

MINICURSO

Uma Introdução de Bolso de Jogos Topológicos

Andrade Lara, Dione¹

Resumo: Neste mini-curso veremos algumas propriedades topológicas através de outra abordagem conhecida como jogos topológicos. Esta técnica, além de representar propriedades topológicas, em alguns contextos serve como generalização de propriedades.

No primeiro dia, vamos rever algumas propriedades básicas de espaços topológicos, e no segundo dia, daremos alguns exemplos de jogos topológicos básicos, e algumas aplicações.

Palavras-chave: Jogos topológicos, Menger, Oxtobi, Rothberger, Topologia.

1 Um pouco de topologia

Definição 1.1 Dizemos que (X, τ) é um espaço topológico se X é um conjunto e $\tau \subset \wp(X)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. Se $A, B \in \tau$ então $A \cap B \in \tau$.
3. Se $\mathcal{A} \subset \tau$ então $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.²

Os elementos de τ são chamados de **abertos**. E chamamos τ de **topologia**.

Alguns problemas envolvendo topologias são um tanto quanto complicados usando esta definição. A fim de simplificar um pouco vamos definir uma base para uma topologia.

¹ICTIN - UFPA

²A união de qualquer quantidade de elementos de τ pertence a τ .

Definição 1.2 Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \wp(X)$ é uma **base** para (X, τ) se para cada $x \in X$ e $\forall A \in \tau$ com $x \in A$ $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

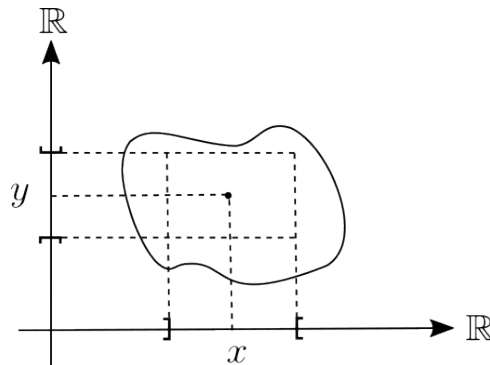
Note que se unirmos os elementos da base obteremos uma topologia. De fato, se $A \in \tau$ $\forall A \in \tau$ com $x \in A$ $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$ so $A = \bigcup_{x \in A} B_x$.

Exemplo 1.1 Considere a reta real \mathbb{R} e $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que }]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A\}$. O espaço topológico (\mathbb{R}, τ) é conhecido “topologia usual para \mathbb{R} ”. E o conjunto $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}\}$ é uma base para a topologia usual em \mathbb{R} .

Seja $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } [x, x + \varepsilon[\subset A\}$. O espaço topológico (\mathbb{R}, σ) é conhecido como “reta de Sorgenfrey”³.

Seja (X, τ) um espaço topológico. E seja $Y \subset X$ então podemos definir a **topologia do subespaço** em Y dada por (Y, ρ) onde $\rho = \{A \cap Y : A \in \tau\}$.

Definição 1.3 Seja (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Considere $X \times Y$ e defina $\rho = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \times Y : \forall (x, y) \in U \exists A \in \tau, \exists B \in \sigma \text{ tal que } x \in A, y \in B \text{ e } (x, y) \in A \times B \subset U\}$. Dizemos que $(X \times Y, \rho)$ é a **topologia produto** em $X \times Y$. Note que $\mathcal{B} = \{A \times B : A \in \tau, B \in \sigma\}$ forma uma base para ρ .



Definição 1.4 Seja (X, τ) um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{S} \subset \tau$ é uma **sub-base** para τ se a intersecção de finitos elementos de \mathcal{S} forma uma base para τ .

Exemplo 1.2 Ainda em $X \times Y$ considere $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ como $p_1(x, y) = x$ e $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ como $p_2(x, y) = y$ então $\mathcal{S} = \{p_1^{-1}[A] : A \in \tau\} \cup \{p_2^{-1}[B] : B \in \rho\}$ forma uma sub-base para a topologia produto em $X \times Y$.

Como podemos intuir sobre “produtos cartesianos infinitos”?

Definição 1.5 Seja $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. Definimos o produto como $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : x(\alpha) \in X_\alpha\}$. Podemos enxergar a sequência de elementos do produto $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \dots) \in X$ como uma função $x : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ dado por $x(\alpha_1) = x_{\alpha_1}, x(\alpha_2) = x_{\alpha_2}, x(\alpha_3) = x_{\alpha_3}, \dots$. Uma base para a topologia produto em X é dada por $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in A} V_\alpha : V_\alpha \text{ é aberto, se } \alpha \in F, F \subset A \text{ finito, caso contrário } V_\alpha = X_\alpha\}$.

³Ou topologia do limite inferior.

Vamos fixar algumas notações. Daqui em diante vamos denotar \mathbb{N} por ω que representa o primeiro ordinal infinito⁴. Defina X^Y como o conjunto de todas as funções $f : Y \rightarrow X$ podemos ver X^Y também como $X \times X \times X \times \cdots$ ($|Y|$ vezes). Daí $\omega^\omega = \{f; f : \omega \rightarrow \omega\}$. Se considerarmos $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ podemos definir $2^\omega = \{f; f : \omega \rightarrow 2 = \{0, 1\}\}$ e $\omega^n = \{f; f : n = \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \omega\}$. Seja $X^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} X^n$ o conjunto dado pelas funções finitas $f : n \rightarrow X$, com $n \in \omega$.

Proposição 1.1 *Seja $s \in 2^n$ para $n \in \omega$ e defina $[s] = \{f \in 2^\omega : s \subset f\}$ (f estende s). Então $\{[s] : s \in 2^{<\omega}\}$ é uma base para a topologia produto em 2^ω .*

Demonstração. Seja $f \in 2^\omega$ e V um aberto básico tal que $f \in V$. Note que $V = \prod_{n \in \omega} V_n$ onde $V_n = \{0\}$ ou $V_n = \{1\}$ para $n \in \{n_1, \dots, n_k\}$ e $V_n = 2$ para $n \notin \{n_1, \dots, n_k\}$. Sem perda de generalidade, suponha que $n_1 < \cdots < n_k$ e defina $s : n_k \rightarrow 2$ com $s(n) = f|_{s_k}(n)$. Portanto $f \in [s] \subset V$.

Existe uma outra maneira de definir a topologia produto em X .

Definição 1.6 *Seja \mathcal{F} uma família de funções $f_\alpha : X \rightarrow y_\alpha$, $\alpha \in A$ em que cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. Chamamos de **topologia fraca** induzida (no sentido de induzir uma sub-base) por $f_\alpha^{-1}[V]$, $\alpha \in A$ e $V \in \tau_\alpha$.*

Se considerarmos a topologia fraca como uma sub-base podemos gerar a topologia produto.

Definição 1.7 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que \mathcal{A} é uma **cobertura** em X se $\bigcup \mathcal{A} = X$. Se os elementos de \mathcal{A} são abertos dizemos que \mathcal{A} é uma **cobertura aberta**.*

Definição 1.8 *Um espaço topológico (X, τ) é dito ser **compacto** se dada uma cobertura aberta \mathcal{A} então existe uma sub-cobertura finita, ou seja $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ ($|\mathcal{A}'| < \omega$) tal que $\bigcup \mathcal{A}' = X$.*

Exemplo 1.3 *Um exemplo de espaços compactos na reta são os intervalos fechados $[a, b]$. Espaços finitos também são compactos.*

Teorema 1.1 (Teorema de Tychonoff) *O produto qualquer de espaços compactos é compacto com respeito a topologia produto.*

Definição 1.9 *seja (X, τ) um espaço topológico. $F \subset X$ é um **fechado** se $X \setminus F$ é aberto.*

Definição 1.10 *Seja (X, τ) um espaço topológico. A coleção $\mathcal{C} \subset X$ possui a **propriedade da intersecção finita** (p.i.f.) se todo subconjunto $C \subset \mathcal{C}$ possui intersecção finita $\bigcap C \neq \emptyset$.*

⁴0 é um número natural! Nunca se esqueça disso!

Proposição 1.2 *Seja (X, τ) um espaço topológico. X é compacto se, e somente, se a coleção de todos os conjuntos fechados com p.i.f. \mathcal{C} em X implica que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ tal que $\mathcal{C} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$. Observe que:

1. \mathcal{A} é uma coleção de abertos se, e somente, se \mathcal{C} é uma coleção de fechados.
2. \mathcal{A} cobre X se, e somente, se $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, como $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A) = X \setminus (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = X \setminus X = \emptyset$.
3. O conjunto $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ é uma subcobertura se, e somente, se $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i) = \emptyset$.

X é compact se:

Dada uma cobertura aberta \mathcal{A} existe uma sub-cobertura finita $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tal que $\bigcup \mathcal{A}' = X$.

Dada uma cobertura aberta \mathcal{A} se toda sub-cobertura finita $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tal que $\bigcup \mathcal{A}' \neq X$ implica que \mathcal{A} não cobre X .

Dada qualquer coleção de fechados \mathcal{C} de X se X possui p.i.f. então $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Definição 1.11 *Um espaço topológico X é um **espaço de Lindelöf** se satisfaz a seguinte propriedade: Toda cobertura possui uma sub-cobertura enumerável.*

Exemplo 1.4 *Todo compacto é Lindelöf. A reta real é de Lindelöf mas não é compacta.*

Definição 1.12 *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $A \subset X$. Definimos o **fecho** de A como $\bar{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ é fechado e } A \subset F\}$. Essa definição é equivalente a seguinte afirmação: $\forall x \in A$ e para todo aberto U tal que $x \in U$ implica que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definição 1.13 *X é um espaço **separável** se existe um subconjunto enumerável $D \subset X$ e **denso** em X , i.e., $\bar{D} = X$ ($\bar{D} = X$ é o mesmo em dizer que para todo aberto não vazio U teremo $U \cap D \neq \emptyset$).*

Alguns axiomas de separação:

T_2 (Hausdorff): Para quaisquer $x, y \in X$ existem A, B abertos tais que $x \in A, y \in B$ com $A \cap B = \emptyset$.

T_3 (Regular): Para cada $x \in X$ e cada conjunto fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existem A, B abertos tais que $x \in A, F \subset B$ com $A \cap B = \emptyset$.

Proposição 1.3 *(X, τ) é um espaço regular se, e somente, se para todo $x \in X$ e para todos os abertos V tal que $x \in V$ existe um aberto A tal que $x \in A \subset \bar{A} \subset V$.*

Proposição 1.4 *Se (X, τ) é um espaço compacto Hausdorff então X é regular também.*

Teorema 1.2 (Teorema de Baire) *A intersecção de uma coleção de abertos densos ainda é densa em um espaço compacto Hausdorff.*

Demonstração. Seja $(A_n)_{n \in \omega}$ uma família de abertos densos e $V \neq \emptyset$ um aberto. Vamos mostrar que $V \cap (\bigcap_{n \in \omega} A_n) \neq \emptyset$.

Vamos começar tomando um aberto denso A_0 então $A_0 \cap V$ é um aberto não vazio, então existe um $x_0 \in A_0 \cap V$ (X é regular) existe um conjunto $V_0 \subset X$ com $x_0 \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset A_0 \cap V$. Agora, repetimos o procedimento com A_1 e V_0 . No passo $n + 1$ faremos o mesmo com A_{n+1} e V_n . Então, existe um $x_{n+1} \in A_{n+1} \cap V_n$ (X é regular) existe um aberto $V_{n+1} \subset X$ com $x_{n+1} \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset A_{n+1} \cap V_n$. Continuamos para $n \in \omega$.

Note que a coleção $(\overline{V_n})_{n \in \omega}$ possui p.i.f. e X é compacto, então $\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n} \neq \emptyset$. logo, existe um $x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n}$ ($\overline{V_n} \subset A_n$) então $x \in A_n$ para qualquer $n \in \omega$, assim $x \in V \cap (\bigcap_{n \in \omega} A_n)$.

Definição 1.14 Chamamos (X, τ) de **espaço de Baire** se toda intersecção de abertos densos é densa em X .

2 Exemplos de jogos topológicos

Para os exemplos de jogos topológicos que apresentaremos, considere dois jogadores, que indicaremos como Jogador I e Jogador II. O nosso “tabuleiro” será um espaço topológico (X, τ) e o Jogador I e II poderão jogar (dependendo do jogo) pontos, abertos, coberturas abertas etc. Os jogos topológicos que iremos abordar terão uma quantidade infinita enumerável de rodadas⁵. Depois de todas as rodadas existe uma regra que determina quem vence.

Nestes jogos, definimos o conceito de estratégia⁶. De maneira intuitiva, uma estratégia para o Jogador I é um conjunto de respostas para as jogadas do Jogador II (de maneira análoga definimos estratégia para o Jogador II). Se a estratégia garante a vitória no jogo dizemos que é uma estratégia vencedora. Considere o jogo arbitrário G e vamos usar a notação $I \uparrow G$ para representar “Jogador I possui estratégia vencedora em G ” (assim como $II \uparrow G$ representa “Jogador II possui estratégia vencedora em G ”) e a notação $I \not\uparrow G$ representa que “Jogador I não possui estratégia vencedora em G ” (de maneira similar $II \not\uparrow G$ representa “Jogador II não possui uma estratégia vencedora em G ”).

2.1 Jogo de Baker

Seja $S \subset [0, 1]$ e considere o seguinte jogo: O Jogador I escolhe $a_1 \in]0, 1[$ e o Jogador II responde com $b_1 \in]a_1, 1[$, o Jogador I responde com $a_2 \in]a_1, b_1[$, e II joga $b_2 \in]a_2, b_1[$, e assim por diante. Na n -ésima rodada o Jogador I joga $a_n \in]a_{n-1}, b_{n-1}[$ e II responde com $b_n \in]a_n, b_{n-1}[$. Observe que $(a_n)_{n \in \omega}$ é uma sequência crescente e limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe, vamos chamá-lo de α . Dizemos que o Jogador I vence se $\alpha \in S$, caso contrário II vence.

⁵Existem jogos com uma quantidade não enumerável de rodadas

⁶Fique a vontade para dizer “estratégia” em diversos idiomas.

Proposição 2.1 *Se S é enumerável, então o Jogador II possui estratégia vencedora.*

Demonstração. Tome a seguinte enumeração para $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$. Considere a seguinte estratégia para o Jogador II: na n -ésima rodada com $n \geq 1$ II joga $B_n = s_n$ se for uma jogada válida, caso contrário II escolhe qualquer número para b_n . Por $\alpha < b_n$ para todo $n > 1$ segue que $\alpha \neq b_n$ para todo $n > 1$, e portanto $\alpha \notin S$.

Note que, se $S = [0, 1]$, então não importa as jogadas feitas que o Jogador I sempre vence. Portanto podemos concluir que:

Corolário 2.1 *O intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ é não enumerável.*

2.2 Jogo de Banach-Mazur

Jogo de Banach-Mazur $BM(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio. Vamos definir o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga um aberto não vazio A_0 e o Jogador II responde com um aberto não vazio $B_0 \subset A_0$. Na próxima rodada, o Jogador I joga, novamente, um aberto não vazio $A_1 \subset B_0$ e o Jogador II responde com um aberto não vazio $B_1 \subset A_1$. E assim por diante. Depois de terminar a partida teremos $A_0 \supset B_0 \supset A_1 \supset B_1 \supset \dots$. O Jogador II vence no jogo de Banach-Mazur se $\bigcap_{n \in \omega} A_n = \bigcap_{n \in \omega} B_n \neq \emptyset$.

Exemplo 2.1 *Observe que o jogador II vence em $BM(\mathbb{R})$ e $BM(\mathbb{N})$ e o Jogador I vence em $BM(\mathbb{Q})$. Para verificar que I vence em $BM(\mathbb{Q})$ considere o seguinte jogo: O jogador I começa jogando $A_0 = \mathbb{Q}$ e II escolhe $B_0 \subset A_0$. Então, o Jogador I responde com $A_1 = B_0 \setminus \{x_0\}$ com $x_0 \in B_0$. Na $n + 1$ -ésima rodada, o Jogador I responde $A_{n+1} = B_n \setminus \{x_n\}$ com $x_n \in B_n$. Então $\bigcap_{n \in \omega} A_n = \bigcap_{n \in \omega} B_n = \emptyset$.*

O jogo de Banach-Mazur nos proporciona uma outra maneira de enxergarmos um espaço de Baire.

Teorema 2.1 (Teorema de Oxtoby) *O espaço X é de Baire se, e somente, se o Jogador I não possui uma estratégia vencedora.*

Demonstração. Suponha que X não é de Baire e vamos mostrar que o Jogador I possui estratégia vencedora. Então, existe um conjunto não vazio $A_0 \subset X$ e uma família de abertos densos $(G_n)_{n \in \omega}$ em X tal que $A_0 \cap (\bigcap_{n \in \omega} G_n) = \emptyset$. O primeiro movimento do Jogador I é A_0 então o Jogador II responde com um aberto não vazio $B_0 \subset A_0$, note que $B_0 \cap G_0 \neq \emptyset$ (já que G_0 é denso em X). Na próxima rodada o Jogador I joga $A_1 = (B_0 \cap G_0) \subset B_0$ e o Jogador II escolhe $B_1 \subset A_1$, novamente $B_1 \cap G_1 \neq \emptyset$ (gracias à G_1 ser denso em X). E o Jogador I continua seguindo esse procedimento. Assim, $\bigcap_{n \in \omega} A_n = A_0 \cap ((\bigcap_{n \in \omega} B_n) \cap G_n) \subset A_0 \cap (\bigcap_{n \in \omega} G_n) = \emptyset$.

Para demonstrar a implicação contrária, suponha que o Jogador I possui uma estratégia vencedora e vamos mostrar que X não é um espaço de Baire. Seja A_0 o primeiro movimento do Jogador I (de acordo com a sua estratégia vencedora) vamos mostrar que A_0 não é de Baire (ser Baire é uma propriedade hereditária para abertos). Seja $(B_\lambda^0)_{\lambda \in \Lambda_0}$

a coleção maximal de abertos não vazios dois a dois disjuntos tais que $B_\lambda^0 \subset A_0$. Considere o conjunto T_0 dado por todas as possíveis respostas do Jogador I duas a duas disjuntas dentro de cada B_λ^0 para cada $\lambda \in \Lambda_0$. Seja $W_0 = \bigcup T_0$. Agora, seja $(B_\lambda^1)_{\lambda \in \Lambda_1}$ uma coleção maximal de abertos não vazios dois a dois disjuntos tais que $B_\lambda^1 \subset T_0$. Considere T_1 o conjunto dado por todas as respostas possíveis duas a duas disjuntas feitas pelo Jogador I dentro de cada B_λ^1 para cada $\lambda \in \Lambda_1$. Seja $W_1 = \bigcup T_1$. E assim por diante. Depois dessas construções teremos a coleção $(W_n)_{n \in \omega}$ onde cada W_n é denso em A_0 .

Afirmamos que $\bigcap_{n \in \omega} W_n = \emptyset$. Suponha que exista $x \in \bigcap_{n \in \omega} W_n$, então existe uma única sequência $(A_0, B_0, A_1, B_1, \dots)$ (uma partida completa) tal que $\bigcap_{n \in \omega} A_n = \{x\}$ e isso contraria o fato do Jogador I possuir estratégia vencedora. Portanto, $A_0 \cap (\bigcap_{n \in \omega} W_n) = \emptyset$, logo A_0 não é de Baire e isso implica que X não é um espaço de Baire.

Proposição 2.2 Se X é um espaço compacto Hausdorff então $II \uparrow BM(X)$.

Demonstração. Um espaço compacto Hausdorff é um espaço regular. Basta encaixar fechados não vazios dentro das escolhas do Jogador II e usar Proposição 1.2.

Corolário 2.2 Se X é localmente compacto e Hausdorff então $II \uparrow BM(X)$.

2.3 Jogo de Rothberger

Jogo de Rothberger $R(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio e seja \mathcal{O} o conjunto das coberturas de X . Definimos o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga uma cobertura $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um aberto $A_0 \in \mathcal{C}_0$. Na n -ésima rodada, o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com $A_n \in \mathcal{C}_n$. O Jogador II vence o Jogo de Rothberger se $\{A_n : n \in \omega\} \in \mathcal{O}$.

Definição 2.1 Dizemos que X é um espaço de **Rothberger** se o Jogador I não possui estratégia vencedora em $R(X)$. Note que $II \uparrow R(X)$ implica que $I \not\uparrow R(X)$.

Observe que:

- Se X não é de Lindelöf então $I \uparrow R(X)$. Basta que o Jogador I jogue somente a mesma cobertura.
- Se X é um espaço topológico enumerável então $II \uparrow R(X)$. Seja $X = \{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração dos elementos de X . O Jogador I começa jogando $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II escolhe $A_0 \in \mathcal{C}_0$ com $x_0 \in A_0$. Na n -ésima rodada o Jogador I joga $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II escolhe $A_n \in \mathcal{C}_n$ com $x_0 \in A_0$. Então $\{A_n : n \in \omega\}$ cobre X e graças a isso o Jogador II vence.
- Se $II \uparrow R(X)$ então X é um espaço de Lindelöf. Seja \mathcal{C} uma cobertura aberta para X e suponha que o Jogador I joga a mesma cobertura \mathcal{C} a cada jogada. Então, na n -ésima rodada o Jogador I joga \mathcal{C} e o Jogador II escolhe $A_n \in \mathcal{C}$ então $\{A_n : n \in \omega\}$ é uma sub-cobertura enumerável de \mathcal{C} .

Apesar de todos os espaços em que $II \uparrow R(X)$ serem de Lindelöf existe um espaço compacto em que $I \uparrow R(X)$. À saber 2^ω .

Proposição 2.3 2^ω é um espaço compacto, mas não é de Rothberger. Em outras palavras, o Jogador I possui uma estratégia vencedora.

Demonstração. Pela compacidade de $2 = \{0, 1\}$ e usando o Teorema de Tychonoff nós temos que 2^ω é um espaço compacto. Observe que $2^\omega = \{f; f : \omega \rightarrow 2\}$ e seja $F_{n,k} = \{f \in 2^\omega : f(n) = k\}$. O conjunto $F_{n,k}$ é um aberto básico (elemento de uma base) devido à $F_{n,k} = \prod_{m \in \omega} V_m$ onde $V_n = \{k\}$ e $V_m = 2$ para $m \neq n$. Considere a seguinte jogada feita pelo Jogador I: $\mathcal{C}_0 = \{F_{0,0}, F_{0,1}\}, \mathcal{C}_1 = \{F_{1,0}, F_{1,1}\}, \mathcal{C}_2 = \{F_{2,0}, F_{2,1}\}, \dots, \mathcal{C}_n = \{F_{n,0}, F_{n,1}\}, \dots$. Suponha que o Jogador II tenha jogado $\mathcal{C} = \{F_{0,j_0}, F_{1,j_1}, \dots, F_{n,j_n}, \dots\}$ com $j_n \in \{0, 1\}$. Tome $f \in 2^\omega$ tal que $f(n) \neq j_n$ para todo $n \in \omega$ então $f \notin F_{n,j_n}$ para todo $n \in \omega$. Portanto, \mathcal{C} não é uma cobertura aberta.

2.4 Jogo de Menger

Jogo de Menger $M(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio e seja \mathcal{O} o conjunto das coberturas abertas em X . Definimos o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um subconjunto finito $F_0 \in \mathcal{C}_0$. Na n -ésima rodada, o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um subconjunto finito $F_n \in \mathcal{C}_n$. O Jogador II vence no Jogo de Menger se $\bigcup_{n \in \omega} F_n \in \mathcal{O}$.

Definição 2.2 Dizemos que X é um **espaço de Menger** se o Jogador I não possui uma estratégia vencedora em $M(X)$. Note que $II \uparrow M(X)$ implica que $I \nexists M(X)$.

Proposição 2.4 Se X é um espaço de Rothberger então X é um espaço de Menger. Espaços de Menger são de Lindelöf também.

Demonstração. É fácil ver que espaços de Rothberger implicam em espaços de Menger. Seja \mathcal{C} uma cobertura aberta para X . Suponha que o Jogador I joga \mathcal{C} em cada rodada, então na n -ésima rodada o Jogador II toma $F_n \subset \mathcal{C}_n$, onde F_n é um subconjunto finito de \mathcal{C}_n . Pelo fato do Jogador I possuir estratégia vencedora segue que $\bigcup_{n \in \omega} F_n$ é uma cobertura aberta para X .

Proposição 2.5 Se X é um espaço compacto então $II \uparrow M(X)$, logo X é um espaço de Menger.

Demonstração. Na primeira rodada o Jogador I joga $\mathcal{C} \in \mathcal{O}$ e o Jogador escolhe um subconjunto finito $F \subset \mathcal{C}$ que testemunha a compacidade de X .

Por essa última proposição, concluímos que se X é de Menger isso não implica que X seja um espaço de Rothberger. Por exemplo $X = 2^\omega$.

Proposição 2.6 Existe um espaço de Lindelöf que não é de Menger. À saber, ω^ω .

Demonstração. Note que ω^ω é de Lindelöf pois possui uma base enumerável⁷. Seja $\mathcal{B} = \{[s] : s \in \omega^{<\omega}\}$ onde $[s] = \{f \in \omega^\omega : s \subset f\}$ forma uma base enumerável para ω^ω . Seja $F_{n,k} = \{f \in \omega^\omega : f(n) = k\}$ um aberto básico e considere as jogadas feitas pelo Jogador I:

⁷Base enumerável implica Lindelöf.

$$\mathcal{C}_0 = \{F_{0,0}, F_{0,1}, F_{0,2}, F_{0,3}, \dots\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \{F_{1,0}, F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}_n = \{F_{n,0}, F_{n,1}, F_{n,2}, F_{n,3}, \dots\}$$

$$\vdots$$

Tome $f \in \omega^\omega$ ta que $f(n) = k$ onde $F_{n,k}$ não pertence a coleção jogada pelo Jogador II na n -ésima rodada. Portanto, os abertos jogados pelo Jogador II não contém f .

Bibliografia

- [1] AURICHI, L. F.; DIAS, R. R. **Topological games and alster spaces**. Canadian Mathematical Bulletin, 57(4), 2014.
- [2] BAKER, M. H. **Uncountable Sets and an Infinite Real Number Game**. Mathematics Magazine, 80(5), 377-380, 2007.
- [3] ENGELKING, R. **General topology**. Sigma series in pure mathematics., Heldermann Verlag, 1989.
- [4] LARA, D. A. **Ordens Parciais e Aplicações**. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP São Carlos, 2012.