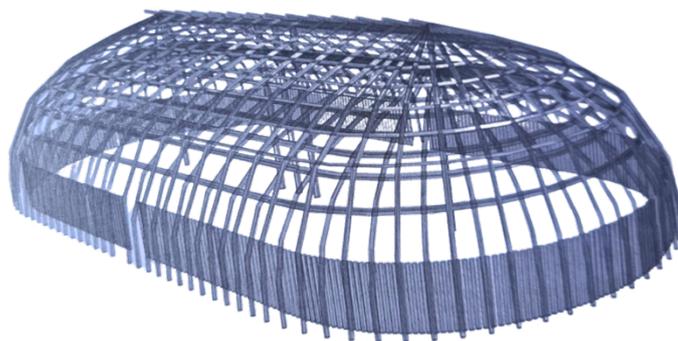


Figura 5.5: Maquete 3d da casa Kamayura [11]

Em recente trabalho de conclusão de curso do bacharelado interdisciplinar em ciência e tecnologia da Universidade Federal do Maranhão, os alunos Josuel Barros Junior e Harryson Patrick Silva confeccionaram maquetes computacionais em software Revit™ das malocas dos povos indígenas do alto Xingu. Por meio desta atividade, os estudantes puderam verificar a coincidência entre as linhas que dão estrutura à maloca, e o projeto realizado por Monge para a cúpula elipsoidal 4.6, bem como as linhas de curvatura do elipsoide de Monge (Figura 4.4).

Na Figura 5.6, ilustramos a maquete computacional dos alunos:

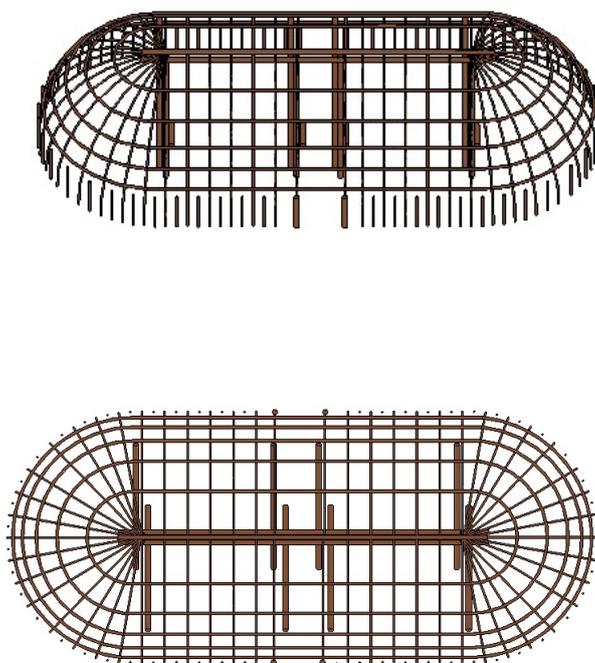


Figura 5.6: Maquete da casa Kamayurá em software Revit™ [20]

Na Figura 5.7, está traçada a resolução computacional da equação diferencial das

linhas de curvatura sobre o elipsoide de Monge da Seção 4.2. Ao comparar esta figura com a Figura 5.6, pode-se notar similaridades que podem ser usadas para motivar o estudo da teoria de linhas de curvatura.

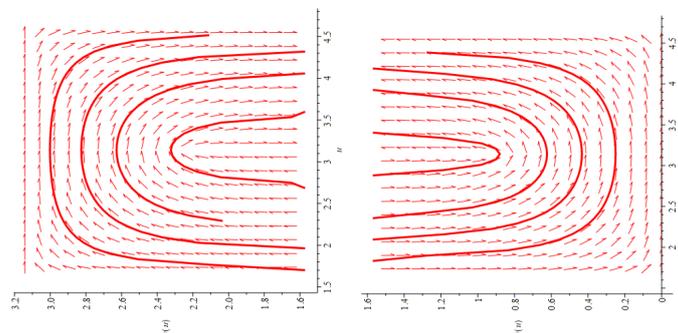


Figura 5.7: Resolução Computacional da Eq. Dif. Linhas de Curvatura sobre Elipsoide de Monge

Por fim, efetuamos na Figura 5.8, um comparativo, ilustrando várias imagens com estruturas similares a configuração principal do elipsoide de Monge. À esquerda, se encontra a maquete realizada em Revit™, em seguida o projeto da cúpula elipsoidal para o prédio do parlamento francês (Figura 4.6), depois o teto da maloca Yawalapiti (Figura 5.3) e, mais a direita, o elipsoide de Monge (Figura 4.4).

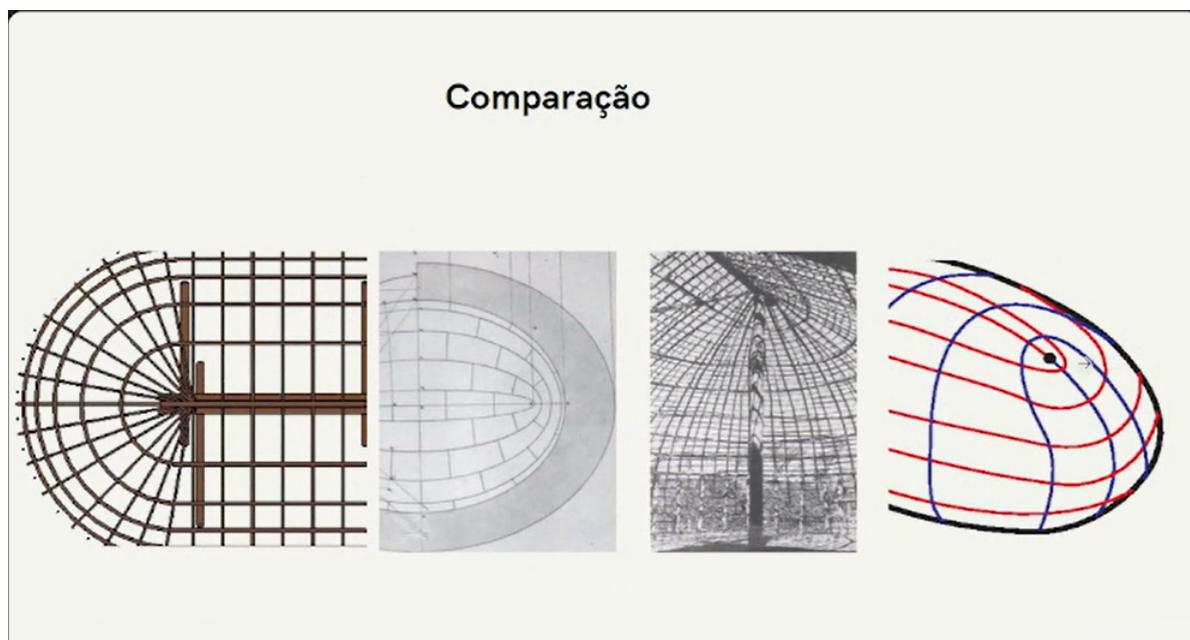


Figura 5.8: Comparativo entre figuras com estruturas de linhas similares.

## Conclusão

Ressaltamos o diálogo entre o conhecimento matemático ocidental, e o conhecimento tradicional dos povos originários, em especial aqueles do alto Xingu. No problema es-

pecífico da construção de uma cúpula elipsoidal, ambas as culturas chegam à mesma solução, por vias diferentes.

Vale ressaltar a informação que os índios fazem suas casas sem projeto. “O que define a peculiar arquitetura indígena é o produto de um não-desenho” ([11] p. 33). As construções sempre foram executadas com base na memória e na tradição oral.

Durante a pesquisa de campo, nunca foi mostrado ou executado qualquer desenho em papel pelos informantes indígenas; havendo necessidade de algum esclarecimento, o “croquis” era feito em terra com uma varinha, ou com o próprio dedo. ([11], p. 34)

O que este minicurso propõe, é que sejam utilizadas imagens de construções indígenas e da forma de organização das comunidades, bem como atividades que envolvam discussão e modelos das habitações. Resignificar as aulas de geometria, por meio da interdisciplinaridade, pode ser mais uma via de atratividade para a aula de matemática.

Os povos indígenas, desde a ancestralidade, efetuam a construção da cúpula elipsoidal. As técnicas da arquitetura ocidental não se mostraram possíveis de realizar o mesmo tipo de construção no séc. XIX.

Portanto, convém ampliar o entendimento a respeito dos saberes originários. Nestes tempos de diálogos sobre biodiversidade, abordar a geometria dos povos indígenas pode engrandecer enormemente o ambiente escolar.

## Referências Bibliográficas

- [1] BRAIDA, F., FIGUEIREDO, J. Superfícies geradas por retas não desenvolvíveis. UFJF/ Curso de Arquitetura e Urbanismo, Juiz de Fora, MG, 2013.
- [2] BIERZUNER, R. Notas de Aula: Geometria Diferencial. UFMG/ Instituto de Ciências Exatas, Minas Gerais, 2016.
- [3] CATAAI, A. P. Comprimento de Arco de Curvas Parametrizadas com o Auxílio do Software Maple. Disponível em: <http://www.alunospgmat.ufba.br/adrianocattai/construcoes/maple/comprimento-arco/compri-arco.html>. Acesso em 27 de junho de 2018.
- [4] DEMIDOVICH, B. P.; Maron, I. A. Basics of Numerical Mathematics, 1960.
- [5] DE LIMA, R. Introdução a Geometria Diferencial. 1ª ed. Macapá: UNIFAP, 2016.
- [6] DOCARMO, M. P., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro, SBM. 2005.
- [7] FLORÊS, M. V., Hélices, curvas de Bertrand e superfícies regradadas. Dissertação de Mestrado. UFSM/ Centro de Ciências Naturais e Exatas, Santa Maria - RS, 2012.
- [8] GARCIA, R., SOTOMAYOR, J., Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory. Publicações Matemáticas. IMPA. 2009.
- [9] GUIDORIZZI, H. Um curso de Cálculo. Rio de Janeiro. Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.
- [10] GHYS, E. Gaspard Monge: le beau, l'utile et le vrai. In: Images des Mathématiques. Disponível em: <https://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge.html?lang=fr>. Acesso em 31/03/2024.
- [11] PORTOCARRERO, J. Tecnologia Indígena em Mato Grosso: Habitação. 2 ed. Cuiabá: Entrelinhas, 2018.
- [12] SÁ, C. Observações sobre a Habitação em Três Grupos Indígenas Brasileiros. In: Novaes, S. Habitações Indígenas. São Paulo: Nobel: Ed. USP, 1983. p. 103 - 145.

- [13] SÁ, C., CORRÊA, E. Habitação Indígena no Alto Xingu. In: Silveira, E. Félix, M. Encontros com a Civilização Brasileira, Vol. 12, p.129-142. Rio de Janeiro. 1979.
- [14] SAKAROVITCH, J. Gaspard Monge Founder of “Constructive Geometry”. Proc. Third Int. Congress Construction History, May, 2009. pp 1293-1300.
- [15] SANTOS, M., PIRES, D., JESUS, P., Análise Geométrica e Computacional de Cúpulas. 2018. 75 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís.
- [16] SOTOMAYOR, J. O Elipsoide de Monge. In: Matemática Universitária, Rio de Janeiro, n. 15, p. 33-47, dez. 1993. Disponível em: [https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n15\\_Artigo04.pdf](https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n15_Artigo04.pdf) . Acesso em 31/03/2024.
- [17] SOTOMAYOR, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides, CNPq, IMPA, 1979.
- [18] SPINDOLA, F., MARTINS, M. A Geometria das Cúpulas: da Arquitetura Ocidental Antiga às Construções Indígenas Brasileiras. In: XXII Seminário Temático Internacional: Produção, Circulação e Apropriação da Matemática para o Ensino e para a Formação de Professores Século XXI. São Luís. GHEMAT. 2024.
- [19] SPINDOLA, F., MARTINS, M. Análise Geométrica de Habitação Indígena no Alto Xingu. In: III Congresso Brasileiro Interdisciplinar de Ciência e Tecnologia, 2022. Anais do Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, 2022.
- [20] SPINDOLA, F., SILVA, H., BARROS JR, J. Uma proposta de ensino de cálculo a estudantes de engenharia com implementação do software Revit™. In: Anais do IX Simpósio Internacional de Tecnologias Digitais na Educação. São Luís. 2024.
- [21] STEWART, J., Cálculo, 7.ed., São Paulo. Cengage Learning, 2013.
- [22] STRUIK, D., Lectures on Classical Differential Geometry. Addison-Wesley, reprinted by Dover, 1988.
- [23] TENENBLAT, K. Introdução à Geometria Diferencial. 2 ed. Blucher. São Paulo. 2008.
- [24] TRONCARELLI, R. Arquitetura Indígena Xinguana: um Estudo das Representações. In: Colóquio Internacional Imaginário: Construir e Habitar a Terra, ATAS III ICHT 2019, 3, p.705 – 724. São Paulo: FAUUSP, 2019.
- [25] VIANA, T. M., SOUSA, F. P. Curvas Regulares e Equação de Frenet. Projeto de Pesquisa e Extensão. UFMS/ Curso de Matemática, Mato Grosso do Sul, 2013.