XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

COMUNICAÇÃO ORAL

Análises das Interpretações e do Custo Operacional dos Sistemas Lineares do Tipo 3x3

Neto, Oséas Guimarães Ferreira[1]; Nunes, Marly dos Anjos[2] e Santa Brígida, Júlia Barbosa[3]

Resumo:*A partir de uma experiência vivida em sala de aula por um dos autores, este trabalho tem por objetivo produzir uma análise de interpretação e do custo operacional dos três modelos mais usados no ensino médio para a resolução de Sistemas Lineares do tipo 3x3. Sobre o olhar da Teoria do Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval, usamos uma metodologia de caráter qualitativo para interpretação das representações geométrica, matricial e vetorial, e quantitativa para o custo operacional das resoluções por escalonamento, resolução matricial e Regra de Cramer. Verificamos que as três interpretações são necessárias para compor o entendimento e que o método do escalonamento possui o menor custo operacional na resolução de Sistemas Lineares.*

Palavras-chave:*Sistemas Lineares, Registros de Representação, Interpretações e Custo Operacional.*

1 INTRODUÇÃO

Durante muitos anos sempre iniciei o ano letivo na segunda série do ensino médio com trigonometria, porém em 2022 optei por deixar esse conteúdo que é extremamente longo, denso e técnico para o segundo semestre, uma vez que tivemos um longo período sem aulas presenciais e gostaria de iniciar com um conteúdo que fosse concluído de forma breve. Dessa forma, nosso ponta pé inicial foi com o estudo das Matrizes, em seguida estudamos os Determinantes e por fim chegamos aos Sistemas Lineares. Como é de praxe ao final de um conteúdo passamos uma lista de exercícios, onde em um dos itens propostos,

[1]Afiliação. Secretaria de Educação do Estado do Pará, oseas.neto3234@escola.seduc.pa.gov.br
[2]Afiliação. Universidade Federal do Pará, marlynunes@ufpa.br
[3]Afiliação. Universidade Federal do Pará, juliabarbosa328@gmail.com

era sugerido que o mesmo fosse resolvido usando as três técnicas apresentadas ao longo do curso (escalonamento, resolução matricial e Regra de Cramer). Ao final da resolução uma aluna da turma M2TR01 me questionou em qual das técnicas de resolução se fazia a menor quantidade de cálculos. Essa indagação me permitiu pela primeira vez analisar o que (LIMA 2007) chama de custo operacional, tal reflexão permitiu um estudo que convergiu para este trabalho.

Os Sistemas Lineares estão em destaque na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na competência específica 3, com o objetivo de proporcionar ao aluno a "utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos no campo Álgebra (...), para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando resultados e construindo argumentações.". Porém, essa tarefa pode exigir dos discentes diferentes processos cognitivos à depender da natureza do problema e do tipo de análise que se queira destacar, ou seja, haverá casos em que os estudantes deverão fazer alguns tratamentos a nível de modelagem antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto maior grau de interpretação. Isso fica em evidência quando observamos as habilidades (EM13MAT301) e (EM13MAT315) da BNCC.

> Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
> Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma. (BNCC – 2018. pg. 527)

Além disso o conteúdo é de grande interesse prático, é muito acessível aos alunos, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados e possibilita a análise e introdução de outras teorias matemáticas. Esses três aspectos já são suficientes para ratificar a sua inclusão na Base Nacional Comum Curricular.

Essa variedade de registros quanto a sua resolução nos remete naturalmente a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, que enfatiza a importância da diversidade de registros e a articulação entre eles nos conteúdos matemáticos. Segundo (DUVAL 2003) para se analisar as atividades de conversão num conteúdo matemático, é necessário comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada. Para o autor, a compreensão e a originalidade do conteúdo matemático supõem-se a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica.

Este trabalho tem por objetivo analisar as interpretações e o custo operacional de três representações mais usadas no ensino de Sistemas Lineares do tipo 3x3, com uma metodologia qualitativa para as interpretações e quantitativa para o custo operacional. Os registros escolhidos são os mais presentes nos livros textos usados no ensino médio. A nível de interpretação temos as representações geométrica, matricial e vetorial, já a nível de método de resolução que aqui chamaremos de custo operacional temos o escalonamento, resolução matricial e a regra de Cramer. Ao final das seções analisadas listamos os principais aspectos que devem ser considerados na escolha de um desses registros, seja a nível de interpretação bem como na quantidade de cálculos realizado.

2 Sistemas lineares

Ao longo deste trabalho sempre faremos referência ao sistema (S), como sendo:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Uma solução de (S) é um terno ordenado $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ que, substituídos no primeiro membro de cada uma das equações do sistema acima, torna-o igual ao segundo membro. Outro aspecto muito importante que fazemos no estudo dos Sistema Lineares é a análise da quantidade de soluções, pois isso permite uma classificação dos sistemas, isto é, se (S) pode ter uma única solução, uma infinidade de soluções ou ainda nenhuma solução. No primeiro caso, diz-se que o sistema é determinado, no segundo, sistema indeterminado e, no terceiro impossível, de forma ilustrativa temos:

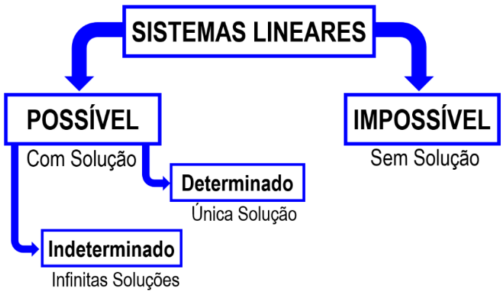


Fig. 1: Autoria própria

Outra forma bem comum de representação de um Sistema (S) é a de associação desse sistema a duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}_{3\times 4} \quad (2)$$

Os vetores-linha da matriz (1) são $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ e $W = (a_3, b_3, c_3)$, e os vetores linha da matriz (2) são $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, todos não nulos.

Também podemos representar o Sistema (S) como resultado da multiplicação de matrizes, dessa maneira esse sistema pode ser escrito na forma

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad (S_M)$$

onde (S_M) passa a representar o sistema (S) na forma matricial, e é o resultado da seguinte operação $A \cdot B = D$. As matrizes A, B e D são chamadas, respectivamente, de matriz dos coeficientes do sistema, matriz das incógnitas e matriz dos termos independentes.

Na maioria dos casos, independente da representação que seja dada a um sistema (S), as atenções se concentram na busca da solução única do sistema determinado, isso pode ser visto em uma breve análise dos livros didáticos usados no nível médio, no entanto, essa ausência de ênfase nos sistemas indeterminados e impossíveis acarretam graves consequências, pois elas dificultam a implementação das diferentes interpretações que um Sistema Linear possui. Quando nos deparamos com um sistema indeterminado e suas infinitas soluções, precisamos analisar e escolher em cada caso a melhor solução que se adapta as nossas necessidades, já nos sistemas impossíveis se faz necessário uma análise das informações que nos são fornecidas para o cálculo das variáveis x, y e z, pois só assim iremos comprovar que tais informações são incompatíveis.

Outro aspecto relevante é que muitos docentes se limitam em apenas classificar e resolver os sistemas lineares em uma única forma de registro, contribuindo assim para que o discente se limite a um simples processo mecânico de repetição dos passos dados pelo professor, além disso, de posse de um único registro de representação para interpretar ou resolver um sistema o aluno não consegue desfrutar de todas as conexões cognitivas que o conteúdo matemático oferece, causando uma rápida desmotivação e portanto limitando o seu aprendizado.

3 Diferentes Interpretações

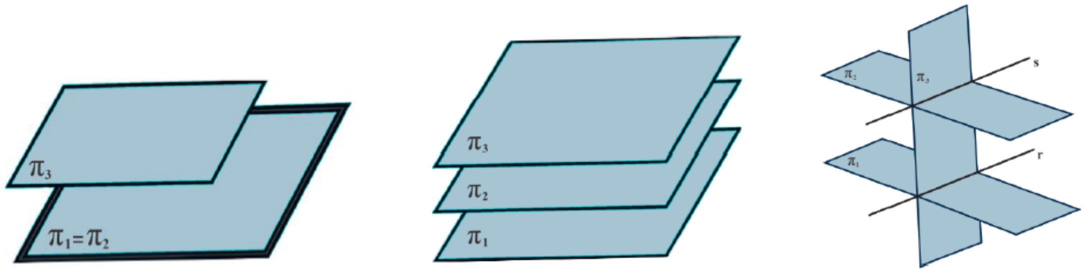
Podemos analisar o Sistema (S) sob diversos pontos de vista, e essa variedade de interpretações é o fator que possibilita e enriquece a sua gama de aplicações e, por outro lado, permite a utilização de diferentes instrumentos para resolvê-lo. Neste trabalho apresentaremos e discutiremos apenas três interpretações sobre o Sistemas Lineares, sendo todas elas de nível elementar, permitindo assim o alcance dessa análise aos discentes do nível médio de ensino.

3.1 Interpretação Geométrica

Quando analisamos um sistema (S) é muito importante que o docente enfatize e o aluno perceba que cada uma das equações que compõem aquele sistema é na verdade a equação de um plano no espaço tridimensional e que as soluções desse sistema são os pontos comuns a esses planos, dados por suas coordenadas cartesianas, ou seja, se π_1, π_2 e π_3 são os planos definidos pelas três equações de (S), então as suas soluções são os pontos $P = (x, y, z)$ que pertencem à interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ desses planos.

Há ao todo 8 posições relativas possíveis para os planos π_1, π_2 e π_3, sendo quatro delas referentes aos sistemas impossíveis e quatro aos sistemas possíveis. Se pelo menos dois desses planos são paralelos (Figura 02), ou se dois deles intersectam o terceiro segundo retas paralelas (Figura 03), a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ é vazia, tornando os sistemas (S) impossíveis.

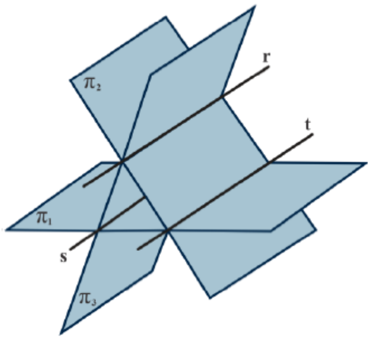
Figura 02: PLANOS PARALELOS



(a) Dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles. **(b)** Planos paralelos dois a dois **(c)** Dois planos são paralelos e o outro os intersecta segundo retas paralelas

Fig. 2: Autoria própria

Figura 03: PLANOS SE INTERSECTAM SEGUNDO RETAS PARALELAS

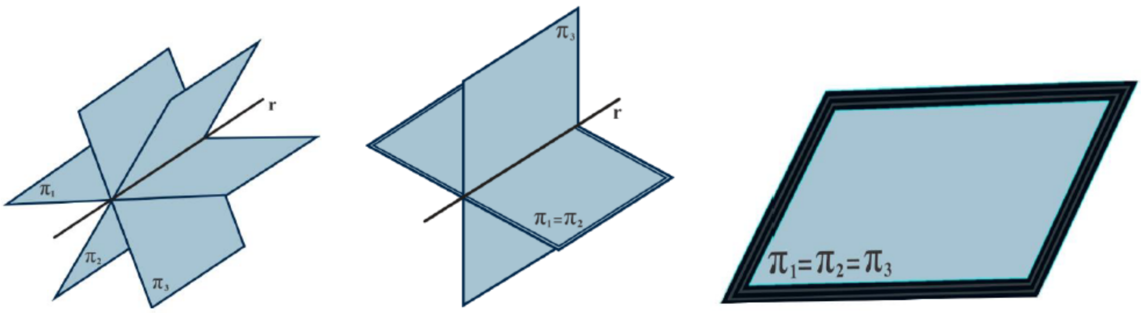


(d) Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.

Fig. 3: Autoria própria

Para um sistema (S) possível, temos ainda duas possibilidades, sendo a primeira para o caso de haver várias soluções, isto é, quando a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ é formada por uma reta r, numa espécie de eixo, contendo simultaneamente os três planos (Figura 04). Neste caso, o sistema é tido como possível, porém indeterminado já que as suas soluções são todos os pontos que formam a reta r.

Figura 04: PLANOS SE INTERSECTAM SEGUNDO UMA RETA



(e) Os três planos são distintos e têm uma reta em comum. **(f)** Dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta. **(g)** Os três planos coincidem.

Fig. 4: Autoria própria

E finalmente temos o último caso para um sistema (S) possível, onde os três planos tem a sua interseção em um único ponto $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P(x, y, z)$, como duas paredes adjacentes e o teto (Figura 05).

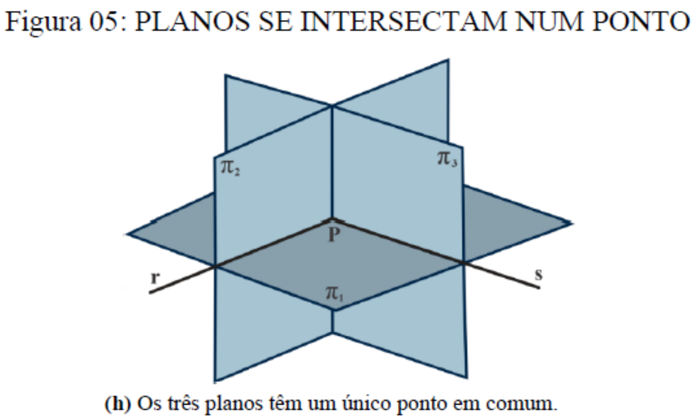


Fig. 5: Autoria própria

3.2 Interpretação Matricial

Desde a antiguidade, em diversas áreas do conhecimento, muitos problemas são modelados matematicamente por sistemas de equações lineares. O conjunto das matrizes tem uma estrutura muito rica, em especial com a noção de produto de matrizes, noção esta, fundamental para a resolução de sistemas de equações lineares com o uso de matrizes. Segundo (HEFEZ – 2016) a definição do produto de matrizes foi apresentada por Arthur Cayley, no trabalho intitulado "A Memoir on the Theory of Matrices", publicada em 1858, onde Cayley notou que a multiplicação de matrizes, como ele a definiu, simplificava em muito o estudo de sistemas de equações lineares. Além disso, observou também que esta multiplicação deixava de apresentar importantes propriedades matemáticas, como a comutatividade e a lei do corte, e que uma matriz não nula não é necessariamente invertível.

Para interpretarmos o sistema (S_M) vamos primeiramente definir o produto de matrizes, pois somente de posse da definição podemos analisar as suas funcionalidades. Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ duas matrizes. O produto AB de A por B, denotado por AB, é definido como a matriz $D = [d_{ij}]_{m \times p}$ tal que $d_{ij} = \sum a_{ij} b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

Para obtermos os elementos da matriz AB que se encontra na i-ésima linha da matriz A e j-ésima coluna da matriz B, multiplique ordenadamente o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna, o segundo elemento da linha com o segundo elemento da coluna, e assim por diante, até o último elemento da linha com o último elemento da coluna e finalmente some todos esses números. Dessa forma, note que para o produto de A por B estar definido, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B.

3.3 Interpretação Vetorial

Quando realizamos a interpretação geométrica (item 3.1) levamos em conta apenas as linhas do Sistema (S), os quais representam os planos π_1, π_2. Nesse momento iremos concentrar as nossas atenções para as colunas do Sistema (S), que são os vetores $a = (a_1, a_1, a_1)$, $b = (b_1, b_1, b_1)$, $c = (c_1, c_1, c_1)$ e $d = (d_1, d_1, d_1)$, do espaço $\mathbb{R}$.

Sejam u e v dois vetores, a soma desses vetores $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ é definida como $u + v = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma')$ e o produto do vetor u pelo número real x é o vetor $x \cdot u = (x\alpha, x\beta, x\gamma)$, além disso dado um terceiro vetor $w = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$ e os números reais y e z, a combinação linear $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w$ é portanto o vetor $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\ \beta x + \beta' y + \beta'' z,\ \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)$, assim, afirmar que (x, y, z) é uma solução do sistema (S) significa dizer que vale a igualdade vetorial

$$ax + yb + cz = d \qquad (S_V)$$

sendo (S_V) a representação vetorial do sistema (S), ou seja, escrever (S_V) significa exprimir d como combinação linear dos vetores a, b e c, onde as incógnitas x, y, z são os coeficientes numéricos dessa combinação.

Se os vetores-coluna a, b e c forem não-coplanares, todo vetor d em $\mathbb{R}^3$ se exprime de modo único, como combinação linear de a, b, c, isto é, (S_V) possui uma única solução, não importando qual seja o segundo membro d, entretanto, se os vetores a, b, c estiverem no mesmo plano, o sistema não terá solução, a menos que d esteja nesse mesmo plano, e se a, b, c forem colineares, d deve ser colinear também para que (S_V) possua solução.

3.4 Análise das Interpretações

As três interpretações apresentadas têm registros de representação bastante diferenciados e ao fazermos a sua análise o nosso intuito não é a de dizer qual delas é a mais vantajosa, e sim o de analisar quais combinações de registros possibilitam o melhor entendimento do conteúdo Sistemas Lineares. Sobre essa perspectiva, Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), consideram que na escola as atividades propostas têm, em geral, um único registro e pouca relação com a realidade. Esses autores nos proporcionam uma reflexão sobre a nossa prática uma vez que estamos acostumados a trabalhar atividades na categoria de exercícios que privilegiam apenas o reconhecimento e a repetição de algoritmos de um único registro e consequentemente uma única interpretação.

A interpretação geométrica de um Sistema Linear tem uma importância riquíssima, pois além de fornecer significado prático a cada uma das equações que compõem o sistema (equações dos planos) e possibilitar a visualização das diferentes combinações que esses planos (equações) podem ter entre si, gera uma relação direta e imediata entre os conteúdos Sistemas Lineares e Geometria Analítica, criando um fluxo de continuidade no ensino médio muito valioso.

Battaglioli (2008) ressalta a importância de se explorar o registro gráfico na resolução dos sistemas lineares, uma vez que tal procedimento poderá contribuir para que os alunos tenham maior facilidade, não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário. Nesse ponto, apesar de encontramos esse registro de interpretação em muitos livros didáticos, seus autores não exploram o registro gráfico com todas as suas implicações, pois o que encontramos são gráficos já resolvidos e com poucas proposta de realização de novos exercícios, sendo que essas atividades quando sugeridas se concentram muito no registro de solução única, porém como vimos essa é apenas uma dentre oito possibilidades que temos no sistema do tipo 3×3.

A interpretação Matricial de um Sistema Linear possibilita ao discente uma ampliação natural para outros métodos de resolução, que aqui ficaram restritos ao cálculo da matriz inversa de A, denotado por A^{-1} e a montagem das matrizes dos coeficientes que serão usadas na Regra de Cramer. Contudo essa ampliação converge de forma natural para métodos interativos como o de Jacobi e o de Gauss-Seidel, além de aproximar o aluno de ferramentas computacionais como alguns *softwares* específicos, reduzindo os cálculos manuais. Essa complementação da Álgebra com os recursos computacionais está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

> Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. (PCN, 1999)

E também se encontra na BNCC, reforçando assim a relevância da junção de tais interpretações com as ferramentas digitais disponíveis e acessíveis aos alunos.

> [...], a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares (...) para que eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de fluxogramas e algoritmos. (BNCC, 2018, p. 518)

Consequentemente, os documentos oficiais reforçam a importância do registro de representação e interpretação matricial dos sistemas lineares, pois ela abre caminho para um grande acréscimo de métodos de resolução e da inserção das tecnologias em problemas reais que podem ser modelados e solucionados por um sistema linear.

A interpretação Vetorial dos Sistemas Lineares, também oferece um alargamento do uso dos sistemas em outras áreas da matemática, possibilitando importantes conexões com a interpretação geométrica e matricial através da apresentação de conceitos como norma de um vetor, produto interno, produto vetorial e produto misto, produzindo assim significados e possibilitando a sua utilização em outras áreas do conhecimento, como a Física, uma vez que a mesma possui muitas de suas grandezas com aspectos vetoriais.

Dessa forma, não nos parece que a utilização de qualquer uma dessas interpretações sozinhas, ou combinadas duas a duas sejam capazes de por si só produzir o entendimento abrangente e necessário dos Sistemas Lineares sem que sejam criadas limitações no aprendizado dos discentes, haja vista, que seus registros de representação e consequentemente de interpretação se comunicam entre si de forma continua, corroborando portanto com (DUVAL 2003), produzindo uma tríade que caminha junto com os respectivos métodos de resolução, que apresentaremos a seguir.

4 Métodos de Solução

As equações lineares, bem como os sistemas de equações, são bastante úteis em uma grande diversidade de problemas, por isso é muito comum encontramos questões referentes a isso em certames como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), nesses problemas é comum que a pergunta seja sobre os valores máximo ou mínimo de uma função, isto é, a função que se quer otimizar é uma função linear e as igualdades a que estão sujeitas suas variáveis também são lineares. Os Sistemas Lineares do tipo 3x3 usados no ensino médio podem ser resolvidos de várias formas, no entanto os três métodos que apresentaremos a seguir são os mais comuns, com destaque para a tradicional e consagrada Regra de Cramer.

Cabe a ressalva de que o nosso maior objetivo é o de analisar o custo operacional desses três métodos de resolução, sendo assim, não entraremos em maiores detalhes de cada método. E para realizar essa análise vamos admitir que as operações de adição e subtração tenham custo operacional muito pequeno, o que nos permite descartar a contagem dessas operações em todos os processos, logo, vamos analisar apenas a quantidade de multiplicações e divisões para cada método.

4.1 Escalonamento

O método de escalonamento consiste em substituir o sistema (S) por um equivalente, isto é, que possua as mesmas soluções, aqui denotado por (S_E). Toda matriz pode ser transformada por meio de uma sequência de transformações elementares sobre linhas numa matriz em uma forma muito especial, a forma escalonada. Vale rever a descrição desse método básico de resolver sistemas lineares, a fim de observar o uso de operações elementares no seu registro de representação.

> O método básico de resolver um sistema linear consiste em efetuar operações algébricas apropriadas nas equações do sistema para produzir uma sucessão de sistemas cada vez mais simplificados, mas com o mesmo conjunto solução do sistema original, até chegar num ponto em que fica visível se o sistema é consciente e, se for, quais são suas soluções. (ANTON e BUSBY, 2006 apud BISOGNIN; CURY, 2009, p.7)

Bisognin e Cury (2009) ressaltam que a tônica do processo de resolução está nas operações elementares da resolução dos sistemas lineares abordados ainda no Ensino Fundamental. O trabalho das duas autoras, revela a preferência dos alunos pelo uso do método de adição. Em nossa prática em sala de aula, percebemos que ao adotarmos o registro do escalonamento na resolução do sistema linear 3×3, verifica-se que os alunos apresentam dificuldades ao aplicar o método, pois ao multiplicarem a primeira equação por um número pertencente ao conjunto $\mathbb{R}^*$, adicionando a seguir o resultado com a segunda ou terceira equação, os alunos erram nos cálculos. Vamos então a descrição do método.

Um sistema (S) diz-se escalonado quando o primeiro elemento não nulo de cada linha se situa à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad my + nz = h \qquad tz = g \qquad (S_e)$$

Como podemos observar (S_E) pode ser resolvido facilmente de baixo para cima, ou seja, a última equação fornece o valor de z, em seguida substituímos o resultado encontrado na segunda equação e após efetuar as operações necessárias encontramos o valor de y e por fim repetimos o procedimento na primeira equação para achar o valor de x.

Para passar o sistema (S) para a forma (S_E), substitui-se a segunda equação por a_2 vezes a primeira equação menos a_1 vezes a segunda, isso faz com que o termo em x da segunda equação seja eliminado, de modo análogo, elimina-se o termo em x da terceira equação, nesse momento deixamos a primeira equação de fora das operações, dessa forma, usa-se o mesmo processo nas duas últimas (nas quais x já foi eliminado) para eliminar y na terceira equação e obter um sistema escalonado (S_E).

4.1.1 Custo Operacional do Escalonamento

Para avaliarmos esse custo operacional do sistema (S) vamos levar em consideração as operações necessárias para que ele seja escalonado, ou seja, escrito na forma (S_E), bem como as operações para se determinar o valor das incógnitas com o sistema já escalonado. Sendo assim, são necessárias $(4+4)+(4+4)=16$ multiplicações para eliminar o x das equações dois e três do sistema (S) e mais $3+3=6$ multiplicações para se eliminar o y da equação três do sistema (S), isto é, o custo operacional para apenas escalonarmos o sistema (S) e escrevermos ele na forma (S_E) é de $16+6=22$ multiplicações.

Com as operações do escalonamento já contabilizadas vamos para a contagem da determinação dos valores das incógnitas. É necessária uma divisão para se obter z, uma multiplicação e uma divisão para se achar y e duas multiplicações mais uma divisão para encontrar x, totalizando seis operações, sendo metade multiplicação e a outra metade divisão.

Ao todo, usamos 28 operações, sendo 25 delas multiplicações e 3 divisões para resolver um sistema linear do tipo 3×3 pelo método de escalonamento. Essa quantidade pode ser menor se na montagem do sistema fornecido na questão já tivermos alguma etapa do escalonamento realizada, mas vamos considerar apenas o caso completo, ou seja, quando os coeficientes de (S) forem todos diferentes de zero.

4.2 Resolução Matricial

Este método de resolução consiste em escrever (S) sob a forma (S_M), praticamente nos impõe a solução $B \cdot A^{-1}$, ou seja, exige que exista a inversa A^{-1} da matriz A. Por definição A^{-1} é a matriz que ao ser multiplicada por tem como resultado a matriz identidade, porém para que A^{-1} exista, é necessário e suficiente que o determinante $det(A)$ da matriz seja diferente de zero, se isso ocorrer, então

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32} \\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}$$

onde o determinante menor Δ_{if} é o determinante da matriz A obtida de pela supressão da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

De posse da expressão para o cálculo de A^{-1}, pode-se efetuar de forma imediata a multiplicação de $A^{-1} \cdot D$, obtendo assim as expressões explícitas para as incógnitas x, y, z, pode-se observar mais adiante que tais expressões coincidem com as dadas pela Regra de Cramer, a qual será apresentada a seguir em (4.3) por meio de um raciocínio elementar, que não depende da teoria das matrizes.

4.2.1 Custo Operacional Matricial

A contagem do custo operacional da resolução por matrizes inicia-se com a determinação da inversa da matriz A, isto é, desenvolvendo-se através de uma linha ou coluna, obtemos 9 multiplicações para achar $det\,(A)$. Posteriormente calculamos os determinantes menores Δ_{ij}, que totalizam mais 9 operações, sendo que três delas já foram contabilizadas na expansão do $det\,(A)$. Sobram, portanto, 6 operações, sendo que cada uma requer 2 multiplicações, assim já contabilizamos $9 + 12 = 21$ multiplicações. Em seguida divide-se cada um dos determinantes menores Δ_{ij} pelo $det\,(A)$, são mais 9 operações.

Observe que somente o cálculo da matriz inversa de A possui um custo operacional superior ao escalonamento, pois já temos $21 + 9 = 30$ operações e ainda precisamos contabilizar o produto de $A^{-1} \cdot D$, o que requer mais 9 multiplicações, estabelecendo um custo operacional total de $30 + 9 = 39$ operações, sendo 30 delas multiplicações e 9 divisões.

4.3 Resolução pela Regra de Cramer

Em 1748, Colin Maclaurin publicou um trabalho intitulado Um Tratado sobre Álgebra em Três Partes, apresentando o que o autor chamou de teorema geral, que era usado para resolver um sistema linear $n \times n$ onde $n \leq 4$. O método apresentado por Maclaurin é hoje conhecido como Regra de Cramer, após o matemático Gabriel Cramer ter usado o método de Maclaurin em seu livro curvas algébricas de 1750.

Maclaurin observou em seu trabalho que as expressões para as incógnitas x, y, z do sistema (S) tinham sempre o mesmo denominador, além disso ele notou que o numerador das expressões de cada uma das incógnitas consistia na soma alternada de vários produtos dos coeficientes das demais incógnitas e dos termos independentes do sistema. Essas expressões que Maclaurin observava em seus numeradores e denominadores são hoje conhecidos como determinantes, termo que foi introduzido pela primeira vez por Gauss em 1801.

Aqui usaremos uma notação simplificada, onde denotamos por $det[u, v, w]$ para indicarmos o determinante da matriz cujas colunas são os vetores $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $w = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Se a terna (x, y, z) é a solução do sistema (S), isto é, se $d = xa + yb + zc$, de acordo com a interpretação vetorial (S_v), então as propriedades elementares dos determinantes nos permite escrever

$$\begin{aligned} det[d,b,c] = det[x\cdot a + y\cdot b + z\cdot c,\ b,\ c] &= x\cdot det[a,b,c] + y\cdot det[b,b,c] + z\cdot det[c,b,c] \\ &= x\cdot det[a,b,c] + y\cdot 0 + z\cdot 0 \\ &= x\cdot det[a,b,c] \end{aligned}$$

Agindo de forma análoga para os demais vetores, encontramos

$$det[a,d,c] = y\cdot det[a,b,c] \quad \text{e} \quad det[a,b,d] = z\cdot det[a,b,c]$$

Presumindo que o $det[a,b,c] \neq 0$, obtemos

$$x = \frac{det[d,b,c]}{det[a,b,c]}, \qquad y = \frac{det[a,d,c]}{det[a,b,c]}, \qquad z = \frac{det[a,b,d]}{det[a,b,c]}$$

A esse conjunto de expressões que conhecemos hoje como sendo a Regra de Cramer.

4.3.1 Custo Operacional da Regra de Cramer

Realizar o custo operacional da Regra de Cramer é sem dúvida uma grande oportunidade de reflexão sobre a prática docente, pois são quase duas décadas ensinando essa técnica sem nunca ter parado para contar a quantidade de operações que realizamos. Para resolvermos um sistema (S) por essa regra, devemos calcular 4 determinantes, que usualmente solucionamos usando a expansão segundo linhas ou colunas, que conhecemos com o nome de Regra de Sarrus, onde cada um desses determinantes requer 9 multiplicações, isto é, um custo parcial de $4 \times 9 = 36$ operações. Em seguida, temos as 3 divisões para determinarmos os valores das incógnitas, o que proporciona um custo total de $36 + 3 = 39$ operações.

5 Comparando os três métodos

Após o levantamento do custo operacional de cada método na resolução de um Sistema Linear (S), montamos o gráfico a seguir, afim de deixar esses dados de forma mais explícita possível e poder fazer as considerações necessárias sobre os métodos. Com o gráfico, observamos claramente que o método do escalonamento é o de menor custo operacional se considerarmos apenas a operação de multiplicação, que ele possui o mesmo custo operacional nas divisões que a Regra de Cramer e que no geral apresenta a menor quantidade de operações.

Como podemos observar no gráfico, o baixo custo operacional já seria uma razão suficiente para a escolha do método do escalonamento, pois os outros dois processos apresentam um custo operacional cerca de 40% superior. Podemos também analisar que a Regra de Cramer só se aplica para $\det[a,b,c] \neq 0$, isto é, no caso do sistema (S) ter solução única, porém como vimos em (3.1) são oito as possibilidades de posições relativas dos três planos no espaço, ou seja, a posição em que esses planos se intersectam é apenas uma das oito possibilidades.

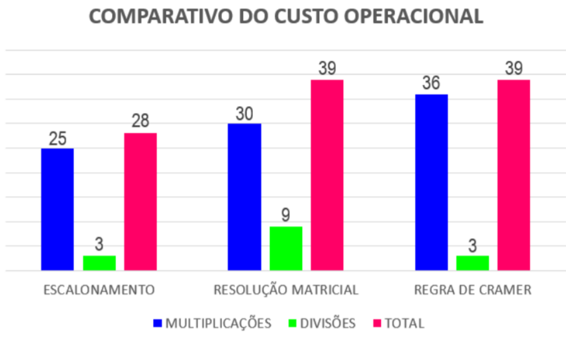


Fig. 6: Autoria própria

Outro aspecto favorável ao escalonamento é que o mesmo não depende de nenhuma hipótese sobre o determinante da matriz dos coeficientes, o que possibilita uma flexibilização da ordem tradicional em que trabalhamos os conteúdos Matrizes, Determinantes e Sistemas. Essa independência do determinante não impede que o sistema seja analisado e classificado, pois se (S) for impossível, o escalonamento chegará a uma terceira equação na forma $0 \cdot z = g$, com $g \neq 0$, e, se for indeterminado, chega-se a equação na forma $0 \cdot z = 0$. Não queremos com essa análise desprezar a modelagem matricial e a Regra de Cramer na resolução de Sistemas Lineares, pois como veremos adiante esses métodos também possuem aspectos que merecem a nossa atenção, apesar de um maior custo operacional.

É preciso enfatizar também que no método matricial, a expressão $B = A^{-1} \cdot D$ sugere um tratamento algébrico das quantidades que ocorrem num sistema linear, seja pelo número de equações como pelo número de incógnitas, e que essa Álgebra Matricial gera um interesse, especialmente no campo computacional. Além disso, não podemos deixar de analisar o contexto no qual esse conteúdo será ministrado, pois se um dos objetivos do docente responsável por lecionar Sistemas Lineares for o de revisitar ou mesmo o de estabelecer uma relação com a inversa de uma matriz fica claro os benefícios desse método frente aos outros dois, apesar do alto custo operacional.

Quanto a Regra de Cramer, observamos que suas fórmulas que calculam explicitamente x, y, z em termos dos coeficientes numéricos a_i, b_i, c_i e d_i, têm grande importância teórica, uma vez que permite, entre outras coisas, avaliar o grau de mudança desses resultados x, y, z quando se permutam, ou se cometem erros, nas medidas que fornecem os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i. Além disso, vale destacar que como a Regra de Cramer tem intima relação com o conceito de determinante, e que por tratar-se de um valoroso conceito matemático do ponto de vista algébrico já que ele é a única função multilinear alternada das linhas ou colunas de uma matriz quadrada. Do ponto de vista geométrico, o determinante é o volume de um paralelepípedo cujas arestas são as colunas da matriz em questão.

Dessa forma podemos analisar que apesar de possuir um custo operacional superior, tanto o método matricial como a Regra de Cramer possuem elementos suficientes para que eles não sejam descartados dos nossos currículos escolares, pois vale relembrar que a análise proposta deste trabalho é de um sistema linear do tipo 3×3, e isso produz o sugestivo questionamento: E para sistemas maiores, o escalonamento continuará a oferecer o menor custo operacional?

Cabe ressaltar que o sistema (S) aqui resolvido e analisado, apesar de muito comum no ensino médio, na prática matemática para além da sala de aula não é típico. Em muitas aplicações matemáticas encontram-se sistemas de equações com dezenas, centenas, ou mesmo milhares de incógnitas. Quando o número de incógnitas cresce, a diferença de custo operacional entre a Regra de Cramer (ou o método matricial) e o método do escalonamento aumenta rapidamente. Imaginando sistemas lineares em que o número de equações seja igual ao número de incógnitas, isto é, do tipo $n \times n$, podemos ilustrar com a tabela 01 como esse custo operacional entre o escalonamento e a Regra de Cramer se tornam absurdamente significativos.

Tabela 01: Comparativo do custo operacional para Sistemas $n \geq 3$

n	ESCALONAMENTO	REGRA DE CRAMER
3	28	39
4	62	210
5	115	1.242
6	191	8.666
7	294	69.288
8	428	623.538
9	597	6.235.310
10	805	68.588.322

Fig. 7: Autoria própria

Com o surgimento dos computadores, foi possível resolver sistemas lineares com cada vez mais incógnitas, o que permitiu também a abertura de caminhos para novas técnicas de resolução de sistemas lineares além das relatadas aqui, entre elas destacam-se os métodos interativos, cuja aplicação abrange também os sistemas não-lineares.

6 Considerações Finais

Após analisarmos os três modelos de representação mais usados de Sistemas Lineares no ensino médio, comprovamos que eles possuem elementos essenciais para o entendimento do conteúdo, no entanto, em todos eles necessitam-se de complementos, que sempre estão sob a esfera de influência dos demais métodos. Pois se um sistema (S) pode ser escrito também no formato matricial (S_M) e no formato vetorial (S_V), fica evidente que cada uma dessas representações possui um conjunto de habilidades que precisam ser satisfeitas e contabilizadas para que haja o melhor entendimento do conteúdo, e que isso só ocorre quando o aluno percebe as conexões e as interseções presentes em cada representação.

Quanto ao custo operacional, a discrepância que se verifica quanto ao número de operações necessárias para se resolver um sistema linear do tipo 3×3, ou ainda para quantidade maiores de equações e incógnitas (ver tabela 01), nos conduz facilmente ao método do escalonamento, sem que isso signifique um abandono das outras técnicas, pois como vimos, todas apresentam aspectos modelares necessários para o entendimento de outros tópicos matemáticos, bem como o de criação de familiaridade dessas ferramentas matemáticas.

Vale ressaltar também que se todas as interpretações e os métodos de resolução de Sistemas Lineares do tipo 3x3 aqui discutidos, forem aplicados de forma planejada e equilibrada o aluno terá a sua disposição combinações de registros de representação que favorecerão o entendimento do conteúdo além de proporcionar relações com outros assuntos e a utilização de tecnologias a eles associadas.

Bibliografia

[1] ANTON, H.;BUSBY, R.C.(2006). **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman.

[2] BATTAGLIOLI, C.S.M. (2008). **Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos**. Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo.

[3] BISOGNIN, E.;CURY, H. N.(2009). **Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações**. BOLEMA, Rio Claro.

[4] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. P. 90-148.

[5] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_El_EF_110518_versaofinal _site.pdf. Acesso em: 18/07/2022.

[6] DANTE, L. R. **Matemática**. Volume único, Editora Ática, SP - 2005.

[7] DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. p.11-33. In MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

[8] HEFEZ, A., FERNANDEZ, C. **Introdução à Álgebra Linear: Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Edição 2.

[9] LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro. SBM 19007. Edição 3.

[10] LIMA, E.L. **Sobre o ensino de Sistemas Lineares.** Revista do Professor de Matemática, n. 23, 1º semestre de 1993.

[11] MEYER, João Frederico da Costa; CALDEIRA, Ademir Donizete; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.