Álgebras de Jordan Euclidianas e Cones Simétricos.

Marjenny Rodríguez e Joelma Morbach

Universidade Federal do Pará

2024

Definição (Álgebra Sobre um Corpo)

Seja A um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ onde está definida uma operação $\cdot$ que satisfaz

a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$

b) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z;$

c) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y),$

para quaisquer $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Dizemos que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra (ou simplesmente uma álgebra).

Álgebras de Jordan

Exemplo

Considere o conjunto dos polinômios de grau menor que n com coeficientes complexos,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) := \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}; a_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, \cdots, n-1\}\}.$$

Com o produto usual em $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. De fato, temos que o produto definido nos complexos é distributivo e podemos associar escalares.

Álgebras de Jordan

Definição (Álgebras de Jordan)

Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{J}$ é dita de Jordan se

a) $x \cdot y = y \cdot x$;

b) $(x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x)$

para quaisquer $x, y \in \mathcal{J}$.

Exemplo

$(\mathbb{C}, \cdot)$, onde $\cdot$ denota o produto usual dos complexos. De fato, dados $(a+bi), (c+di) \in \mathbb{C}$ temos

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (c+di)\cdot(a+bi).$$

Assim como

$$(a+bi)^2\cdot[(c+di)\cdot(a+bi)] = [(a+bi)^2\cdot(c+di)]\cdot(a+bi).$$

Álgebras de Jordan

Dada uma álgebra associativa A podemos definir um novo produto $\odot$ dado por

$$x \odot y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x).$$

para $x, y \in A$ e $\cdot$ denotando o produto usual em A. $\odot$ é chamado Produto de Jordan e $(A, \odot)$ é chamada de $A^{(+)}$.

Álegebras de Jordan

Definição (Álgebra de Jordan Formalmente Real)

Seja A uma álgebra de Jordan, se

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

para $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$, então A é dita uma álgebra de Jordan formalmente real.

Álgebras de Jordan

Exemplo

O espaço vetorial das Matrizes Hermitianas sobre os Quatérnios ($\mathbb{H}$) *com o produto* $\odot$ *é uma Álgebra de Jordan Formalmente Real.*

Álgebras de Jordan

Definição (Álgebras de Jordan Euclidianas)

Dada uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ *onde está definido em seu espaço vetorial um produto interno* $< .,. >$ *e uma forma bilinear* $\cdot : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$. *Chamamos* $(\mathcal{J}, \cdot)$ *de álgebra de Jordan Euclidiana se*

(i) $x \cdot y = y \cdot x;$

(ii) $x \cdot (x^2 \cdot y) = (x \cdot x^2) \cdot y;$

(iii) $< x \cdot y, z > = < x, y \cdot z >,$

para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{J}$.

Álgebras de Jordan

Exemplo

Considere a álgebra das matrizes simétricas de ordem n sobre os reais com o produto de Jordan - $(S_n(\mathbb{R}), \odot)$ - e o produto interno dado por

$$
\begin{aligned}
< .,. >: S_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\
(A, B) &\mapsto tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}.
\end{aligned}
$$

Cones

Definição (Cones em um Espaço Vetorial)

Se V é um espaço vetorial, um subconjunto C de V não-vazio é um cone em V se $C + C \subset C$ e $\alpha C \subset C$ para todo $\alpha > 0$.

Cones

Definição (Cones em um Espaço Vetorial)

Se V é um espaço vetorial, um subconjunto C de V não-vazio é um cone em V se $C + C \subset C$ *e* $\alpha C \subset C$ *para todo* $\alpha > 0$.

Exemplo

Considerando espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ *temos o cone positivo, que é um conjunto de vetores que se originam no ponto zero (a origem) do espaço vetorial e se estendem em todas as direções, se mantendo no primeiro octante. Especificamente, o cone positivo inclui todos os vetores que têm componentes não negativos em relação aos eixos do espaço vetorial.*

Cones

Definição (Dual de um Cone)

Dado C um cone sobre o espaço vetorial V, o dual de um cone é dado por

$$C^* := \{u \in V; \langle u, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\}.$$

Cones

Definição (Dual de um Cone)

Dado C um cone sobre o espaço vetorial V, o dual de um cone é dado por

$$C^* := \{u \in V; \langle u, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\}.$$

Se $C^* = C$, dizemos que C é autodual. Além disso, C é dito homogêneo se para cada $x, y \in C$ existe uma bijeção linear T tal que

$$T(x) = y \text{ e } T(C) = C.$$

Definição (Cones Simétricos)

Um cone C é dito simétrico se for não vazio, autodual e homogêneo.

Cones

Teorema

Seja A um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Um cone $C \subset A$ é simétrico se e somente se os elementos de C são quadrados de alguma álgebra de Jordan Euclidiana $(A, \cdot)$, isto é $C := \{u \cdot u; u \in A\}$.

Programação

Forma Primal de Programação Semidefinida.
Um típico programa semidefinido (SPD) é a maximização de problemas da forma

$$p^* = \sup_X \left\{ \langle C, X\rangle ; \langle A_j, X\rangle = b_j, (j \in \{1, \cdots, m\}), X \preceq 0 \right\},$$

onde $A_1, \cdots, A_m \in S_n$ e $b = (b_1, \cdots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. A matriz X é a variável, semidefinida positiva e pertence ao subespaço afim de S_n

$$\mathcal{W} = \left\{ X \in S_n ; \langle A_j, X\rangle = b_j, (j \in \{1, \cdots, m\}) \right\}.$$

Programação

Forma Dual de Programação Semidefinida.
A forma dual de um programa semidefinido assume a seguinte configuração

$$d^* = \inf_y \left\{ \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = b^T y ; \sum_{j=1}^{m} y_j A_j - C \geq 0 \right\}.$$

Neste caso temos que os y_i são as variáveis.

Programação

Na intenção de minimizar (ou maximizar) uma função $F(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$ sujeita a $G(x) \in C$, onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^n \to A$ são funções contínuas e diferenciáveis, $C \subset A$ é um cone simétrico e A é um espaço vetorial com produto interno.

Programação

Na intenção de minimizar (ou maximizar) uma função $F(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$ sujeita a $G(x) \in C$, onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^n \to A$ são funções contínuas e diferenciáveis, $C \subset A$ é um cone simétrico e A é um espaço vetorial com produto interno. Teremos que F será da forma

$$F(x) = 0,5 \cdot x^T \cdot P \cdot x + c^T \cdot x,$$

onde x é um vetor de variáveis de decisão, Q é uma matriz simétrica que define a forma quadrática da função e c é um vetor de coeficientes lineares. Definindo a função Lagrangiana $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T \cdot G(x)$$

Programação

onde λ é um vetor de multiplicadores de Lagrange. Para otimizar esta função usaremos as condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) que são:

1. $\nabla F(x) + \nabla \lambda^T \cdot G(x) = 0$.
2. $G(x) \leq 0$ (restrições de igualdade e desigualdade são satisfeitas).
3. $\lambda_i G_i(x) = 0$ para $i = 1, \cdots, m$ onde m é o número de restrições de desigualdade (Restrição de complementaridade).
4. $\lambda_i > 0$ para $i = 1, \cdots, m$.

Programação

Definimos o cone das matrizes semidefinidas positivas como $S_n^+ = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n}; X \succeq 0\}$. Temos que S_n^+ é autodual e homogêneo, portanto, é simétrico.

Programação

Definimos o cone das matrizes semidefinidas positivas como $S_n^+ = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n}; X \geq 0\}$. Temos que S_n^+ é autodual e homogêneo, portanto, é simétrico.
As propriedades de cones como este são estudadas na teoria da dualidade e nas condições KKT, tornado-as fundaamentais para resolver problemas de otimização semidefinida.

Referências

- Viana, D. S., Condições de Otimalidade para Otimização Cônica. USP, 2019.
- de Brito Lima, C.A., Sobre Álgebras de Jordan e Cones Simétricos. UFPA, 2021.
- McCrimmon, K.; A Taste of Jordan Algebras. Springer, 1941.
- Laurent, M., Vallentin, F.; Semidefinite Optimization. Technical University of Delft, 2012.
- Silva, J.C.; Primal-Dual Interior-Point Methods For Self-Scaled Cones. UFAM, 2012.
- Nesterov, YU. E., Todd, M.J.; Problemas de Equilíbrio e Métodos de Lagrangeano Aumentado Para Problemas de Desigualdades Variacionais. SIAM, 1998.

Obrigada!