MINICURSO

Funções Geradoras e a Contagem de Matrizes (0,1) Simétricas

Oliveira, Carlos Eduardo [1]; Oliveira Santos , José Plínio [2]

Resumo:*Neste trabalho apresentaremos uma resolução original para a solução do problema: quantas matrizes (0,1) (cujas entradas são todas iguais a 0 ou 1) simétricas de ordem n podem ser construídas com a restrição adicional de que a soma dos elementos de qualquer linha é fixada para cada inteiro $0, 1, 2, \ldots, n$ como por exemplo:*

- *Quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem 5 podem ser construídas, de modo que a soma dos elementos de qualquer linha seja igual a 2?*
- *Quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem 4 podem ser construídas, de modo que $s(1) = 2, s(2) = s(3) = 3$ e $s(4) = 4$, onde $s(i)$ indica a soma dos elementos da linha i.*

A proposta de resolução deste problema envolve a utilização de funções geradoras, uma ferramenta de extrema importância e com diversas aplicações, mas pouco estudado em cursos superiores na área de matemática e ciências exatas. Neste sentido, a proposta do minicurso é, a introdução dessa ferramenta através de vários exemplos, incluindo o problema das matrizes simétricas, cuja solução pode ser modelada por uma função geradora de n variáveis com expansão polinomial em que o coeficiente de $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$, $t_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ expressa o número de matrizes em que a soma da linha i é igual a t_i.

Palavras-chave:*combinatória, função geradora, matrizes, contagem, teoria dos números.*

[1]Afiliação. IFSP
[2]Afiliação. Unicamp

1 INTRODUÇÃO

O estudo das funções geradoras é fundamental em diversos campos da matemática e das ciências exatas aplicadas, sendo uma ferramenta poderosa e capaz de modelar e analisar uma ampla série de sequências. As funções geradoras são frequentemente utilizadas em análise combinatória, combinatória enumerativa, probabilidades, estatística, teoria dos números, teoria dos grafos e outras ramos da matemáticas. Elas podem oferecer uma estratégia elegante e eficaz de expressar sequências finitas ou infinitas de números ou eventos discretos, permitindo a simplificação e manipulação de problemas mais complexos. Além disso, as funções geradoras propiciam soluções analíticas para problemas que, de outra forma, seriam desafiadores de se estudar. Dessa forma, compreender e dominar as funções geradoras não apenas fortalece a base matemática, mas também abre portas para a resolução de uma variedade de problemas práticos em diversas áreas do conhecimento.

2 Funções Geradoras

Dado um fenômeno discreto que possa ser descrito pela sequência $a_0, a_1, \ldots$, dizemos que a função f é a função geradora desta sequência se f for da forma:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.x^i$$

Um bom exemplo de aplicação dessa simples ideia pode ser visto através do problema: uma urna possui 3 bolas amarelas, 2 bolas brancas e 1 bola cinza. De quantas formas podemos retirar um grupo de n bolas dessa urna, onde $n = 0, 1, 2, \ldots, 6$?

Antes de proceder à função geradora, vamos tentar avaliar como podem se dar essas retiradas para alguns valores de n:

- se $n = 0$, existe apenas uma maneira de realizar a retirada, a saber, não retirando nada;
- se $n = 1$, as retiradas podem ser a,b,c, ou seja, existem 3 maneiras de realizar a retirada;
- se $n = 2$, as retiradas podem ser aa,bb,ab,ac,bc ou seja, existem 5 maneiras de realizar a retirada;

Não é complicado notar que, à medida em que aumentamos a quantidade de bolas a ser retirada, bem como a quantidade total de bolas da urna no início do problema, que nossa tarefa de contar por exaustão pode se tornar impraticável. Nesse caso, trabalhar com uma função geradora pode ser uma estratégia interessante.

Note que em uma retirada qualquer, a quantidade de bolas amarelas retiradas pode ser $0, 1, 2, 3$, já que existem 3 bolas amarelas disponíveis na urna. Da mesma forma, a quantidade de bolas brancas pode ser $0, 1, 2$ e de bolas cinzas $0, 1$. Note também que a soma das quantidades de bolas amarelas, brancas e cinzas é o total de bolas retiradas. Assim, podemos lançar mão do princípio multiplicativo e controlar o aparecimento de bolas de uma determinada cor por um polinômio específico em que suas possíveis quantidades serão expressas nos expoentes de um certo polinômio, da seguinte maneira:

- polinômio que controla o aparecimento das bolas amarelas $(1 + x + x^2 + x^3)$, note que $1 = x^0$ representa a situação em que não é retirada nenhuma bola amarela;
- polinômio que controla o aparecimento das bolas brancas $(1 + x + x^2)$;
- polinômio que controla o aparecimento das bolas cinzas $(1 + x)$

Ao multiplicarmos os três polinômios, obteremos todas as possíveis retiradas de bolas dessa urna:

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3)}_{amarelas}\underbrace{(1 + x + x^2)}_{brancas}\underbrace{(1 + x)}_{cinzas} = x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 3x + 1$$

A interpretação deste resultado indica que o coeficiente de x^n, com $0 \leq n \leq 6$ indica o número de maneiras de se retirar n bolas da urna:

- o termo x^6 indica que existe apenas uma maneira de se retirar 6 bolas da urna, a saber, a retirada da todas as bolas: $aaabbc$;
- o termo $3x^5$ indica que existem 3 maneiras de se retirar 5 bolas da urna, são elas: aaabb, aaabc e aabbc;
- o termo $5x^4$ indica que existem 5 maneiras de se retirar 4 bolas da urna, são elas: aaab, aaac, aabb, aabc, abbc.

3 Aplicações Clássicas das Funções Geradoras

O conceito das funções geradoras mostra-se como uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento da Combinatória Enumerativa, uma vez que estabelece um processo de contagem controlado por uma função algébrica e isso nos leva à possibilidade de interpretar essa função de diversas formas. O matemático indiano Srinivasa Ramanujan $(1887 - 1920)$ desenvolveu diversas interpretações e casos de usos das funções geradoras em seus trabalhos, especialmente sobre as partições de inteiros.

Definição 3.1. *Dado um inteiro positivo n, define-se como partição λ de n, qualquer maneira de representar n como a soma de inteiros positivos $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ tais que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$. Neste caso, dizemos que a partição λ possui partes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$*

- $n = 3$ possui 3 partições, a saber: 3, $2+1$, $1+1+1$;
- $n = 4$ possui 5 partições, a saber: 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$;
- $n = 7$ possui 15 partições, a saber: 7, $6+1$, $5+2$, $5+1+1$, $4+3$, $4+2+1$, $4+1+1+1$, $3+3+1$, $3+2+2$, $3+2+1+1$, $3+1+1+1+1$, $2+2+2+1$, $2+2+1+1+1$, $2+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1+1$.

Estabelecer processos de controle e contagem de partições é um dos principais atributos da combinatória enumerativa, em linhas gerais, diversos tipos de partições de inteiros podem ser controladas com o auxílio de uma função geradora, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.1 (partições irrestritas de n)**.** *Observe que dado $n \in \mathbb{Z}^*$, podemos controlar o número de partições irrestritas de n pela função geradora:*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)\ldots. \tag{1}$$

Veja que cada fator da expressão 1 controla a presença de um dado inteiro, pois:

- *a expressão $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$ controla o aparecimento da parte 1, que pode não ser listada (1) ou ser listada apenas uma vez (x) ou ser listada duas vezes (x^2) e assim sucessivamente;*
- *a expressão $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)$ controla o aparecimento da parte 2, que pode não ser listada (1) ou ser listada apenas uma vez (x^2) ou ser listada duas vezes (x^4) e assim sucessivamente;*
- *a expressão $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)$ controla o aparecimento da parte 3, que pode não ser listada (1) ou ser listada apenas uma vez (x^3) ou ser listada duas vezes (x^6) e assim sucessivamente.*

Reescrevendo cada fator de 1 em uma série geométrica, temos que a função geradora das partições irrestritas pode ser escrita como:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\ldots. = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} \tag{2}$$

Note que o desenvolvimento da expressão 2 resulta no polinômio:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \ldots$$

E não é por acaso que os coeficientes de x^3, x^4 *e* x^7 *são, respectivamente,* 3, 5 *e* 15 *- assim como exemplificado na Definição 3.1.*

Também podemos lançar mão das funções geradoras para desenvolver expressões que controlam partições restritas de n, isto é, partições com alguma restrição imposta como um limitante no número de partições, o impedimento à repetição das partes, a paridade das partes, dentre outros.

Exemplo 3.2 (partições de n com partes distintas)**.** *Adicionado a restrição de que buscamos as partições de n cujas partes são distintas, então, a função que faz esse controle é dada por:*

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots. = 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\ldots \tag{3}$$

Uma vez que cada parte pode não ser listada ou comparecer apenas uma vez na construção da partição.

Exemplo 3.3 (partições de n com partes ímpares)**.** *Adicionado a restrição de que buscamos as partições de n cujas partes são exclusivamente ímpares, então, a função que faz esse controle é dada por:*

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)\ldots. \tag{4}$$

Que podem ser escritas como:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\ldots. = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}} \tag{5}$$

Uma vez que cada parte pode se repetir, mas apenas partes ímpares $(1,3,5,7\ldots)$ *podem aparecer na construção da partição.*

Observe que a expansão das expressões equivalentes 4 e 5 também resulta no polinômio $1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\ldots$, assim como em 3. De forma prática, podemos analisar as partições de 7, citadas na Definição 3.1 e notar que ali existem 5 partições em partes ímpares (7, $5+1+1$, $3+3+1$, $3+1+1+1+1$ e $1+1+1+1+1+1+1$) e também 5 partições em partes distintas (7, $6+1$, $5+2$, $4+3$ e $4+2+1$). Essa observação é, de fato, um importante Teorema da Combinatória Enumerativa:

Teorema 3.1. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração. Tome a função geradora do número de partições em partes distintas descrita em 3:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots.$$

Multiplicando essa função por $\dfrac{(1-x)}{(1-x)}\dfrac{(1-x^2)}{(1-x^2)}\dfrac{(1-x^3)}{(1-x^3)}\ldots$, temos:

$$\frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^3)\ldots.}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots.}$$

Agrupando os pares de produtos notáveis:

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots.}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots.}$$

Cancelando os termos iguais:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots.}=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}}$$

□

Exemplo 3.4 (aplicação em soluções inteiras de equações)**.** *Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação* $2x_1+3x_2+4x_3=13$*?*

Podemos resolver um problema como este controlando cada uma da incógnitas x_1*,* x_2 *e* x_3 *através de suas funções geradoras. Para isso note que:*

- *O resultado termo* $2x_1$ *admite apenas os valores da sequência* $0,2,4,6,8,\ldots$*;*
- *O resultado termo* $3x_2$ *admite apenas os valores da sequência* $0,3,6,9,12,\ldots$*;*
- *O resultado termo* $5x_3$ *admite apenas os valores da sequência* $0,5,10,15,\ldots$*.*

Visto isso, vamos propor uma troca de variáveis $x_k\to y_k$ *na equação de modo que a incógnita* y_k *seja controlada por uma função que percorre apenas os resultados possíveis de* x_k *com o adicional de que* $y_k\leq 13$*. Assim:*

- *A função geradora que controla* y_1 *é* $(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^10+x^{12})$*;*
- *A função geradora que controla* y_2 *é* $(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})$*;*
- *A função geradora que controla* y_3 *é* $(1+x^5+x^{10})$*;*

E as soluções da equação são controladas pela função:

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})(1+x^5+x^{10}) \tag{6}$$

Expandindo a expressão anterior:

$$x^{34}+x^{32}+x^{31}+x^{30}+2x^{29}+2x^{28}+2x^{27}+3x^{26}+3x^{25}+4x^{24}+4x^{23}+5x^{22}+$$
$$+5x^{21}+5x^{20}+5x^{19}+6x^{18}+5x^{17}+6x^{16}+5x^{15}+5x^{14}+5x^{13}+5x^{12}+4x^{11}+$$
$$+4x^{10}+3x^{9}+3x^{8}+2x^{7}+2x^{6}+2x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+1$$

O termo $5x^{13}$ demonstra que a equação possui 5 soluções com as condições especificadas, são elas:

$$S=\Big\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid (0,1,2),(1,2,1),(2,3,0),(4,0,1),(5,1,0)\Big\}$$

Além disso, também é possível observar outros cenários para a equação inicial pois o termo $4x^{11}$ mostra que a equação $2x_1+3x_2+4x_3=11$ tem 4 soluções, o termo $3x^8$ mostra que a equação $2x_1+3x_2+4x_3=8$ tem 3 soluções, dentre outros.
Por fim, observe que apesar da presença do termo $5x^{22}$, não podemos afirmar que a equação $2x_1+3x_2+4x_3=22$ tem 5, uma vez que nossa estratégia de resolução estabeleceu um limite máximo para y_1, y_2 e y_3 como 12, 12 e 10, respectivamente. Neste sentido, o que o termo $5x^{22}$ garante é que a equação $2x_1+3x_2+4x_3=22$ possui 5 soluções não negativas tais que $x_1\leq 6$, $x_2\leq 4$ e $x_3\leq 2$

Além de modelagens referentes a partições de inteiros, as funções geradoras podem ser utilizadas para descrever e modelar uma diversa gama de problemas de contagem. Algumas situações interessantes são as contagem de triângulos de lados inteiros e a demonstração de que qualquer inteiro positivo pode ser escrito de forma única como soma de potências distintas de 2.

Exemplo 3.5 (número de triângulos com lados inteiros e perímetro fixo)**.** *Quantos triângulos, não congruentes entre si, de lados inteiros podem ser construídos com um dado perímetro n pré-definido?*

Sejam $a\leq b\leq c$ os três lados de um triângulo de perímetro n. Como a,b,c são inteiros positivos, é imediato que $a\geq 1$. Além disso, pela desigualdade triangular temos que:

$$a+b>c \tag{7}$$

Um fator complicador para escrita das funções geradoras dos comprimentos dos três lados é que estas escolhas não são independentes e a desigualdade triangular deixa isso claro. No sentido de equacionar o perímetro do triângulo, vamos propor uma troca de variáveis como se segue:

$$\begin{aligned} a+b+c &= n \\ 3a+2(b-a)+c-b &= n \\ 3a+2y+z &= n \end{aligned} \tag{8}$$

onde $y = b - a \geq 0$ *e* $z = c - b \geq 0$.

Uma vez efetuadas estas substituições, as restrições na Equação 8 ficam reduzidas para $a \geq 1$, $y \geq 0$ *e* $z \geq 0$. *Porém, pela desigualdade triangular 7 ainda podemos observar que resta uma dependência entre as variáveis da Equação 8:*

$$a + b > c \Rightarrow a > c - b \Rightarrow a > z$$

Esta desigualdade pode ser eliminada pela introdução da variável x, *da seguinte maneira:*

$$a = z + x$$

onde $x \geq 1$.

Substituindo $a = x + z$ *em 9:*

$$\begin{aligned} 3a + 2y + z &= n \\ 3(z + x) + 2y + z &= n \\ 3x + 2y + 4z &= n \end{aligned} \tag{9}$$

onde $x \geq 1$, $y > 0$ *e* $z > 0$ *e não restam dependências entre as variáveis.*

Dessa forma, o problema fica reduzido às soluções da Equação 9 com as condições especificadas, onde é imediato perceber que a função geradora que controla o aparecimento das variáveis $3x$, $2y$ *e* $4z$, *nesta ordem, é:*

$$\begin{aligned} & (x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots) \\ = \; & \frac{x^3}{1 - x^3} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^4} \end{aligned} \tag{10}$$

Expandindo os fatores da Equação 10:

$$x^3 + x^5 + x^6 + 2x^7 + x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + 4x^{11} + 3x^{12} + 5x^{13} + 4x^{14} + 7x^{15} + \ldots \tag{11}$$

A leitura da Equação 10 nos mostra o números de soluções para diversos perímetros:

- *o termo* x^3 *mostra que existe apenas um triângulo de perímetro* 3*:* $(1, 1, 1)$*;*
- *a ausência do termo* x^4 *mostra que não existem triângulos de lados inteiros e perímetro igual a* 4*;*
- *o termo* $3x^9$ *mostra que existem três triângulos de perímetro* 9*:* $(1, 4, 4)$, $(2, 3, 4)$ *e* $(3, 3, 3)$*;*

- *o termo* $7x^{15}$ *mostra que existem sete triângulos de perímetro* 15*:* $(1, 7, 7)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 6, 6)$, $(3, 5, 7)$, $(4, 5, 6)$, $(4, 4, 7)$ *e* $(5, 5, 5)$*;*

Exemplo 3.6 (escrita de inteiros positivos como soma de potências distintas de 2)**.** *Prove que qualquer inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como soma de potências distintas de* 2*.*

A função geradora das partições de $n \in \mathbb{Z}_+^*$ *em potências de* 2 *distintas é:*

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots \tag{12}$$

Para provar que todo inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como soma de potências distintas de 2*, basta mostrar que a expansão polinomial da Expressão 12 resulta em um polinômio de coeficiente* 1 *para qualquer expoente* n*:*

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots = \frac{1}{1 - x} \tag{13}$$

Assim, a demonstração fica completa ao verificar a igualdade entre as Expressões 12 e 13:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - x} &= (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots \\ 1 &= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots \end{aligned}$$

E isto de fato ocorre pois agrupando sucessivamente os dois primeiros termos do lado direito desta igualdade, temos:

$$\begin{aligned} & (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots = \\ = \ & (1 - x^2)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16}) \dots \\ = \ & (1 - x^4)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})(1 + x^{32}) \dots \\ = \ & (1 - x^8)(1 + x^8)(1 + x^{16})(1 + x^{32})(1 + x^{64}) \dots \\ = \ & 1 \end{aligned}$$

4 Aplicação ao Problema Proposto

Certa vez, um professor, durante suas aulas preparatórias de Análise Combinatória para Olimpíadas de Matemática, foi arguido por um colega sobre se seria ou não possível contar matrizes simétricas, apenas com entradas 0 ou 1, de modo que a soma dos elementos de cada uma das linhas fosse pré estabelecida e dada por um número fixo, como por exemplo: quantas são as matrizes simétricas, de ordem 4, com entradas 0 ou 1, de modo que a soma dos elementos de qualquer linha seja igual a 2? A solução deste problema através das funções geradoras trouxe não só a resposta à pergunta inicial, como também mostrou ser possível flexibilizar o enunciado de modo a permitir que linhas diferentes possuam somas distintas.

Desta forma, chegamos ao problema a ser resolvido com o auxílio das funções geradoras: quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem n podem ser construídas com a soma dos elementos de cada linha fixada para qualquer inteiro $0, 1, 2, \ldots, n$.

Para resolver o problema, vamos usar uma matriz de ordem 4 como fonte de observação e vamos nomear os elementos de suas linhas na forma de sequência x, y, z, w como se segue:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}$$

Como a matriz é simétrica, se "dobrarmos" a matriz em torno da sua diagonal principal, sobreporemos elementos que são obrigatoriamente iguais:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2y_1 & x_3z_1 & x_4w_1 \\ & y_2 & y_3z_2 & y_4w_2 \\ & & z_3 & z_4w_3 \\ & & & w_4 \end{bmatrix}$$

Ao notar, após esta "dobra", que há apenas uma intersecção entre elementos de duas linhas distintas (que denotamos por x, y, z, w) fica evidente que a prevalência dos índices passa a ser desnecessária e vamos retirá-los, trabalhando com a matriz no formato:

$$\begin{bmatrix} x & xy & xz & xw \\ & y & yz & yw \\ & & z & zw \\ & & & w \end{bmatrix}$$

Por fim, podemos notar que cada entrada da matriz "dobrada" acima é igual a 0 ou 1. Essa afirmação é válida tanto para os elementos da diagonal principal que são "isolados", bem como para os demais que são "duplos" de mesmo valor, ou seja, ambos iguais a 0 ou ambos iguais a 1. Dessa forma, as 10 entradas dessa matriz são controladas individualmente pelas funções geradoras:

$$(1+x), (1+xy), (1+xz), (1+xw), (1+y), (1+yz), (1+yw), (1+z), (1+zw), (1+w)$$

Multiplicando as funções acima:

$$\begin{aligned}
& (1+x)(1+xy)(1+xz)(1+xw)(1+y)(1+yz)(1+yw)(1+z)(1+zw)(1+w) = \\
= \; & x^4y^4z^4w^4 + x^3y^4z^4w^4 + x^4y^3z^4w^4 + 2x^3y^3z^4w^4 + x^2y^3z^4w^4 + x^3y^2z^4w^4 + x^2y^2z^4w^4 \\
+ \; & x^4y^4z^3w^4 + 2x^3y^4z^3w^4 + x^2y^4z^3w^4 + 2x^4y^3z^3w^4 + 4x^3y^3z^3w^4 + 3x^2y^3z^3w^4 + xy^3z^3w^4 \\
+ \; & x^4y^2z^3w^4 + 3x^3y^2z^3w^4 + 3x^2y^2z^3w^4 + xy^2z^3w^4 + x^3yz^3w^4 + x^2yz^3w^4 + x^3y^4z^2w^4 \\
+ \; & x^2y^4z^2w^4 + x^4y^3z^2w^4 + 3x^3y^3z^2w^4 + 3x^2y^3z^2w^4 + xy^3z^2w^4 + x^4y^2z^2w^4 + 3x^3y^2z^2w^4 \\
+ \; & 4x^2y^2z^2w^4 + 2xy^2z^2w^4 + 4x^2y^2z^2w^4 + 2xy^2z^2w^4 + x^3yz^2w^4 + 2x^2yz^2w^4 + xyz^2w^4 \\
+ \; & \ldots + 3x^4y^2z^2w^3 + 10x^3y^2z^2w^3 + 13x^2y^2z^2w^3 + 8xy^2z^2w^3 + 2y^2z^2w^3 + xz^2w^3 \\
+ \; & \cdots + x^3y^2z + 3x^2y^2z + 3xy^2z + y^2z + 2xz + x^3yz + 3x^2yz + 4xyz + 2yz + z + 1
\end{aligned}$$

A interpretação desse resultado nos mostra todas as quantidades de matrizes que podem ser construídas de acordo com as condições estabelecidas. Denotando por $s(i)$ a soma dos elementos da linha i, temos:

- Se $s(1) = s(2) = s(3) = s(4) = 4$, o termo $x^4y^4z^4w^4$, mostra que há apenas uma matriz com as condições específicas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se $s(1) = 2$, $s(2) = s(3) = 3$ e $s(4) = 4$, o termo $3x^2y^3z^3w^4$, mostra que há três matrizes com as condições específicas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se $s(1) = 1$, $s(2) = s(3) = 2$ e $s(4) = 3$, o termo $8xy^2z^2w^3$, mostra que há oito matrizes com as condições específicas::

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bibliografia

[1] SANTOS, José Plínio Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Therezinha Colzalari. (2008) **Introdução à análise combinatória.** 1.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

[2] SANTOS, José Plínio Oliveira. (2020) **Introdução à Teoria dos Números.** 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA.

[3] WILF, Herbert Saul. (2006) **Generatingfunctionology.** USA: A. K. Peters, Ltd.

[4] ANDREWS, George Eyre (1976). **The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2.** Cambridge University Press.

[5] GRIMALDI, Ralph Peter (2003). **Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction.** Pearson.

[6] STANLEY, Richard P. (1997). **Enumerative Combinatorics, Volume 1.** Cambridge University Press.