Saulo Minatti Andrade; prof. Paulinho Demeneghi (orientador).
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) - PET Matemática UFSC.

Hiperoperações Exponenciais: os sucessores algébricos da multiplicação.

São Carlos, 30 de julho de 2024
XI Bienal da Matemática - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).

Sumário

Notações

- $\mathbb{R}_+^* :=$ conjunto dos reais positivos ($\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$);
- $\mathbb{N}^* :=$ conjunto dos naturais sem o zero ($\mathbb{N} \setminus \{0\}$);
- $\mathbb{N} :=$ conjunto dos naturais com o zero ($\mathbb{N} \cup \{0\}$).

Notavelmente, as operações aritméticas, pelo menos com números naturais, se comportam da seguinte maneira:

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$. Então, a **multiplicação** e **potenciação** de x por n são:

- $x \cdot n = x + x + \ldots + x$ (n cópias de x);
- $x^n = x \cdot x \cdot x \ldots \cdot x$ (n cópias de x).

Observação: já assumimos a extensão da multiplicação e, mais para frente, potenciação, para números reais.

Definição 1.1.

É com intenção de "continuar" essa recursão, que se definiu:

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}_+^*$. Então, a **tetração** de x por n é dada por:

$$^{n}x := \left(x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}\right)_n$$

Em que há n cópias de x, incluindo a base. Aqui, utilizamos os parênteses e o subíndice para indicar o número de cópias do número que está sendo elevado a si mesmo continuamente.

Também nos referimos a esse número como x tetrado a n, ou a n-ésima tetração de x.

Hiperoperações usuais

Com intuito de formalizar a recursão existente nas operações aritméticas usuais nos números naturais, estabelecemos as hiperoperações:
Cada operação da família de operações do próximo slide é dita uma <u>n-hiperoperação</u> para algum $n \in \mathbb{N}^*$, chamada de H_n.

$$
\begin{array}{rccc}
H_1\colon & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\
& (a,b) & \longmapsto & a+b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
H_2\colon & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\
& (a,b) & \longmapsto & a \cdot b = (a + a + \ldots + a)_b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
H_3\colon & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\
& (a,b) & \longmapsto & a^b = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
H_4\colon & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\
& (a,b) & \longmapsto & {}^{b}a \coloneqq (a^{a^{\cdots^{a}}})_b
\end{array}
$$

Em geral, para todo $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{array}{rccc}
H_{n+1}\colon & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\
& (a,b) & \longmapsto & (H_n(a, H_n(a, H_n(\ldots H_n(a,a)\ldots))))_b
\end{array}.
$$

Propriedades algébricas

Notavelmente, a soma e a multiplicação satisfazem propriedades algébricas como:

- Associatividade ($(a + b) + c = a + (b + c)$);
- Comutatividade ($a + b = b + a$);
- Elemento neutro ($a + 0 = a$);
- Elemento oposto ($a + (-a) = 0$);
- Distributiva ($a(b + c) = ab + ac$).

No entanto, a potenciação, operação gerada a partir da "continuação" recursiva dessas operações, não satisfaz essas propriedades.

Falhas algébricas

Não comutativa:

$$3^2 = 9 \neq 8 = 2^3 \quad \therefore 3^2 \neq 2^3.$$

Não associativa:

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 \neq 2^8 = 2^{(2^3)} \quad \therefore (2^2)^3 \neq 2^{(2^3)}.$$

Não distribui sobre a multiplicação:

$$2^{2 \cdot 3} = 2^6 \neq 2^5 = 2^{2+3} = (2^2) \cdot (2^3) \quad \therefore 2^{2 \cdot 3} \neq (2^2) \cdot (2^3).$$

Há elemento neutro, mas apenas à direita e ainda é o mesmo da multiplicação:

$$x^1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad 1^3 = 1 \neq 3 = 3^1 \quad \therefore 1^3 \neq 3^1.$$

Concluindo

Uma vez que potenciação não satisfaz várias propriedades algébricas desejáveis, muito menos as hiperoperações subsequentes satisfarão tais propriedades.

Com isso em mente, o objetivo desse trabalho é encontrar uma operação que, obtida de uma recursão natural, distribua sobre a multiplicação e satisfaça propriedades algébricas desejáveis, da mesma forma que acontece com a multiplicação em relação à soma.

Definição 2.1.
Seja S um conjunto. Qualquer função

$$* : S \times S \to S$$

É dita uma <u>operação binária</u> em S. Nesse caso, iremos denotar, para quaisquer $a, b \in S$: $*(a, b) \coloneqq a * b$.

Objetivo

Queremos encontrar uma operação binária $*$ em $\mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

- $*$ é comutativa;
- $*$ é associativa;
- $*$ distribui sobre a multiplicação;
- $*$ é contínua (com a topologia usual);
- $*$ possui elemento neutro;
- $*$ é inversível (com exceção do número 1).

Tendo esse objetivo em mente, o autor conseguiu "enxugá-los" o máximo possível de maneira a determinar, univocamente, uma expressão para essa operação. Isso é garantido pelo Teorema a seguir.

Definição 2.2.

Seja $b \in \mathbb{R}_+^*$. Definimos a <u>função exponencial de base b</u> como:

$$\begin{array}{rccc} \exp_b\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & b^x. \end{array}$$

Caso $b \neq 1$, ao restringir o contradomínio à imagem $\mathbb{R}_+^*$, denotamos sua inversa como $\log_b$.

Teorema 2.3.

Seja $*$ uma operação binária em $\mathbb{R}$. Seja f uma função tal que:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x*y. \end{array}$$

Suponha que $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $*$ distribui à direita sobre a multiplicação. Isto é, $(x \cdot y) * z = (x * z) \cdot (y * z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
- $*$ é contínua na primeira variável. Isto é, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, a função dada por $g_{y_0}(x) \coloneqq f(x, y_0)$ é contínua;
- Há um elemento neutro à esquerda $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Isto é, $b * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- Operar com 1 à esquerda resulta em 1. Isto é, $1 * x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Sob tais hipóteses:

$$x * y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ideia da Demonstração

Inicialmente, dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, a ideia é provar que

$$f(x^r, y) = (f(x,y))^r \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Para isso, prova-se que a afirmação é verdadeira em $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ (utilizando as hipóteses de propriedades algébricas). Como vale em $\mathbb{Q}$, ao utilizar a hipótese de continuidade, prova-se que a afirmação vale em $\mathbb{R}$.

Escreve-se $x = b^{\log_b(x)}$. Logo, utilizando a afirmação:

$$f(x,y) = f(b^{\log_b(x)}, y) = (f(b,y))^{\log_b(x)} = y^{\log_b(x)}.$$

Assim, conclui-se:

$$x * y = f(x,y) = y^{\log_b(x)} = b^{\log_b(y)\cdot\log_b(x)} = \exp_b(\log_b(x)\cdot\log_b(y)).$$

Definição 2.4.

Seja $b \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$. A <u>(1)-hiperoperação exponencial</u> de base b é dada por:

$$\begin{array}{rccc} *_b\colon & \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^*_+ \\ & (x,y) & \longmapsto & x *_b y \coloneqq \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)). \end{array}$$

Vamos ver, daqui a pouco, que os números reais positivos com essa operação e a multiplicação formam uma estrutura algébrica bem forte!

Definição 2.5.

Sejam $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ corpos ordenados pelas relações $\leq_{\mathbb{K}}, \leq_{\mathbb{L}}$ respectivamente. Um isomorfismo ordenado entre $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$ é um isomorfismo $\varphi: \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ tal que:

$$a \leq_{\mathbb{K}} b \implies \varphi(a) \leq_{\mathbb{L}} \varphi(b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

Definição 2.5.

Sejam $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ corpos. Quando $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ for um isomorfismo, denotamos:

$$\mathbb{K} \cong_\varphi \mathbb{L}$$

Quando $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ forem corpos ordenados, e φ for um isomorfismo ordenado, denotamos:

$$\mathbb{K} \equiv_\varphi \mathbb{L}.$$

Teorema 2.5.

Seja $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Então, $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ é um corpo. Mais ainda,

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b} (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b).$$

Dizemos que $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ é o $\underline{1^o \text{ corpo exponencial de base } b}$.

Ideia da Demonstração

As propriedades relativas à multiplicação são automaticamente satisfeitas, pois a multiplicação usual em $\mathbb{R}_+^*$ o faz um grupo abeliano.
Para as propriedades relativas à operação $*_b$, prova-se tranquilamente que ela é associativa e comutativa.
A distributividade e elemento neutro b, utilizando a comutatividade, são propriedades automaticamente satisfeitas por construção.
O inverso de $x \in \mathbb{R}_+^*$, com $x \neq 1$, é dado por $\hat{x} \coloneqq \exp_b\left(\dfrac{1}{\log_b(x)}\right)$.
Para o isomorfismo, basta notar que, por definição da operação $\exp_b(x) *_b \exp_b(y) = \exp_b(x \cdot y)$.

Teorema 2.6.

Seja $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Então,

- Se $b > 1$, então, $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \leq)$ é corpo ordenado e $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \leq)$;
- Se $0 < b < 1$, então, $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \geq)$ é corpo ordenado e $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b, \geq)$.

Ideia da Demonstração: Notar que $\exp_b$ é isomorfismo de ordem, sendo crescente quando $b > 1$ e decrescente $0 < b < 1$ (portanto, invertendo a relação de ordem nesse caso).

Tendo em vista os isomorfismos de ordem gerados pelas funções exponenciais de base $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, pensamos em esquematizar uma "continuação" desse proceso. Ao tentar "induzir" o mesmo isomorfismo, aplicando $\exp_b$ em $\mathbb{R}_+^*$, construímos uma nova hiperoperação exponencial e um novo corpo. Isso é visto na Proposição a seguir.

Proposição 3.1.

Seja $b \in (1, \infty)$. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}_+^*$ um corpo tal que

$$(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b) \cong_{\exp_b} (\mathbb{K}, *_b, \diamond_b).$$

Sob tais hipóteses:

$$x \diamond_b y = \exp_b(\log_b(x) *_b \log_b(y)) \quad \forall x, y \in (1, \infty).$$

Pensamento Recursivo

Tendo em vista a última Proposição, notamos que as hiperoperações exponenciais estudadas até agora apresentam comportamento recursivo, pois, para quaisquer $x, y \in (1, \infty)$, temos:

- $x \cdot y = \exp_b(\log_b(x) + \log_b(y))$;
- $x *_b y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y))$;
- $x \diamond_b y = \exp_b(\log_b(x) *_b \log_b(y))$.

Essa recursão motiva a definição estabelecida no próximo slide.

Definição 3.1.

Sejam $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. A
<u>n-ésima hiperoperação exponencial de base b</u> é definida por:

$$\begin{cases} x \cdot_b^n y \coloneqq x + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ se } n = -1; \\ x \cdot_b^n y \coloneqq \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{n-1} \log_b(y)) \quad \forall x, y \in K_b^n, \text{ se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

O conjunto de todos os valores em que $\cdot_b^n$ está bem definida é denotado por K_b^n.

$$K_b^n \times K_b^n \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot_b^n y \text{ está bem definido}\}.$$

Proposição 3.2.

Sejam $b \in (1, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então:

$$K_b^n = ({}^{n-2}b, \infty).$$

(Lembre-se que ${}^m b$ denota a m-ésima tetração de b.)

Ideia da Prova: Fazer indução em n, lembrando que ${}^{-1}b = 0$ para o passo base. Para o passo indutivo, perceba que, pelo fato de $\exp_b$ ser crescente e contínua,
$\exp_b(({}^{n-2}b, \infty)) = (b^{{}^{n-2}b}, b^{\infty}) = ({}^{n-1}b, \infty)$.

Corolário 3.3.

Sejam $b \in (1, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então:

1. $K_b^{n+1} \subset K_b^n$;
2. $K_b^{n+1} = \exp_b(K_b^n)$ ou, equivalentemente, $\log_b(K_b^{n+1}) = K_b^n$;
3. A operação $\cdot_b^n$ está bem definida em K_b^n (isto é, $x \cdot_b^n y \in K_b^n \quad \forall x, y \in K_b^n$).

Teorema 3.4.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $b \in (1, \infty)$. Então, a quádrupla a seguir é um corpo ordenado:

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq).$$

O chamamos de <u>n-ésimo corpo exponencial de base b</u>.
Ideia da Demonstração:

Utilizando os dois resultados anteriores, fazer indução em n, notando que para $n = 0$ essa quádrupla é o corpo ordenado dos números reais.

Corolário 3.5.

Sob as hipóteses do Teorema anterior, temos os seguintes isomorfismos de ordem:

$$(K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq) \equiv_{\exp_b} (K_b^{n+1}, \cdot_b^n, \cdot_b^{n+1}, \leq);$$

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) \equiv_{\exp_b^n} (K_b^n, \cdot_b^{n-1}, \cdot_b^n, \leq).$$

Em que $\exp_b^n$ é a n-ésima composição de $\exp_b$ com si mesma ($\exp_b^n = \exp_b \circ \ldots \circ \exp_b$ com n cópias de $\exp_b$).

Capítulo 4 - Pseudomorfismos

Tendo em vista a sequência de isomorfismos gerados por um corpo e uma única função (naquele caso, $\exp_b$), pensamos em generalizar essa ideia para um corpo $\mathbb{K}$ qualquer, e alguma função $\varphi: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Definição 4.1.

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo. Um pseudomorfismo sobre $\mathbb{K}$ é uma função injetiva $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal que

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

Observação: Se $0_{\mathbb{K}} \notin \varphi(\mathbb{K})$, então $\varphi : (\mathbb{K}, +) \to (\mathbb{K}^{\times}, \cdot)$ é um homomorfismo de grupos injetor.

Definição 4.2.

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e φ um pseudomorfismo sobre $\mathbb{K}$. Definimos, em $\varphi(\mathbb{K})$, as seguintes operações, as quais nos recorreremos como pseudo-operações sobre $\mathbb{K}$:

- Pseudossoma: $a \oplus b \coloneqq \varphi(\varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}(b))$;
- Pseudoproduto: $a \odot b \coloneqq \varphi(\varphi^{-1}(a) \cdot \varphi^{-1}(b)) \quad \forall a, b \in \varphi(\mathbb{K})$.

Observação: Pela injetividade de φ, denotamos, para cada $y \in \varphi(K)$, $\varphi^{-1}(y)$ como sendo o elemento de $\varphi^{-1}(\{y\})$.

Com esse conceito, é possível provar um resultado que generaliza Teorema 2.5. O resultado se encontra no próximo slide.

Teorema 4.3.

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e φ um pseudomorfismo sobre $\mathbb{K}$. Então, $(\varphi(\mathbb{K}), \oplus, \odot)$ é um corpo (em que $\oplus, \odot$ denotam a pseudossoma e pseudoproduto respectivamente). Mais ainda,

$$(\mathbb{K}, +, \cdot) \cong_{\varphi} (\varphi(\mathbb{K}), \oplus, \odot).$$

Nesse caso, dizemos que $\varphi(\mathbb{K})$ é o <u>corpo imagem</u> de φ sobre $\mathbb{K}$.

Com esse resultado, sempre é possível construir um corpo isomorfo, possivelmente novo, utilizando um pseudomorfismo.

Definição 4.4.

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado. Um pseudomorfismo ordenado sobre $\mathbb{K}$ é um pseudomorfismo sobre $\mathbb{K}$ que preserva a relação de ordem usual de $\mathbb{K}$. Isto é, para quaisquer $a, b \in \mathbb{K}$, temos:

$$a \leq b \implies \varphi(a) \leq \varphi(b).$$

Teorema 4.5.

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado qualquer e φ um pseudomorfismo ordenado sobre $\mathbb{K}$. Então, com as pseudo-operações usuais, $(\varphi(\mathbb{K}), \oplus, \odot, \leq)$ é um corpo ordenado. Mais ainda,

$$(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq) \equiv_{\varphi} (\varphi(\mathbb{K}), \oplus, \odot, \leq).$$

Com esse resultado, sempre é possível construir um corpo ordenado (com a mesma relação de ordem) que é ordenadamente isomorfo, possivelmente novo, utilizando um pseudomorfismo ordenado.

Teorema 4.6.

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, φ um pseudomorfismo sobre $\mathbb{K}$, e $n \in \mathbb{N}^*$.
Então, φ é um pseudomorfismo sobre $\varphi^{n-1}(\mathbb{K})$.
Mais ainda, $\varphi^n(\mathbb{K})$, com as pseudo-operações geradas por φ sobre $\varphi^{n-1}(\mathbb{K})$, é um corpo.

Observação: utilizamos a notação φ^m como sendo, para $m \in \mathbb{N}$, a m-ésima composição de φ com si mesma, e $\varphi^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$.

Definição 4.7.

Seja $(\mathbb{K}, \leq)$ um corpo ordenado.
Um intervalo aberto em $\mathbb{K}$ é um conjunto da seguinte forma:

$$(a, b)_{\mathbb{K}} := \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\}.$$

A topologia da ordem de $\mathbb{K}$ é a topologia para $\mathbb{K}$ gerada pelos intervalos abertos de $\mathbb{K}$. Notação: $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

Lema 4.8.

Sejam $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ e $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, \leq_\circ)$ corpos ordenados quaisquer tais que $\mathbb{K} \equiv_f \mathbb{L}$. Então, f é contínua com as topologias $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ e $\mathcal{O}_\mathbb{L}$.

Consequentemente, pelo Teorema 4.5, todo pseudomorfismo ordenado φ sobre $\mathbb{K}$ é contínuo com a topologia $\mathcal{O}_\mathbb{K}$.

Teorema 4.9.

Seja φ um pseudomorfismo ordenado sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Então, $\varphi = \exp_b$, para algum $b \in (1, \infty)$.

Ideia da Demonstração: Parecida com a demonstração do Teorema 2.3. Dessa vez, a ideia é provar que, para todo $q \in \mathbb{Q}$:

$$\varphi(q) = (\varphi(1))^q.$$

Utilizando a continuidade do pseudomorfismo ordenado, provar que a afirmação acima também vale para todo $q \in \mathbb{R}$.
Sendo $b = \varphi(1)$, prova-se que $b > 1$, e:

$$\varphi(x) = b^x = \exp_b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Conclusão

Foi um trabalho extremamente satisfatório, pois, além de conseguirmos determinar uma recursão natural para as operações que preservam propriedades algébricas fortes, conseguimos provar que, em $\mathbb{R}$, essa recursão é única e, além disso, generalizar essa maneira de recursão para corpos quaisquer.

Referências

[1] Ji Hoon Chun. "What is... tetration?" Em: *online article: https://math. osu. edu/sites/math. osu. edu/files/chun_tetration. pdf* (2014).

[2] Mark Neyrinck. "Extended Essay Title: An Investigation of Arithmetic Operations". Em: ().

[3] Patrícia Nunes da Silva, André Luiz Cordeiro dos Santos e Alexandre de Souza Soares. "A NOTE ON THE CONVERGENCE OF ITERATED INFINITE EXPONENTIALS OF REAL NUMBERS". Em: *Cadernos do IME-Série Matemática* 15 (2020), pp. 1–8.