XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Análise complexa, séries de Fourier e translações de sequências

Um convite aos espaços vetoriais de funções holomorfas

Santos, Charles F. [1]

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo – ICMC/USP.
Este autor foi apoiado pela Pró-Reitoria de Inclusão e Pertencimento da Universidade de São Paulo – PRIP/USP

Sumário

Prefácio

O texto que segue foi escrito para um minicurso apresentado na XI Bienal de Matemática, realizada na Universidade Federal de São Carlos. O objetivo é apresentar um exemplo de espaço de Hilbert não comumente apresentado nas disciplinas de análise funcional dos cursos graduação e pós-graduação em matemática, tendo uma questão concreta sobre sequências como motivação.

Trata-se da questão de determinar os subespaços vetoriais fechados do espaço das sequências quadrado-somáveis que são mantidos invariantes pelo operador de translação à direita. É notável que a resposta não possa ser dada em termos puramente sequências, exigindo a reinterpretação do problema em termos de um espaço de funções de variável complexa.

O minicurso foi planejado para três aulas de duas horas cada. A primeira tem com objetivo apresentar a questão motivadora e sua translação para o mundo das funções holomorfas, além de alguns pré-requisitos matemáticos. A segunda aula se dedica a demonstrar um teorema sobre valor de fronteira de funções holomorfas, que será necessário na aula final, onde a resposta a questão dos subespaços invariantes é enunciada, demonstrada e aplicada. Ao fim, é possível experimentar uma frutífera interação entre análise complexa, funcional, harmônica e teoria da medida e integração.

Estas notas podem ser seguidas por pessoas que tenham conhecimento de espaços métricos, funções de variável e séries de Fourier, além dos cursos padrão de análise na reta e álgebra linear. Conhecer previamente a teoria de medida e integração e as propriedades de conjuntos ortogonais em espaços de Hilbert certamente ajudará a digerir o conteúdo com mais facilidade. No entanto, um esforço foi feito para introduzir a terminologia e os resultados relevantes, de forma a suprir estes pré-requisitos. O resultado final é um texto um tanto denso, mas que recompansará o esforço com um bonito teorema no fim.

O autor agradece aos Comitês Científico e Organizador da Bienal por aceitarem esta contribuição e promoverem um evento tão importante para a comunidade matemática nacional; à Pró-Reitoria de Inclusão e Pertencimento da USP pelo financiamento por meio do Programa de Pós-Doutorado para Pesquisadores Negros; e a seu orientador de doutorado, Waleed Noor (IMECC-Unicamp), por tê-lo apresentado à teoria contida nestas notas.

Charles F. dos Santos

São Carlos,
Julho de 2024

1 O operador *shift* e o espaço H^2

Este minicurso tem como motivação uma questão concreta básica em análise funcional, que pode ser enunciada como a seguir:

Considerando o operador shift definido no espaço de Hilbert ℓ^2, quais são seus subespaços (fechados) invariantes?

Neste primeiro capítulo, vamos tornar claro o significado de cada termo citado na questão acima, além de introduzir todo o aparato matemático envolvido em sua resposta. Assumimos livremente que quem nos lê tem conhecimentos de espaços métricos, funções de uma variável complexa e séries de Fourier.[2] Conhecer espaços de Hilbert, além da teoria da integral de Lebesgue, também é bastante útil, mas tentaremos enunciar os conceitos e resultados necessários (sem demonstração) oportunamente.

1.1 Espaços de Banach, Hilbert e ℓ^2

Começamos com notações básicas. Os conjuntos dos números naturais (incluindo o zero!), inteiros, reais e complexos são denotados, respectivamente, por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. O disco unitário (aberto), o cículo unitário e o fecho do disco unitário serão representados, respectivamente, por $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$ e $\overline{\mathbb{D}}$, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}\,,\\
\mathbb{T} &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\} = \partial\mathbb{D}\,,\\
\overline{\mathbb{D}} &= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1\} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}\,.
\end{aligned}$$

Todos os espaços vetoriais que ocorrerem neste texto serão sobre o corpo dos números complexos.

Estaremos interessados em espaços métricos completos cuja estrutura topológica interage com uma estrutura de espaço vetorial. Dado um espaço vetorial $\mathcal{H}$, um **produto interno** é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} : X \times X \to \mathbb{C}$ satisfazendo:

- linearidade na primeira entrada: $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle \ \forall\, x, y, z \in \mathcal{H}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$;
- conjugado-simetria: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \ \forall\, x, y \in \mathcal{H}$;
- não negatividade: $\langle x, x\rangle \geq 0 \ \forall\, x \in \mathcal{H}$;
- não degeneração: $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Um fato básico da álgebra linear é o de que

$$\|x\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\mathcal{H}}}\,, \quad x \in X\,,$$

define uma **norma** em $\mathcal{H}$, ou seja,

[2] Também vamos usar conhecimentos de álgebra linear e análise na reta, mas assumimos que isto é conhecido por quem já estudou espaços métricos.

- não negatividade: $\|x\| \geq 0 \; \forall\, x \in X$;
- não degeneração: $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- homogeneidade: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \; \forall\, x \in X,\, \alpha \in \mathbb{C}$;
- desigualdade triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall\, x, y \in X$.

Por sua vez, a norma acima define uma métrica em $\mathcal{H}$, dada por

$$d_X(x, y) = \|x - y\|\,, \quad x, y \in X\,.$$

Chamamos de **espaço de Hilbert** um espaço vetorial com produto interno cuja norma induz uma métrica completa, ou seja, onde todas as sequências de Cauchy convergem.

É possível demonstrar que todo espaço vetorial de dimensão finita é de Hilbert. O exemplo mais conhecido (lembrando sempre que nosso corpo de escalares é sempre $\mathbb{C}$!) é $\mathbb{C}^n$, com o produdo escalar

$$\langle (a_1, \ldots, a_n)\,, (b_1, \ldots, b_n) \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_k \overline{b_j}\,.$$

Um exemplo em dimensão infinita generaliza imediatamente o produto interno de $\mathbb{C}^n$: defina ℓ^2, ou $\ell^2(\mathbb{N})$, como o conjunto das sequências $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $\sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j|^p < \infty$. Podemos mostrar (e a quem nos lê fica o convite) que ℓ^2 é um espaço vetorial e

$$\langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \quad (a_n), (b_n) \in \ell^2\,,$$

define um produto interno. Mais do que isto, vale a propriedade de completude e, portanto, ℓ^2 é um espaço de Hilbert. É em ℓ^2 que será formulada, mais adiante, a pergunta central que responderemos neste texto.

Uma **base ortonormal** para um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma família de elementos $(e_j)_{j \in J}$, onde J é um conjunto indexador, com as seguintes propriedades:

- ortonormalidade: $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{se} j = k\,, \\ 0 & \text{se } j \neq k\,; \end{cases}$
- totalidade: o subespaço vetorial gerado por $(e_j)_{j \in J}$ é denso em $\mathcal{H}$.

Convidamos quem nos lê a verificar que uma base ortonomal em ℓ^2 é família $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$, onde $e_j = (\delta_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$. Isto é,

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0, 0, \ldots)\,, \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)\,, \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Um espaço de Hilbert com uma base ortonormal enumerável é chamado **separável**. Um espaço de Hilbert é separável se, e somente, é separável no sentido dos espaços métricos, ou seja, possui um subconjunto enumerável denso. Se $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é base enumerável de $\mathcal{H}$, então todo elemento de $\mathcal{H}$ pode ser expresso por uma **série de Fourier** com respeito a esta base:

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n \,, \tag{1}$$

com convergência na norma de $\mathcal{H}$. Para uma demonstração deste e outros fatos básicos sobre conjuntos ortogonais/ortonormais em espaços de Hilbert, que tomariam mais tempo do que este minicurso permite, pode-se consultar [3, Chapter 3].

1.2 O operador *shift* e a pergunta central

Seguimos em direção à formulação da pergunta central deste minicurso. Dizemos que uma transformação linear entre espaços vetoriais com produto interno $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é:

- **limitada** se existe $c > 0$ tal que $\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} \leq c\|x\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$;
- **isométrica** se $\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} = \|x\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$;
- um **isomorfismo** se T é limitada, bijetiva e tem inversa $T^{-1} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ limitada;
- um **isomorfismo isométrico** se é isométrica e é um isomorfismo (note que T^{-1} é automaticamente isométrica).

Um fato básico (que convidamos a pessoa leitora a demonstrar!) é o de que T é limitada se, e somente se, é contínua. Uma condição suficiente para que T seja isométrica é que

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \;\forall\, x, y \in \mathcal{H}_1 \,;$$

tal condição também é necessária, em vista da identidade de polarização, que expressa o produto interno de dois elementos em termos das normas deles e de algumas de suas combinações lineares. Outro fato útil é que T é isomorfismo isométrico se, e somente se, a imagem de uma base ortonormal de $\mathcal{H}_1$ por T é sempre uma base ortonormal de $\mathcal{H}_2$. Ainda, é imediato que se T é isomorfismo isométrico então $\mathcal{H}_1$ é completo se, e somente se, $\mathcal{H}_2$ também o é.

Um **operador linear** em $\mathcal{H}$ é uma transformação linear com domínio e contradomínio em $\mathcal{H}$. Neste caso, um **subespaço invariante** de T é um subespaço vetorial fechado V de $\mathcal{H}$ satisfazendo $TV \subset V$, ou seja, $Tx \in V$ sempre que $x \in V$. Dizemos que V é **subespaço invariante não trivial** de T se $V \neq \{0\}$ e $V \neq X$.

Encontrar subespaços invariantes de um dado operador, ou mesmo provar que existe algum não trivial, pode ser uma tarefa muito difícil. No caso de espaços de dimensão finita (lembrando sempre, sobre os complexos!), sabemos que sempre existem subespaços invariantes não triviais: basta tomar o subespaço de dimensão 1 gerado por um autovetor. Mas em dimensão infinita, permanece o mistério: todo operador linear limitado em um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita possui um subespaço invariante não trivial? Isto é o chamado *Problema do Subespaço Invariante*, que se encontra em aberto até o momento.[3]

[3] No momento da escrita destas notas, uma solução afirmativa alegada por Per Enflo está sob processo de revisão.

Queremos determinar os subespaços invariantes de um operador em particular. Definimos o **operador *shift*** $S : \ell^2 \to \ell^2$ por

$$S\left((a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)\right) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots)\,, \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^2\,.$$

Estamos em posição de repetir nossa pergunta central, feita no início do capítulo, cuja resposta tomará o resto do nosso minicurso:

Quais são os subespaços invariantes de S em ℓ^2?

Um *spoiler* é que a resposta não é elementar, no sentido de que não é possível escrevê-la em termos de condições algébricas sobre as sequências. Associaremos a cada sequência uma série de potências ou, equivalentemente, uma função holomorfa, transferindo nosso problema para outro espaço de Hilbert por meio de equivalências unitárias.

Dois operadores $T_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, se dizem **unitariamente equivalentes** se existe um isomorfismo isométrico $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $UT_1 = T_2U$. Ou seja, do ponto de vista da estrutura de espaço de Hilbert, T_2 age em $\mathcal{H}_2$ exatamente como T_1 age em $\mathcal{H}_1$. Nestas condições, $V \subset \mathcal{H}_1$ é subespaço invariante de T_1 se, e somente se, UV é subespaço invariante de T_2. Em outros termos, determinar os subespaços invariantes de T_1 ou de T_2 são essencialmente o mesmo problema.

1.3 Séries de potências e o espaço H^2

Como adiantamos acima, nosso espaço de Hilbert de interesse terá séries de potências como seus elementos. Começamos verificando um fato simples.

Proposição 1.1. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

define uma função holomorfa nos disco unitário.

Demonstração. Lembramos que uma função é holomorfa em um disco se, e somente se, pode ser expressa como uma série de potências em torno do centro desse disco que converge absolutamente nesse disco. Assim, precisamos verificar que a série do enunciado converge absolutamente quando $|z| < 1$. Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz da álgebra linear e pela soma da série geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z^n|^2\right)^{1/2} = \|(a_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\ell^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} < \infty\,,$$

mostrando a convergência absoluta. ■

Enfim, vamos definir o espaço que queríamos. Chamamos de **espaço de Hardy** do disco unitário e denotamos por $H^2(\mathbb{D})$ ou, simplesmente, H^2, o seguinte conjunto:

$$H^2 = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \,:\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\forall\, z \in \mathbb{D}\,,\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Trata-se de um espaço vetorial, no qual consideraremos o produto interno "roubado" de ℓ^2, dado por

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,,\ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \implies \langle f,g\rangle_{H^2}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\,.$$

Da Proposição 1.1 e de toda a discussão feita até aqui, podemos imediatamente concluir o seguinte.

Proposição 1.2. *A associação*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$$

define um isomorfismo isométrico entre ℓ^2 e H^2. Em particular, H^2 é espaço de Hilbert separável.

Vamos cometer inofensivo um abuso de notação e denotar a função definida em $\mathbb{C}$ por $z\mapsto z^n$, ou sua restrição a qualquer subconjunto do plano, simplesmente por z^n. É claro que estes monômios pertencem a H^2 e têm norma 1. Além disso, eles são ortogonais entre si, ou seja, formam uma família ortogonal. Que eles formam uma base ortonormal de H^2 segue do fato de que z^n é associado à sequência canônica $e_n\in\ell^2$ pela associação da Proposição 1.2, que forma uma base ortonormal, mas também é consequência do fato a seguir.

Proposição 1.3. *Dada $f\in H^2$, com $f(z)=\sum a_n z^n$, defina*

$$\sigma_n(f)(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j\,.$$

Então, $\sigma_n(f)\to f$ na norma de H^2. Em particular, as funções polinomiais formam um subespaço denso de H^2.

Demonstração. A série de potências de $f-\sigma_n(f)$ possui os coeficientes de ordem maior que n iguais aos de f, mas os de ordem $\le n$ nulos. Logo,

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{H^2}^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_n|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pelo critério de Cauchy para convergência de séries numéricas, visto que $\sum|a_n|^2$ converge. ∎

Além da classe das funções polinomiais, H^2 contém também o conjunto de todas as funções holomorfas e limitadas no disco unitário, denotada por $H^\infty(\mathbb{D})$, ou H^∞. Isto é consequência de um critério de pertinência a H^2 em termos de médias integrais.

Proposição 1.4. *Dada f holomorfa no disco unitário, $f\in H^2$ se, e somente se,*

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta<\infty$$

e, em caso afirmativo, o supremo coincide com $\|f\|^2$.

Demonstração. Seja $f(z) = \sum a_n z^n$. A seguinte relação elementar será usada nesta demonstração e em outras partes do texto:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\overline{e^{ik\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \delta_{n,k}\,. \tag{2}$$

Neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_k(re^{i\theta})^n \cdot \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_n(re^{i\theta})^k}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n\overline{a_k} r^{n+k}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\,,\end{aligned}$$

sendo a troca entre limite e integral justificada por convergência uniforme. Considerando o supremo em r, segue o resultado. ∎

Agora que sabemos algumas coisas sobre H^2, vejamos qual é o operador que unitariamente equivalente a S via o isomorfismo isométrico da Proposição 1.2. Se $\phi \in H^\infty$ é uma função fixada, o **operador de multiplicação** de símbolo ϕ, denotado $M_\phi : H^2 \to H^2$, é definido como

$$M_\phi f = \phi \cdot f\,, \quad f \in H^2\,.$$

Vejamos o que ocorre com a série de potências de um elemento de H^2 ao aplicarmos M_z:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \implies z\,f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \cdots$$

Percebemos que M_z tem exatamente o efeito de transladar a sequência de coeficientes! Portanto, de acordo com toda a nossa discussão até aqui, nossa pergunta central pode ser reenunciada da seguinte forma:

Quais são os subespaços invariantes de M_z em H^2?

1.4 Séries de Fourier e um subespaço de L^2

Vamos associar ℓ^2 e H^2 com um terceiro espaço, que também será útil na descrição dos subespaços invariantes do shift. Para isto, devemos explorar o terreno das funções Lebesgue-integráveis e das séries de Fourier. Vamos apresentar muito sucintamente a construção da integral, deixando o convite para estudá-la em alguma das diversas referências sobre o assunto (por exemplo, [5]). Também mencionaremos vários resultados sem demonstração.

Dado um espaço topológico X, sua **σ-álgebra de Borel**, denotada $\mathcal{B}(X)$ é o subconjunto dos conjuntos das partes de X formada pelos conjuntos abertos, seus complementares (ou seja, os fechados) e todas os conjuntos obtidos a partir de uma quantidade enumerável de operações de intersecção, união e complemento entre conjuntos abertos e fechados. Uma **medida de Borel** em X é uma função $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ sempre que (A_n) é uma sequência de elementos disjuntos de $\mathcal{B}(X)$.

Um exemplo de medida de Borel é a **medida de Lebesgue** na reta real. Todo aberto da reta pode ser decomposto unicamente como uma união disjunta enumerável (finita ou infinita) de intervalos abertos $I_n = (a_n, b_n)$ e, assim, definimos a medida deste aberto como $\sum(b_n - a_n)$. O teorema de extensão de Caratheódory garante que esta função se estende unicamente a uma medida de Borel em $\mathbb{R}$.

Também podemos definir a **medida de Lebesgue normalizada no círculo unitário** de forma similar. Um **arco** é a imagem de um intervalo da reta pela aplicação $\theta \mapsto e^{i\theta}$. Se um arco I é a imagem de um intervalo com extremos $a, b \in \mathbb{R}$, sendo $0 < |b-a| \leq 2\pi$, o **comprimento normalizado** de I é $|b-a|/2\pi$. Novamente, todo aberto $\mathbb{T}$ é a união de uma família enumerável disjunta de arcos, o que deixa bem definido o comprimento normalizado de um aberto. Novamente pelo teorema de extensão de Caratheodóry, isto se estende a uma medida de Borel no círculo.

Dada uma medida de Borel μ em X, um **conjunto de medida nula** é um subconjunto $A \subset X$ contido em um $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\mu(B) = 0$. Dizemos que uma afirmação feita sobre os pontos de X vale **em quase todo ponto**, ou **q.t.p.**, ou **quase sempre**, se o conjunto dos pontos onde ela não vale tem medida nula. Por exemplo, é sabido que uma função em um intervalo é Riemann-integrável se, e somente se, é contínua em quase todo ponto, com respeito à medida de Lebesgue.

A integral com respeito a uma medida é definido a partir de casos particulares. Vamos chamar de **conjunto mensurável** a união entre um elemento de $\mathcal{B}(X)$ e um conjunto de medida nula. Uma **função mensurável** é uma $f : X \to \mathbb{C}$ tal que a imagem inversa de qualquer aberto de $\mathbb{C}$ é um conjunto mensurável em X. Uma **função simples** é uma combinação linear de funções funções características de conjuntos mensuráveis. Se s é simples, escrevendo $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)$ com A_j *disjuntos entre si*, definimos

$$\int_X s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{,} c_j \mu(A_j) \, ;$$

se $f : X \to [0, +\infty)$ é mensurável e não negativa, definimos

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_X s \, \mathrm{d}\mu \, ,$$

onde o supremo é tomado sobre as funções simples *não negativas* s satisfazendo $0 \leq s \leq f$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável, definimos

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu \, , \quad \text{onde} \quad f^+ = \max\{f, 0\} \, , \; f^- = \max\{0, -f\} \, ,$$

caso f^+ e f^- tenham ambas integral finita e, neste caso, dizemos que f é **integrável** com respeito a μ. Por fim, se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável, f será integrável se seuas partes real e imaginária o forem, e neste caso definimos

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \mathrm{Re}\, f \, \mathrm{d}\mu + i \int_X \mathrm{Im}\, f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Da construção acima, segue que *dadas duas funções em* $\mathbb{R}$ *que têm o mesmo valor em quase todo ponto, uma delas é integrável se, e somente se, a outra também é, e neste caso os valores das integrais coincidem.* Em outros termos, alterar o valor de uma função em um conjunto de medida nula não traz qualquer alteração ao valor da integral. No caso da medida de Lebesgue na reta, um dos principais resultados desta teoria de integração é que *toda função Riemann-integrável também é integrável no sentido de Lebesgue, com o mesmo valor para a integral.* Assim, não perdemos nada do que já sabemos da integral de Riemann. Outro fato importante é o de que

Os últimos densos parágrafos nos permitem definir um espaço de Hilbert muito relevante. Ainda fixada uma medida de Borel μ em X, vamos chamar de **quadrado-integrável** a qualquer função f definida e X tal que $|f|^2$ é integrável. No conjunto das funções quadrado-integráveis, declaramos a seguinte relação de equivalência:

$$f \sim g \iff f = g \text{ em quase todo ponto.}$$

Finalmente, definimos $L^2(\mu)$ como o conjunto das classes de equivalência acima. É costumeiro em análise, e faremos daqui em diante, o abuso de terminologia de dizer que uma função é elemento de $L^2(\mu)$, pois, para efeitos de integração, qualquer representante de uma mesma classe de equivalência pode ser escolhido indistintamente. Dito isto, um produto interno em $L^2(\mu)$ pode ser definido como antes:

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu\,, \quad f, g \in L^2(\mu)\,.$$

Outro resultado extremamente importante, representando uma das vitórias definitivas da teoria de Lebesgue sobre a integral de Riemman, é que *o produto interno acima torna $L^2(\mu)$ um espaço de Hilbert.*

No caso em que μ é a medida de Lebesgue em um intervalo limitado I de $\mathbb{R}$, vamos denotar $L^2(\mu)$ por $L^2(I)$; no caso da medida de Lebesgue normalizada no círculo, vamos usar a notação $L^2(\mathbb{T})$. Observe que $f \in L^2(\mathbb{T})$ se, e somente se $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ define uma função que pertence a $L^2([-\pi, \pi])$. Por fim, *o conjunto das (classes de equivalências das) funções contínuas é denso em $L^2(\mathbb{T})$*, valendo resultado análogo para $L^2([-\pi, \pi])$.

Considere a família de funções $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (onde, novamente, cometemos o abuso de notação de nomear uma função por sua lei de formação). Já sabemos de (2) que esta família é ortonormal. Suas combinações lineares são os chamados **polinômios trigonométricos**, pois suas partes real e imaginária são combinações lineares reais de dilatações das funções seno e cosseno (a quem nos lê e está na dúvida, fica o convite fazer o cálculo!). Assumiremos sem demonstração o resultado de que *polinômios trigonométricos formam um subespaço denso de L^2*. Isto tem como consequência que $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$. Isto nos permite definir **série de Fourier** de um elemento de f como em (1):

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{in\theta}\,, \quad e^{i\theta} \in \mathbb{T}\,,$$

onde a expressão acima faz sentido para *quase todo ponto do círculo* e a convergência se dá na norma de L^2. O número $\hat{f}(n)$ é o chamado **coeficiente de Fourier** de ordem n, definido por

$$\hat{f}(n) = \langle f, e^{in\theta}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Pela ortonormalidade das exponenciais, um cálculo revela imediatamente que

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad \text{para toda} \quad f \in L^2\,. \tag{3}$$

Considere o seguinte espaço de sequências bilaterais, isto é, indexadas pelos números inteiros:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,:\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Este espaço possui um produto interno análogo ao de $\ell^2(\mathbb{N})$ (omitiremos a expressão) e também é completo, ou seja, é espaço de Hilbert. Portanto, (3) implica que tomar a sequência de coeficientes de Fourier define uma aplicação isométrica de L^2 em $\ell^2(\mathbb{Z})$. Um resultado não trivial, conhecido como Teorema de Riesz-Fischer, é o de que esta aplicação é sobrejetiva, ou seja, *toda sequência indexado pelos inteiros quadrado-somável é a sequência de coeficientes de Fourier de uma função quadrado-integrável no círculo unitário.*

Para o nosso propósito de encontrar os subespaços invariantes de S em ℓ^2 (que para nós, lembre-se, é $\ell^2(\mathbb{N})$!), ou de M_z em $H^2(\mathbb{D})$, usaremos como ferramenta auxiliar não o espaço L^2, mas um de seus subespaços. A ideia é olhar apenas para a "parte analítica" da série de Fourier de cada função. Definimos

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{T}) &= \{ f \in L^2(\mathbb{T}) \,:\, \hat{f}(n) = 0 \;\forall\, n < 0 \} \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \,:\, f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} \right\}. \end{aligned}$$

Por toda a discussão feita até aqui, a bijeção

$$f \;\longleftrightarrow\; \left(\hat{f}(n)\right)_{n=0}^{\infty}$$

dá um isomorfismo isométrico entre $H^2(\mathbb{T})$ e ℓ^2. Em particular, isto garante que $H^2(\mathbb{T})$ é espaço de Hilbert com a norma herdada de L^2. Uma base ortonormal deste espaço é $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Vejamos o operador correspondente a S em $H^2(\mathbb{T})$, de acordo com o isomorfismo acima. Por fim, considere o operador $M_{e^{i\theta}}$ em L^2, dado pela multiplicação pela variável independente, definido da mesma forma que M_z mas agindo sobre função definidas no círculo, em vez de funções no disco. Expandindo um elemento de $H^2(\mathbb{T})$ em série de Fourier, temos

$$M_{e^{i\theta}} f(e^{i\theta}) = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i(n+1)\theta},$$

ou seja, a sequência de coeficientes de Fourier de $M_{e^{i\theta}} f$ é

$$\left(0, \hat{f}(0), \hat{f}(1), \hat{f}(2), \dots\right).$$

Logo, $M_{e^{i\theta}}$ translada a sequência de coeficientes em uma posição para a direita e, assim, age como o shift. Em particular, seus subespaços invariantes estão em correspondência com os subespaços invariantes de S em ℓ^2.

Em resumo, temos as seguintes correspondências entre os três espaços de Hilbert de nosso interesse discutidos até aqui:

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n & \text{série de potências} & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{série de Fourier} & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{in\theta} \\ H^2(\mathbb{D}) & \longleftrightarrow & \ell^2 & \longleftrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ M_z & & S & & M_{e^{i\theta}} \end{array}$$

Assim, séries de potências e séries de Fourier com as mesmas sequências de coeficientes são identificadas de forma natural. Daqui em diante, dada $f \in H^2(\mathbb{D})$, vamos denotar por f^* o elemento de $H^2(\mathbb{T})$ correspondente a f pelo isomorfismo acima e chamá-lo **função de fronteira** de f. Formalmente, obtemos f^* a partir de f tomando um limite quando z tendo à fronteira do disco unitário. Nosso próximo passo será verificar que esta operação de tomar o limite é, de fato, válida em um certo sentido.

2 Representação integral de Poisson e o Teorema de Fatou

Nossa próxima tarefa é demonstrar que toda função pertencente a H^2 possui limites de fronteira (mais precisamente, limites radiais em quase todo ponto). Trata-se de uma propriedade fundamental dos elementos do espaço de Hardy, que mostra uma linda interação entre análise complexa, séries de Fourier e teoria da medida e integração. Além disso, é um fato que precisa ser assumido para o adequado enunciado do teorema que descreve os subespaços invariantes de M_z.

2.1 A fórmula integral de Poisson a aproximações da identidade

Começamos com uma representação integral para os elementos de H^2. Ela mostra como recuperar uma função holomorfa no disco a partir de seus valores de fronteira, sem usar sua série de Fourier.

Teorema 2.1 (Representação integral de Poisson)**.** *Se $f \in H^2$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) f^*(e^{it})\, \mathrm{d}t\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Demonstração. Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e escreva $z = re^{i\theta}$, com $r \in [0,1)$ e $\theta \in (-\pi, \pi]$. Usando (2) e convergência uniforme para trocar ordem entre somatório e integral,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, r^n e^{in\theta} e^{i(n-k)t}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, r^{|k|} e^{ik\theta} e^{i(n-k)t}\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Note que cada termo acima é nulo a menos que $n = k$, motivo pelo qual pudemos trocar n por k, ou $|k|$, livremente. Agora, lembrando que $f^*(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ e usando convergência uniforme mais uma vez,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} f^*(e^{it})\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

A soma interna acima se reescreve como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik(\theta-t)} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ik(\theta-t)} = \frac{1}{1 - ze^{-it}} + \frac{\overline{z}e^{it}}{1 - \overline{z}e^{it}} = \frac{1 - r^2}{|1 - ze^{-it}|^2}\,.$$

Observando que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} + \frac{1 + \overline{z}e^{it}}{1 - \overline{z}e^{it}} \right) = \frac{1 - r^2}{|1 - ze^{-it}|^2}\,,$$

voltamos toda a cadeia de igualdades para obter o teorema. ∎

Vamos investigar o núcleo da representação integral acima. Dado $r \in (0,1)$, o **núcleo de Poisson** $P_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, é definido como

$$P_r(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta} .$$

Cálculos elementares, como os feitos na demonstração acima, mostram outras expressões para estas funções:

$$P_r(e^{i\theta}) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} .$$

Dadas duas funções $g, h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, definimos sua convolução $g * h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ como sendo

$$g * h(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) g(e^{i(\theta - t)})\, \mathrm{d}t ,$$

válida nos pontos $e^{i\theta}$ do círculo onde a integral está bem definida. Um resultado básico de análise harmônica é o de que a convolução entre duas funções Lebesgue-integráveis está bem definida q.t.p. e é também Lebesgue-integrável. Nesta terminologia, o Teorema 2.1 diz que

$$f(re^{i\theta}) = P_r * f^*(e^{i\theta}) , \quad e^{i\theta} \in \mathbb{T},\ f \in H^2 . \tag{4}$$

Uma família de funções a valores complexos $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ definidas em $\mathbb{T}$ é uma **aproximação da identidade** (adotando terminologia de [5, Chapter 3]) se satisfaz as seguintes condições:

- normalização: $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta = 1$ para todo $\delta > 0$;
- concentração em torno de 1: existe $M > 0$ tal que $|K_\delta(e^{i\theta})| \leq \dfrac{M\delta}{|\theta|^2}$ para todo $\delta > 0$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$;
- crescimento controlado: existe $M > 0$ tal que $|K_\delta(e^{i\theta})| \leq \dfrac{M}{\delta}$ para todo $\delta > 0$.

A definição acima sugere que consideremos $\delta \to 0$, mas é claro poderíamos considerar $\delta \to \infty$, $\delta \to a$ para um dado $a \in \mathbb{R}$, ou mesmo uma família enumerável $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $n \to \infty$, com as devidas adaptações nas condições de desigualdade. As 3 propriedades acima dizem que $\theta \mapsto K_\delta(e^{i\theta})$ se concentra em torno de 0 à medida que $\delta \to 0$ e seus valores perto de 0 explodem, mas de forma controlada.

Como veremos em breve, aproximações da identidade garantem aproximações q.t.p.-convergentes via convolução, tipo de resultado fundamental em análise harmônica. A esta altura, deve estar clara qual é a família funções de nosso interesse.

Proposição 2.1. *A família* $\{P_r\}_{0<r<1}$ *é uma aproximação da identidade.*

Demonstração. No nosso caso, vamos considerar $r \to 1^-$. Vamos verificar as três propriedades.

- *Normalização:* Basta integrar termo a termo a série que define P_r, procedimento justificado por convergência uniforme:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = 1\,.$$

- *Concentração em torno de* 1. Devemos verificar que $P_r(e^{i\theta}) \leq M(1-r)/\theta^2$ para algum $M > 0$. Observe que $\theta \mapsto \theta^2/(1-\cos\theta)$ é uma função limitada, pois tende a 2 quando $\theta \to 0$ e tem denominador inferiormente limitado quando θ está longe de 0. Então,

$$P_r(e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos\theta)} \leq \frac{(1-r)(1+r)}{2r(1-\cos\theta)} \leq \frac{(1-r)(1+r)C}{2r\theta^2}$$

para um certo $C > 0$. Ainda, $(1+r)/2r$ é limitado, o que dá a estimativa desejada.

- *Crescimento controlado.* Devemos mostrar que $P_r(e^{i\theta}) \leq M/(1-r)$ para algum $M > 0$. Mas

$$P_r(e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos\theta)} \leq \frac{1-r^2}{(1-r)^2} \leq \frac{2}{1-r}\,,$$

ou seja, $M = 2$ é suficiente. ∎

2.2 O Teorema de Fatou

Precisamos invocar mais uma noção da teoria de integração. Dada $g : I \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integrável em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que um ponto $x_0 \in I$ é **ponto de Lebesgue** de g se $g(x_0)$ estiver bem definido (lembramos que g precisa, a princípio, estar definido apenas q.t.p.) e valer a relação

$$\lim_{\substack{a,b\to x_0\\ a<x_0<b}} \frac{1}{b-a}\int_a^b |g(x) - g(x_0)|\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

onde o limite é tomado sobre intervalos $[a,b] \subset I$ contendo θ. Definimos noção análoga de ponto de Lebesgue quando g é integrável em $\mathbb{T}$, usando arcos em vez de intervalos.

Outro resultado importante da teoria da medida e integração que admitiremos aqui sem prova é o Teorema da Diferenciação de Lebesgue: *quase todo ponto de um intervalo é ponto de Lebesgue de uma dada função integrável neste intervalo.* O conjunto dos pontos de Lebesgue inclui, necessariamente, os pontos de continuidade da função.

Proposição 2.2. *Seja $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ uma aproximação da identidade. Dada $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ integrável, se $e^{i\theta}$ é ponto de Lebesgue de g então $g * K_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} g(e^{i\theta})$. Em particular, $g * K_\delta \to g$ q.t.p. no círculo unitário.*

Demonstração. Não há perda de generalidade em assumir que $\theta = 0$ e $g(1) = 0$, bastando compor g com uma rotação e subtraindo constantes, caso necessário. Assim, basta demonstrar que, nestas condições, $|g * K_\delta(1)| \to 0$. Denote

$$\mathcal{A}(r) := \frac{1}{r}\int_{|t|\leq r} |f(e^{it})|\,\mathrm{d}t\,, \quad r \in (0,\pi)\,,$$

de forma que $\mathcal{A}(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$, pela hipótese de que 0 é ponto de Lebesgue. Dado que $\mathcal{A}(r) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|/r \leq \int_{\pi}^{\pi} |f|/\delta$ quando $|r| \geq \delta$, é fácil ver que $\mathcal{A}(r)$ é limitado com respeito a r.

Ao escrever a definição da convolução, combinaremos dois truques. O primeiro, padrão em análise, é isolar o ponto de interesse, no caso 0. O segundo é fazer, longe de 0, o que se chama decomposição diádica. Ou seja,

$$|f * K_\delta(1)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})K_\delta(e^{-it})\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_{|t|\leq\delta} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^n\delta<|t|\leq 2^{n+1}\delta}\right)\left|f(e^{it})K_\delta(e^{-it})\right|\mathrm{d}t\,.$$

Observe que, para cada δ, o somatório acima é finito, pois o domínio de integração será vazio para n suficientemente grande.

A integral em torno da origem é estimada usando o crescimento controlado de $\{K_\delta\}$ e a hipótese de ponto de Lebesgue:

$$\int_{|t|\leq\delta} |f(e^{it})K_\delta(e^{-it})|\,\mathrm{d}t \leq M\mathcal{A}(\delta) \xrightarrow{\delta\to 0} 0\,.$$

Resta, portanto, fazer a estimativa nos intervalos diádicos. Seja $\varepsilon > 0$. Podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon$ (observe que que N depende apenas de ε, e não de δ). Usando a propriedade de concentração na origem de $\{K_\delta\}$,

$$\begin{aligned}\int_{2^n\delta<|t|\leq 2^{n+1}\delta} |f(e^{it})K_\delta(e^{-it})|\,\mathrm{d}t &\leq M\delta\int_{2^n\delta<|t|\leq 2^{n+1}\delta}\frac{|f(e^{it})|}{|t|^2}\,\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{M\delta}{2^{2n}\delta^2}\int_{|t|\leq 2^{n+1}\delta}|f(e^{it})|\,\mathrm{d}t\\ &= 2^{-n}\cdot 2M\mathcal{A}(2^{n+1}\delta)\,.\end{aligned}$$

Agora, podemos diminuir δ, se necessário, de forma a garantir que $\mathcal{A}(2^{n+1}\delta) < \varepsilon$ para $n = 1, \ldots, N$. Segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^n\delta<|t|\leq 2^{n+1}\delta} |f(e^{it})K_\delta(e^{-it})|\,\mathrm{d}t &\leq \left(\sum_{n=1}^{N} + \sum_{n>N}\right) 2^{-n}\cdot 2M\mathcal{A}(2^{n+1}\delta)\\ &\leq MN\varepsilon + 2M\varepsilon\cdot\sup\mathcal{A}(r) \;\leq\; C\varepsilon\end{aligned}$$

para algum $C > 0$. Juntando todas as estimativas acima, segue o resultado. ■

No caso particular dos núcleos de Poisson, o resultado da proposição acima foi obtida por Pierre Fatou logo após Henri Lebesgue introduzir sua nova integral. Registramos abaixo o enunciado.

Corolário 2.1 (Teorema de Fatou)**.** *Se g é integrável no círculo unitário, então $g * P_r(e^{i\theta}) \to g(e^{i\theta})$ quando $r \to 1^-$ para quase todo ponto g.*

Todo o trabalho feito acima pode ser ainda mais particularizado: quando $g = f^*$ é a função de fronteira de uma função $f \in H^2$, a relação (4) nos diz que $f(re^{i\theta})$ converge q.t.p. para f^*. Se $\xi \in \mathbb{T}$ e f é holomorfa em $\mathbb{D}$, dizemos que $L \in \mathbb{C}$ é o **limite radial** de f em ξ, ou que $f(z)$ converge radialmente para L em ξ, se $f(r\xi) \to L$ quando $r \to 1^-$. Portanto, o Teorema de Fatou possui a seguinte consequência.

Teorema 2.2. *Toda $f \in H^2(\mathbb{D})$ possui limites radiais em quase todo ponto do círculo unitário. A função q.t.p. definida por estes limites radiais coincide com a função de fronteira f^*, que pertence a $H^2(\mathbb{T})$ e tem coeficientes de Fourier iguais os coeficientes da série de potências de f. Reciprocamente, todo elemento de $H^2(\mathbb{T})$ é a função de fronteira de uma função pertencente a $H^2(\mathbb{D})$, dada pela sua integral de Poisson.*

Isto dá um significado intrínseco, ou seja, independente de expansão em base ortonormal, do isomorfismo isométrico $H^2(\mathbb{D}) \longleftrightarrow H^2(\mathbb{T})$ da p. 12. Outra consequência é que a norma e o produto interno de H^2 podem ser escritos em forma integral:

$$\|f\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta\,, \quad \langle f, g\rangle_{H^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta})\overline{g^*(e^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{5}$$

De agora em diante, não distinguiremos mais as duas realizações de H^2, ou seja, o símbolo f pode representar uma função holomorfa no disco ou uma função quadrado-integrável no círculo intercambiavelmente. Em particular, o limite radial de f em um ponto $e^{i\theta}$ será denotado $f(e^{i\theta})$. Também denotaremos a expansão em série de potências de f por

$$\hat{f}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n\,.$$

Neste ponto estamos prontos para, finalmente, rumar à descrição dos subespaços invariantes de M_z.

3 O Teorema de Beurling e a fatoração canônica

Finalmente, poderemos verificar a resposta à pergunta central deste minicurso, descoberta por Arne Beurling no final dos anos 1940: os subespaços invariantes de M_z são as imagens dos operadores de multiplicação cujo símbolo tem limite radial unimodular em quase todo ponto do círculo unitário. Como aplicação do Teorema de Beurling, obteremos o teorema de fatoração canônica, que mostra uma estrutura multiplicativa dos elementos de H^2. Concluiremos com comentários sobre a descrição analítica de cada um dos fatores da fatoração canônica.

3.1 Funções interiores e o Teorema de Beurling

Agora que já sabemos que toda função de H^2 possui limites radiais q.t.p., vamos isolar uma classe especial de funções com base nestes limites. Dizemos que ϕ é uma **função interior** se $|\phi(e^{i\theta})| = 1$ q.t.p. em $\mathbb{T}$. Um exemplo óbvio de função interior é z. Convidamos quem nos lê a verificar os seguintes exemplos:

- $\phi(z) = \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, onde $z_0 \in \mathbb{D}$ é dado;
- $\psi(z) = e^{-\frac{\xi+z}{\xi-z}}$, onde $\xi \in \mathbb{T}$ é dado;
- produtos finitos de funções das duas formas acima.

Lema 3.1. *Se $\phi \in H^2$ é uma função interior, então o operador de multiplicação $M_\phi : H^2 \to H^2$ definido por*

$$M_\phi f = \phi \cdot f\,, \quad f \in H^2\,,$$

é isométrico e, em particular, contínuo.

Demonstração. Pela forma integral da norma dada em (5),

$$\|\phi f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta = \|f\|^2\,,$$

ou seja, $\|M_\phi f\| = \|f\|$. ∎

Segue a prometida descrição dos subespaços invariantes de M_z. Tente enunciar (e provar!) este resultado puramente em termos de sequências e perceba como seria difícil determinar os subespaços invariantes de S sem sair do ambiente de ℓ^2. A demonstração que vamos apresentar foi extraída de [2].

Teorema 3.1 (Beurling)**.** *Os subespaços invariantes de M_z em H^2 são exatamente os conjuntos da forma $\phi \cdot H^2$, onde ϕ é uma função interior. Além disso, ϕ é unicamente determinada, a menos de constantes multiplicativas de módulo* 1*.*

Demonstração. Começamos mostrando que que ϕ é essencialmente única. Suponha que ϕ, ψ são interiores e $\phi H^2 = \psi H^2$. Em particular, $\phi \in \psi H^2$, logo $\phi = \psi g$ para alguma

$g \in H^2$ e, da mesma forma, $\psi = \phi h$ com $h \in H^2$. Q.t.p. no círculo unitário, $1/\phi = \overline{\phi}$ e $1/\psi = \overline{\psi}$, logo

$$\psi\overline{\phi} = \frac{\psi}{\phi} = h \in H^2 \quad \text{e} \quad \phi\overline{\psi} = \frac{\phi}{\psi} = g \in H^2 .$$

Isto é, tanto $\psi\overline{\phi}$ quanto $\phi\overline{\psi}$ são elementos de L^2 cujos coeficientes de Fourier de ordem negativa são todos nulos. Portanto, o único coeficiente de $\psi\overline{\phi}$ que pode ser não nulo é justamente o de ordem 0, mostrando que $\psi = c\phi$ para algum $c \in \mathbb{C}$. Além disso,

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi|^2 \, \mathrm{d}\theta = 1$$

e, então, c é unimodular.

Vejamos agora que ϕH^2 é subespaço invariante sempre que ϕ é interior. Temos

$$\begin{aligned} f \in \phi H^2 &\implies \exists h \in H^2 \,;\, f = \phi h \\ &\implies M_z f = zf = z \cdot (\phi h) = \phi \cdot (zh) \in \phi H^2 \end{aligned}$$

e, assim, $M_z(\phi H^2) \subset \phi H^2$. Para ver que ϕH^2 é fechado, tome $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, com $f_n \in \phi H^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e o limite sendo tomado na topologia de H^2. Escreva $f_n = \phi h_n$, onde $h_n \in H^2$. Pelo Lema 3.1, $\|h_n - h_m\| = \|f_n - f_m\|$ e, portanto, a sequência (h_n) é de Cauchy em H^2, dado que (f_n) o é. Por completude, existe o limite $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ e, pela continuidade da multiplicação por ϕ,

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \phi h_n = \phi \lim_{n\to\infty} h_n = \phi h .$$

Isto mostra que ϕH^2 é fechado e conclui a primeira parte da demonstração.

Agora, tome um subespaço invariante V de M_z. Nosso objetivo é construir ϕ interior satisfazendo $V = \phi H^2$. Para começar, suponha que $M_z V = V$. Denote

$$n_0(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, \hat{f}(n) \neq 0\} ,$$

ou seja, $n_0(f)$ é a ordem do primeiro termo não nulo da série de potências de f. Tome um $h \in V$ que minimiza n_0 entre os elementos de V. Pela hipótese $M_z V = V$, $h = M_z g$ para alguma $g \in V$, logo $n_0(h) = n_0(g) + 1$. Daí $n_0(g) < n_0(h)$, contrariando a minimalidade de $n_0(h)$, o que dá uma contradição. Assim, o que acabamos que mostrar é que $M_z V \subsetneq V$.

Uma vez que $M_z V$ é fechado e diferente de V, o complemento ortogonal de $M_z V$ em V é não trivial e podemos tomar $\phi \in V \cap (M_z V)^{\perp}$ não nulo. Dividindo pela norma, se necessário, podemos tomar ϕ satisfazendo $\|\phi\| = 1$. Para todo $n \geq 1$, $(M_z)^n \phi$ pertence a $M_z V$ e então deve ser ortogonal a ϕ, logo

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{i\theta})\overline{(M_z)^n\phi(e^{i\theta})} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{i\theta})\overline{e^{in\theta}\phi(e^{i\theta})} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta .$$

Assim, $|\phi|^2$ é ortogonal a z^n em L^2 para todo $n > 0$. Tomando o conjugado nas igualdades acima, segue que $|\phi|^2$ é ortogonal a z^n também para $n < 0$. Desta forma, a expansão de $|\phi|^2$ em série de Fourier possui apenas o termo de ordem 0, que é constante. Ou seja, $|\phi|^2 = c$ q.t.p no círculo para alguma constante complexa c. O valor da constante é

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi|^2 \, \mathrm{d}\theta = \|\phi\|^2 = 1 ,$$

o que mostra que ϕ é interior.

Nossa tarefa agora é mostrar que $\phi H^2 = V$. Como V é invariante por M_z, então $z^n\phi = (M_z)^n\phi \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por linearidade, V deve conter todas as combinações lineares de funções da forma $z^n\phi$, ou seja $p\phi \in V$ para todo polinômio p. O fecho do conjunto dos polinômios em H^2 é todo o H^2, pela Proposição 1.3, e, pela continuidade de M_ϕ, o fecho de $\{p\phi : p \text{ é polinômio}\}$ é ϕH^2. Este fecho deve estar contido em V, que é fechado. Concluímos que $\phi H^2 \subset V$ e, para mostrar que está inclusão é uma igualdade, vamos ver que o complemento ortogonal de ϕH^2 em V é trivial. Tome $f \in V$ ortogonal a ϕH^2. Por um lado,

$$n \geq 0 \implies \langle f\overline{\phi}, z^n\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{\phi(e^{i\theta})\, e^{in\theta}}\, \mathrm{d}\theta = \langle f, (M_z)^n\phi\rangle_{H^2} = 0\,.$$

Por outro lado, $(M_z)^n f$ partence a M_zV e é ortogonal a ϕ, de forma que

$$\begin{aligned} n > 0 \implies \langle f\overline{\phi}, z^{-n}\rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{\phi(e^{i\theta})\, e^{-in\theta}}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta})\overline{\phi(e^{i\theta})}\, \mathrm{d}\theta = \langle (M_z)^n f, \phi\rangle_{H^2} = 0\,. \end{aligned}$$

Ou seja $f\overline{\phi}$ é ortogonal a todas as funções $e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, logo deve ser o vetor nulo de L^2. Portanto, $f = 0$. Segue que $V \cap (\phi H^2)^\perp = \{0\}$, mostrando que $\phi H^2 = V$. ■

3.2 Vetores cíclicos e a fatoração canônica

Nosso próximo resultado é uma consequência do elegante Teorema de Beurling, que acabamos de provar. Trata-se da fatoração canônica, que dá uma mostra de como o operador *shift* e o espaço H^2 são intimamente relacionados. Como veremos, todo elemento do espaço de Hardy tem um fator interior, que dá origem a um subespaço invariante de M_z, e um fator cíclico com respeito a este operador.

Dados um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um operador linear contínuo T em $\mathcal{H}$, a **órbita** de um vetor $x \in \mathcal{H}$ é o conjunto $\{x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots\}$. Dizemos que x é um **vetor cíclico** de T se o subespaço vetorial gerado por sua órbita é denso em $\mathcal{H}$. No caso particular em que $\mathcal{H} = H^2$ e $T = M_z$, a órbita de uma função f é $\{z^n f : n \in \mathbb{N}\}$ e o subespaço que ela gera é $\{pf : p \text{ polinômio}\}$. Usaremos a notação E_f para o fecho deste subespaço, que é o menor subespaço invariante de S que contém f. Portanto,

$$f \text{ é vetor cíclico de } M_z \iff E_f = H^2\,.$$

Um exemplo imediato de função cíclica é a constante 1, pois sua órbita consiste dos monômios, que geram linearmente todos os polinômios.

Teorema 3.2 (Fatoração canônica)**.** *Toda $f \in H^2$ pode ser escrita como $f = \phi \cdot F$, onde ϕ é interior e F é vetor cíclico de M_z. Os fatores ϕ e F são únicos, a menos de constantes multiplicativas unimodulares.*

Demonstração. Uma vez que E_f é um subespaço invariante de M_z, $E_f = \phi H^2$ para alguma função interior ϕ, pelo Teorema de Beurling. Em particular, $f = \phi F$ para alguma

$F \in H^2$. Vamos mostrar que F é vetor cíclico de M_z. Apelando novamente ao Teorema de Beurling, $E_F = \psi H^2$ para alguma ψ interior. Agora,

$$z^n f = z^n \cdot (\phi F) = \phi \cdot (z^n F)$$

e, tomando o fecho do subespaço gerado,

$$E_f = \phi E_F = \phi\psi H^2 \quad \therefore \quad \phi H^2 = \phi\psi H^2 \,.$$

Pela no Teorema de Beurling, ψ deve ser uma constante unimodular. Logo, $E_F = H^2$, ou seja, F é cíclica.

Tendo obtido a existência da fatoração, vejamos a unicidade. Para isto, suponha que $f = \phi F = \psi G$, com ϕ, ψ interiores e F, G cíclicas. Multiplicando por potências de z, fazendo combinações lineares e tomando o fecho, temos

$$\phi H^2 = \phi E_F = E_f = \psi E_G = \psi H^2$$

e, novamente pela unicidade do Teorema de Beurling, $\phi = c\psi$ para algum $c \in \mathbb{T}$. ∎

Como exemplo, vamos mostrar que um polinômio é cíclico se, e somente se, não possui zeros no disco unitário aberto. Se p é um polinômio com um zero $z_0 \in \mathbb{D}$, então pf possui zero no mesmo ponto z_0 para toda $f \in H^2$, logo E_p está contido no subespaço $\{g \in H^2 \,:\, g(z_0) = 0\}$, que é fechado e próprio. Assim, p não pode ser cíclico se tem zero no disco unitário.

Caso contrário, fatoramos $p(z) = C \cdot (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$, com C constante e $|\lambda_j| \geq 1$, e argumentamos por indução. No caso $n = 1$, observe que

$$\begin{aligned}
|\lambda| \geq 1\,,\ f \perp E_{z-\lambda} &\implies f \perp (M_z)^n(z-\lambda) = z^{n+1} - \lambda z^n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\implies \langle f, z^{n+1} - \lambda z^n \rangle = \hat{f}(n+1) - \lambda \hat{f}(n) = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\implies f(z) = \hat{f}(0) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \hat{f}(n-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(0)\lambda^n \implies f = 0\,,
\end{aligned}$$

o que mostra que $z - \lambda$ é cíclico se $|\lambda| \geq 1$. Assim, $z - \lambda_1$ é cíclico. Supondo que $\prod_{j=1}^{n-1}(z - \lambda_j)$ é cíclico, observe que

$$pq = \frac{p}{C(z - \lambda_n)}(z - \lambda_n)q$$

para todo polinômio q e o conjunto $\{(z - \lambda_n) \,:\, q \text{ polinômio}\}$ é denso, pois z_n é cíclico. Então $\{pq \,:\, q \text{ polinômio}\}$ também deve ser denso, mostrando a ciclicidade de p.

3.3 Mais sobre a fatoração canônica

Alguém que lê estas notas poderia questionar a necessidade de $H^2(\mathbb{D})$ no nosso tratamento do operador S e do Teorema de Beurling. De fato, tudo pode enunciado e demonstrado apenas em termos de $H^2(\mathbb{T})$, não precisando recorrer ao uso de funções holomorfas. Fechamos o minucurso enunciando alguns resultados que evidenciam a utilidade da análise complexa neste estudo, dando caracterizações analíticas para funções interiores e exteriores. Ficará clara a impossibilidade de obter estas informações puramente em termos de séries de Fourier.

Infelizmente não teremos tempo de apresentar as devidas demonstrações. Como referência, deixamos [4, Chapter 2].

Um **fator de Blaschke** é uma função B_λ da forma

$$B_\lambda(z) = \frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{\lambda - z}{1 - \overline{\lambda} z}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

onde $\lambda \in \mathbb{D}$ é fixado. Aqui fazemos a estranha convenção de que $|\lambda|/\lambda = 0$ quando $\lambda = 0$, de forma que $B_0(z) = z$. A menos do produto por uma constante unimodular, um B_λ é o automorfismo do disco unitário que envia λ em 0 e vice-versa. A constante multiplicativa tem o propósito de garantir que $B_\lambda(0) = |\lambda|$, o que é conveniente por razões técnicas.

Um cálculo imediato mostra que um fator de Blaschke é uma função interior, e portanto produtos finitos destes fatores também são interiores. Uma condição necessária e suficiente para um produto de Blaschke infinito $\prod_{n=1}^{\infty} B_\lambda$ ser bem definido como uma função em $\mathbb{D}$ é que a sequência (λ_n) satisfaça a **condição de Blaschke**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\lambda_n|) < \infty\,.$$

Teorema 3.3. *A sequência de zeros de uma função não nula $f \in H^2$ deve satisfazer a condição de Blaschke. Neste caso, o produto de Blaschke B correspondente a estes zeros é uma função interior.*

Por fim, toda função interior pode ser escrita como um produto de Blaschke (que é 1, caso não haja zeros) e uma função interior que não se anula no disco unitário. Os fatores são unicamente determinados.

Uma função interior sem zeros no disco é chamada **função interior singular**. Este termo tem sua origem em um conceito de teoria da medida: uma **medida singular** com respeito à medida de Lebesgue normalizada em $\mathbb{T}$, digamos μ, é uma medida no círculo para a qual existe $A \subset \mathbb{T}$ de medida de Lebesgue nula tal que $\mu(\mathbb{T} \backslash A) = 0$. Em outros termos, μ "mora" em um conjunto de comprimento 0.

Teorema 3.4. *Uma função $h \in H^2$ é interior singular se, e somente se, é da forma*

$$h(z) = c \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z}\, \mathrm{d}\mu(\xi)\right), \qquad z \in \mathbb{T}\,,$$

para uma constante c de módulo 1 e uma medida singular μ.

Os dois teoremas acima caracterizam todas as funções interiores. Funções cíclicas com respeito a M_z também possuem uma forma conhecida. Chamamos de **função exterior** a toda função $F \in H^2$ da forma

$$F(z) = c\,\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|f(e^{i\theta})|\, \mathrm{d}\theta\right), \qquad z \in \mathbb{T}\,. \tag{6}$$

onde $c \in \mathbb{T}$, $f \in L^2(\mathbb{T})$ e $\log|f|$ é integrável.

Teorema 3.5. *Uma função pertencente a H^2 é vetor cíclico do operador M_z se, e somente se, é uma função exterior.*

Concluímos que toda $f \in H^2$ se decompõe de forma essencialmente única como $f = B \cdot h \cdot F$, onde B é o produto de Blaschke dos zeros de f, h é interior singular e F é exterior. Esta estrutura multiplicativa permanece presente em outros espaços de funções, como os outros espaços de Hardy H^p, do qual H^2 é um caso particular.

Encerramos este minicurso com o convite feito no subtítulo. Uma indicação de leitura é [1], referência padrão sobre os H^p e outras classes de funções no disco. Em [4], além de vários resultados adicionais mostrando a bela interação entre análise complexa e teoria dos operadores, pode ser encontrada uma bibliografia comentada para quem tiver curiosidade de conhecer mais sobre o belo mundo dos espaços de funções holomorfas.

Bibliografia

[1] DUREN, P. L. **Theory of H^p Spaces**. New York: Academic Press, 1970.

[2] HELSON, H. **Lectures on Invariant Subspaces**. New York: Academic Press, 1964.

[3] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[4] MARTÍNEZ-AVENDAÑO, R., ROSENTHAL, P. **An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space**. New York: Springer, 2007.

[5] STEIN, E., SHAKARCHI, R. **Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces**. Princeton: Princeton University Press (Princeton Lectures in Analysis), 2004.