# MÁGICA DAS TAMPINHAS

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE LÚDICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Thiago Henrique Campos Santos

Rogério César dos Santos

São Carlos, 29 de Julho de 2024

# Quem somos

Graduado em Matemática pela Universidade de Brasília – UnB, com dupla habilitação: bacharelado (2017) e licenciatura (2018), pós – graduado em Docência para a Educação Profissional e Tecnológica pelo Instituto Federal de Goiás – IFG (2022). Atualmente é estudante do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT na Universidade de Brasília- UnB e professor nível IV da rede estadual de Goiás.

**Thiago Campos**

**Rogério César**

Graduado (2000) e Mestre (2003) em Matemática, Doutor (2017) em Educação pela Universidade de Brasília. Possui doutorado interrompido em Probabilidade (2013) pela Universidade de Brasília. É professor Adjunto IV da Universidade de Brasília, campus Planaltina, e professor e orientador do PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática).Obteve, em um artigo científico, uma propriedade inédita do Triângulo de Pascal. Faz pesquisa em Geometria Euclidiana Plana: Teorema de Van Aubel e suas variações, e em Matemática em geral.

# O Percursso da Apresentação

Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

01

## Introdução

Elementos lúdicos como proposta de enfretamento aos desafios de ensinar matemática.

02

## O Truque

Conhecendo a mágica das tampinhas.

03

## A Sala de Aula

Uma proposta de atividade utilizando a mágica.

04

## Inquietações

Em quais condições é possível realizar o truque?

05

## Generalizações

Outros multiplicadores para o truque.

06

## Conclusões

Discussões finais.

# Introdução

- É Comum escutar relatos de estudantes com relação as suas percepções sobre aula de matemática, em geral, elas demonstram queixas sobre a dificuldade de aprendizagem dos conteúdos porque são muito difíceis, complicados ou mesmo desinteressantes.
- Em contrapartida, suas belezas são percebidas, por aqueles que a podem compreender, em regularidades geométricas/numéricas encontradas na natureza, em grandes obras arquitetônicas, na consistência de soluções para certas equações e até mesmo no desfrutar de jogos repletos de conceitos matemáticos.
- A matemática da sala de aula perde esta beleza, para alguns estudantes, pois não conseguem enxergá-la (DA SILVEIRA, 2002). Em síntese, ela perde seu âmago.

# Introdução

- Nesse contexto, praticas pedagógicas que estimulem o fazer matemático e que revelem/resgatem sua essência sem renunciar ao seu rigor opõem-se ao cenário anteriormente apresentado.
- Dessa forma, apresenta-se a mágica das tampinhas. Nela, o professor desafia os estudantes a desvendarem um truque de adivinhação matemática, objetivando que a atividade propicie um cenário investigativo e motive o estudo de sistemas lineares por meio de elementos lúdicos.
- Pois, a dimensão lúdica contribui para a formação intelectual do estudante, promove a interação entre os diversos atores que compõem a sala de aula e sua prática demanda que estes portem-se de forma ativa e crítica. (ALMEIDA, 1998)

# O Truque das Tampinhas

1. Escolha *secretamente* um número de 3 a 7 tampinhas, distribuindo-as em suas mãos (nenhuma mão pode ficar vazia).
2. Mentalmente, ***dobre a menor quantidade*** e ***triplique a maior quantidade***. Diga a soma dos dois resultados.

3. Já é possível adivinhar quantas tampinhas ao todo ele escolheu inicialmente e sua distribuição.

# Revelando o Segredo

Considerando $x$ e $y$ a menor e a maior quantidade de tampinhas distribuídas nas mãos, respectivamente, $w$ a quantidade de tampinhas escolhida pelo participante e $z$ a soma revelada, então:

$$\begin{cases} x + y = w \\ 2x + 3y = z \end{cases}$$

Somando-se $x$ a segunda equação, temos:

$$3x + 3y = z + x$$

Então, o valor da menor quantidade de tampinhas ($x$) é equivalente ao menor número que deve ser acrescido a soma anunciada pelo participante para torná-la um múltiplo de 3.

A partir daí basta resolver o sistema em questão.

# Algumas Considerações Sobre o Truque

- A mágica apresentada é uma generalização inspirada na produção de Chemale (1999) feita por Santos e Gontijo (2018).
- $x + z$ é um múltiplo de 3. Mas existem vários valores de $x$ que tornam $x + z$ um múltiplo de 3, então por que devemos pegar o menor $x$ positivo com esta propriedade?

**Tabela 1 – demonstração da viabilidade do truque**

| $w = 3$ | | | $w = 4$ | | | $w = 5$ | | | $w = 6$ | | | $w = 7$ | | | $w = 8$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| 1 | 2 | 8 | 1 | 3 | 11 | 1 | 4 | 14 | 1 | 5 | 17 | 1 | 6 | 20 | 1 | 7 | 23 |
| | | | 2 | 2 | 10 | 2 | 3 | 13 | 2 | 4 | 16 | 2 | 5 | 19 | 2 | 6 | 22 |
| | | | | | | | | | 3 | 3 | 15 | 3 | 4 | 18 | 3 | 5 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 4 | 4 | 20 |

# A Sala de Aula

- Sugere-se a utilização do truque para a introdução de uma aula com o tema sistema de equações lineares, através de uma atividade que propicie a aprendizagem ativa por meio de uma aula baseada num cenário investigativo inspirada nos moldes discutidos por Skovsmose (2000).
- O professor, inicialmente, é o apresentador e exibe o truque desafiando a classe a descobrir o "segredo da mágica". Após realizar o truque com 3 voluntários, o professor organiza a turma em duplas e entrega 7 tampinhas a cada uma delas. Posteriormente, fixa um cartaz na frente da sala, com uma tabela similar a **tabela 1**, porém preenchida apenas com as células relativas a w, x, y e z.

# Proposta de Atividade Utilizando a Mágica

- O professor pede que os estudantes façam uma rodada de mágicas em formato similar ao apresentado por Chemale (1999), restringindo o truque a $w=7$ sempre. Após algumas rodadas, nota-se que os valores da soma $z$ sempre se repetem, permitindo a quem propõe a mágica realizar a adivinhação apenas memorizando as 3 configurações de mão possíveis.

- Em seguida, o professor dá um significado às letras $x$, $y$, $z$ e $w$ e propõe as seguintes questões para investigação: o que ocorreria com a mágica caso $w$ assumir valores de 3 a 7? E se $w=8$ fosse um valor possível? Sempre é possível realizar a adivinhação com certeza?

- De posse das tampinhas e da tabela, o professor pede que os estudantes realizem uma nova rodada de mágicas, com a inclusão da nova regra, e registrem os resultados na tabela e solicita que a utilizem como suporte para investigar as indagações.

# Proposta de Atividade Utilizando a Mágica

- Após este momento, serão ouvidas as conclusões dos estudantes e, então, o professor poderá mediar o debate e corrigir falhas argumentativas. Assim, a turma poderá construir coletivamente uma conclusão para a investigação feita, e, certamente, num cenário tão amplo, fazer novas perguntas, que podem inspirar outras atividades.

- Fixados z e w, o professor pode apresentar o sistema linear descrito na seção anterior, com os pares de solução (x,y) tendo uma representação concreta para os estudantes, gerando um cenário favorável para as clássicas definições oriundas ao tema.

# Inquietações

1. A mágica sempre pode ser realizada?

2. Considerando o sistema $\begin{cases} ux + vy = z \\ x + y = w \end{cases}$, definido os inteiros positivos $u$ e $v$ como multiplicadores, $u = 2$ e $v = 3$ são as únicas escolhas possíveis?

# Contribuições de Santos et al. (2020)

- Considere inicialmente que o participante 1 escolha $Q_1 = x_1 + y_1$ de um conjunto $T$ de tampinhas tal que $0 \leq x_1 \leq y_1$, e que um participante 2 escolha $Q_2 = x_2 + y_2$ de um outro conjunto, também de T tampinhas, em que $0 \leq x_2 \leq y_2$ .

- **Teorema:** Dado $T \geq 0$ , consideremos $N \geq 0$ o quociente da divisão de T por 2 e $v > u \geq N$, sendo u e v coprimos maiores do que zero, os multiplicadores. Tomemos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , com $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$ naturais tais que $Q_i = x_i + y_i \leq T$ , $i = 1, 2$. Definindo

$$S_i = ux_i + vy_i, \text{ com } i = 1, 2, \text{ então garante-se que}$$

$$S_1 \neq S_2.$$

# Em Busca de Novos Multiplicadores

$$u = 3 \text{ e } v = 5$$

Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

# Em Busca de Novos Multiplicadores

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

- Caso u=3 v=5, T=10. Note que, u e v são coprimos, com v > u , mas não simultaneamente maiores ou iguais a $N = \frac{10}{2} = 5$. Portanto, o teorema apresentado anteriormente não se aplica, mas a viabilidade da mágica é garantida pela **tabela 2**:

**Tabela 2 – demonstração da viabilidade do truque com os multiplicadores u=3 e v=5**

| $w=3$ | | | $w=4$ | | | $w=5$ | | | $w=6$ | | | $w=7$ | | | $w=8$ | | | $w=9$ | | | $w=10$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| 1 | 2 | 13 | 1 | 3 | 18 | 1 | 4 | 23 | 1 | 5 | 28 | 1 | 6 | 33 | 1 | 7 | 38 | 1 | 8 | 43 | 1 | 9 | 48 |
| | | | 2 | 2 | 16 | 2 | 3 | 21 | 2 | 4 | 26 | 2 | 5 | 31 | 2 | 6 | 36 | 2 | 7 | 41 | 2 | 8 | 46 |
| | | | | | | | | | 3 | 3 | 24 | 3 | 4 | 29 | 3 | 5 | 34 | 3 | 6 | 39 | 3 | 7 | 44 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 4 | 4 | 32 | 4 | 5 | 37 | 4 | 6 | 42 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 5 | 5 | 40 |

# Em Busca de Novos Multiplicadores

- Perceba que a mágica não é válida para qualquer quantidade de tampinhas, pois se forem oferecidas 22 delas para o participante, a mágica não poderá ser realizada, pois $3 \cdot 5 + 5 \cdot 15 = 90 = 3 \cdot 10 + 12 \cdot 5$.

# Em Busca de Novos Multiplicadores

- Investigando multiplicadores com mdc(u,v) $\neq$ 1. Considerando u e $u^2$ como multiplicadores, seja T um número ímpar, então os pares $(u, u+1)$ e $(0, u+2)$ são exemplos que mostram que a mágica não funciona.

# Uma Versão Desafiadora

Multiplicadores: $u = 90$ e $v = 91$

# Considerações Finais

- Espera-se que a atividade possa aguçar a curiosidade dos estudantes e os estimulá-los a buscar os porquês da mágica por meio da investigação;

- Intenciona-se que os estudantes envolvidos na investigação, por meio da tarefa proposta, utilizem os matérias concretos disponibilizados para desenvolver estratégias e procedimentos matemáticos para articular um modelo que solucione o problema, analisando a razoabilidade de suas respostas.

- Destacam-se as potencialidades da atividade com relação aos desenvolvimento do cálculo mental e do raciocínio lógico dos estudantes.

- A investigação dos pares de multiplicadores que tornam a mágica viável é ampla e eles não estão completamente determinados.

# Referências Bibliográficas


1. ALMEIDA, Paulo Nunes de. Educação lúdica: técnicas e jogos pedagógicos. São Paulo: Loyola, 1998.
2. CHEMALE, Elena Haas; KRUSE, Fábio. Curiosidades matemáticas. Novo Hamburgo: Fevale, 1999.
3. DA SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. Matemática é difícil": um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. Revista da Ensenhanza de Matematica, v. 3, n. 12, p. 67-84, 2002.
4. SANTOS, ROGÉRIO; BRITO, PAULO ; BEZERRA, WESCLEY ; CORNÉLIO, CARLOS , Generalização de um truque matemático. PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE, v. 8, p. 195-201, 2020.
5. SANTOS, R. C. dos; Gontijo, C. H. Uma mágica desafiadora. Revista do professor de Matemática. São Paulo: SBM, no 96. pp.31–32, 2018.
6. SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Bolema, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.