

XI BIENAL DE MATEMÁTICA 2024

Modelagem e Simulação das Diferentes Ondas da Pandemia de COVID-19 no Brasil



Universidade de São Paulo

Marina Lima
ICMC - USP

João Frederico C. A. Meyer
IMECC - UNICAMP



mlima@icmc.usp.br

Conteúdo

- 1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento
- 2 Modelagem Epidemiológica
- 3 COVID-19
- 4 Primeira Onda
- 5 Ondas Sucessivas
- 6 Variante Ômicron
- 7 Conclusões e Perspectivas Futuras

1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento

2 Modelagem Epidemiológica

3 COVID-19

4 Primeira Onda

5 Ondas Sucessivas

6 Variante Ômicron

7 Conclusões e Perspectivas Futuras

Modelagem Matemática

Precisamos da Modelagem Matemática para

- ① “Ler” o mundo
- ② Construir conhecimento no diálogo
- ③ Criticar esse conhecimento
- ④ Colocar a ciência a serviço da comunidade

Meyer e Lima (2022) *ZDM – Mathematics Education*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Dinâmica Populacional

- Como se comportam as populações? de pessoas, de animais, de pessoas que tomaram a vacina? de pessoas que não se vacinaram?
- Quantos peixes (alimento) ou quantos insetos (doença) ou quantas pessoas a serem vacinadas (saúde) haverá ano que vem? e quais são as políticas públicas necessárias?
- Contar indivíduos ou simular densidades populacionais...

Modelos de crescimento

Malthus (1798)

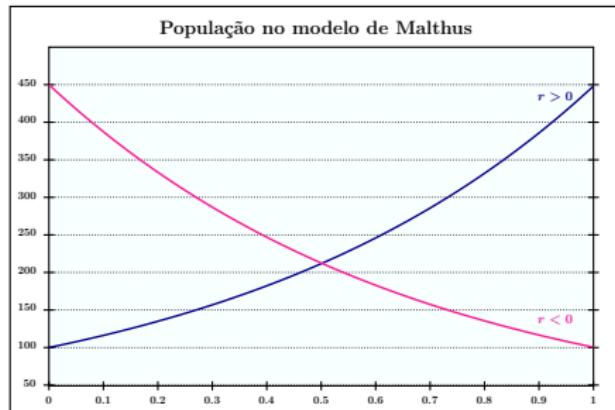
- Alimento $A(t)$ cresce em progressão aritmética
- População $P(t)$ cresce em progressão geométrica
- Em algum momento, $P(t)$ ultrapassa o que $A(t)$ fornece

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

$r > 0$ taxa de crescimento

$r < 0$ taxa de declínio

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$



Inevitavelmente, acontecerão: guerras, pragas, epidemias, fome...

Modelos de crescimento

Verhulst (1838)

- Fatores limitantes para crescimento populacional: capacidade de suporte
- A taxa de crescimento varia ao longo do tempo

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right] \implies \text{Equação Logística}$$

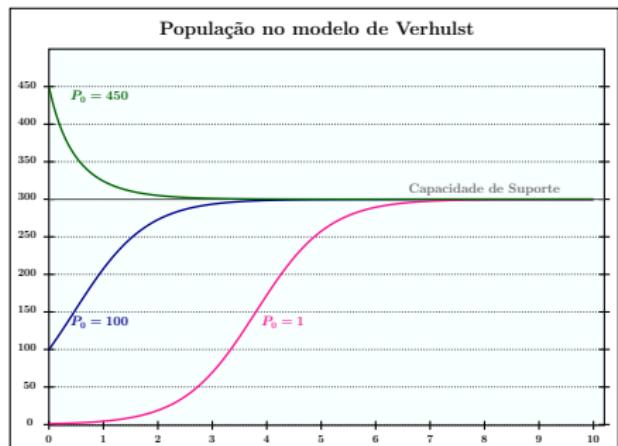
r taxa de crescimento

K capacidade de suporte

$P \rightarrow K$: taxa de crescimento se reduz até chegar a zero

$P = K$ capacidade máxima populacional

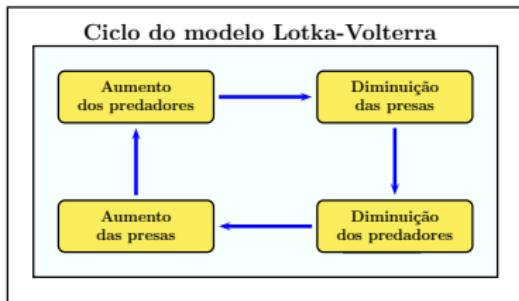
$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$



Modelos de crescimento

Lotka-Volterra (1925)

- Modelo presa $N(t)$ e predador $P(t)$



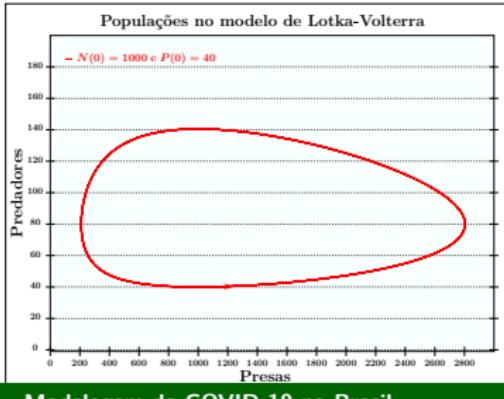
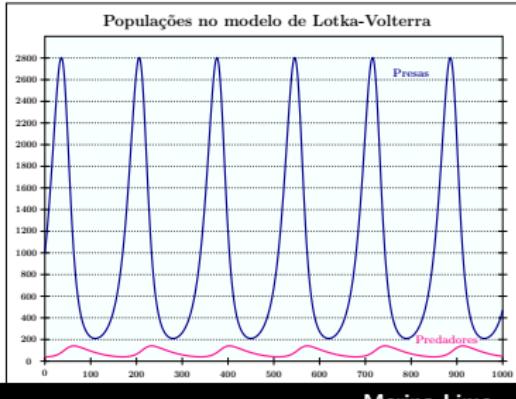
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)P(t), \quad N(0) = N_0$$
$$\frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t), \quad P(0) = P_0$$

α crescimento das presas

γ morte dos predadores pela falta de comida

β constante de mortalidade das presas

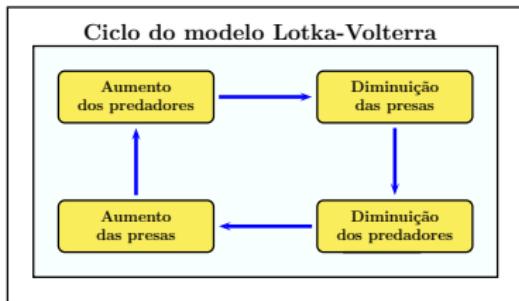
δ natalidade dos predadores



Modelos de crescimento

Lotka-Volterra (1925)

- Modelo presa $N(t)$ e predador $P(t)$



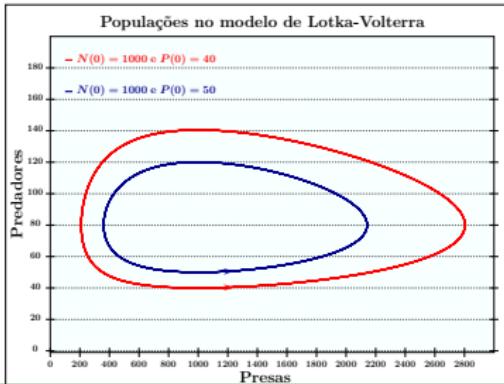
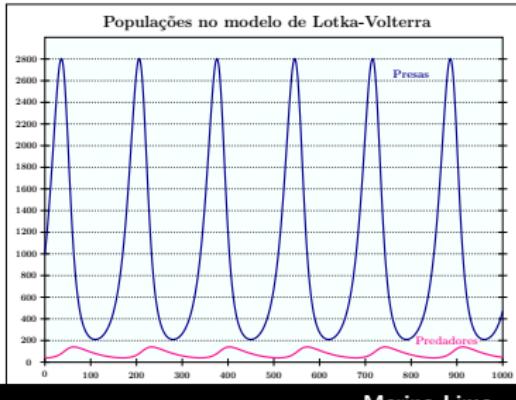
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)P(t), \quad N(0) = N_0$$
$$\frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t), \quad P(0) = P_0$$

α crescimento das presas

γ morte dos predadores pela falta de comida

β constante de mortalidade das presas

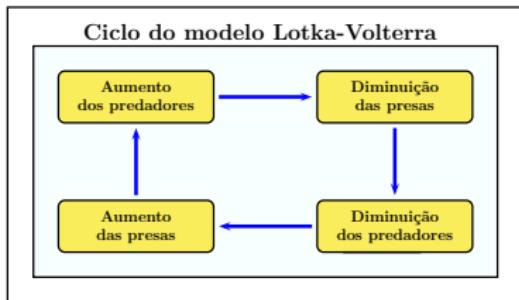
δ natalidade dos predadores



Modelos de crescimento

Lotka-Volterra (1925)

- Modelo presa $N(t)$ e predador $P(t)$



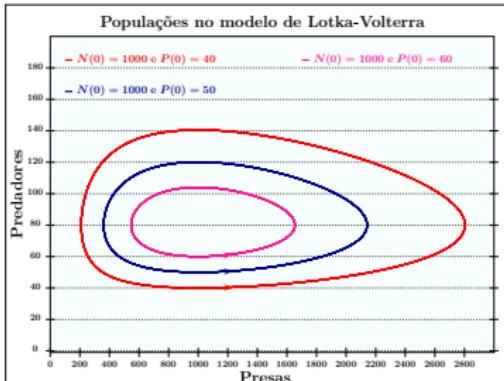
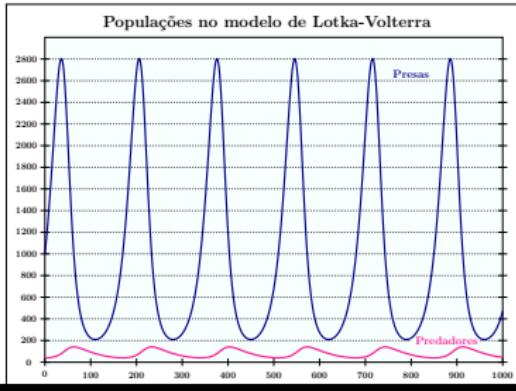
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)P(t), \quad N(0) = N_0$$
$$\frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t), \quad P(0) = P_0$$

α crescimento das presas

γ morte dos predadores pela falta de comida

β constante de mortalidade das presas

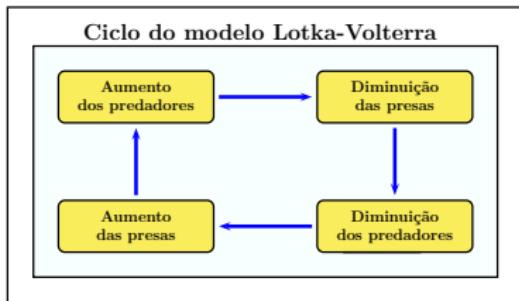
δ natalidade dos predadores



Modelos de crescimento

Lotka-Volterra (1925)

- Modelo presa $N(t)$ e predador $P(t)$



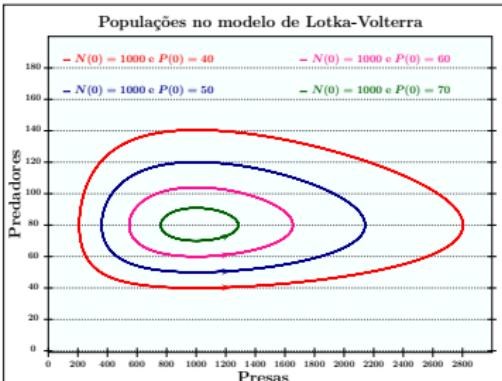
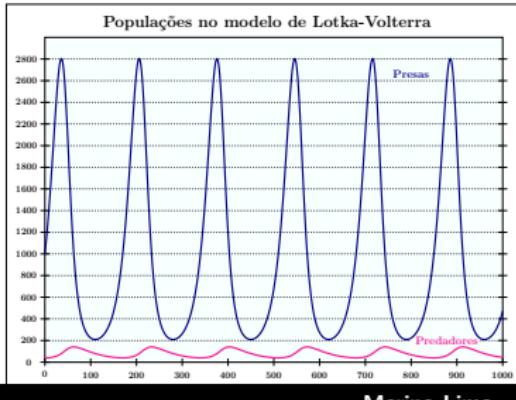
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)P(t), \quad N(0) = N_0$$
$$\frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t), \quad P(0) = P_0$$

α crescimento das presas

γ morte dos predadores pela falta de comida

β constante de mortalidade das presas

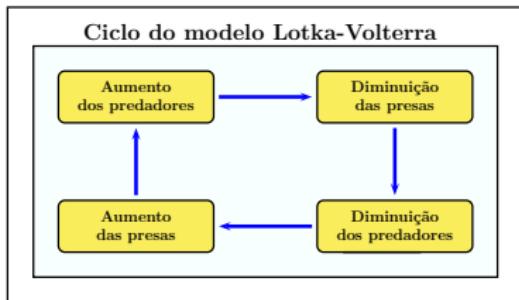
δ natalidade dos predadores



Modelos de crescimento

Lotka-Volterra (1925)

- Modelo presa $N(t)$ e predador $P(t)$



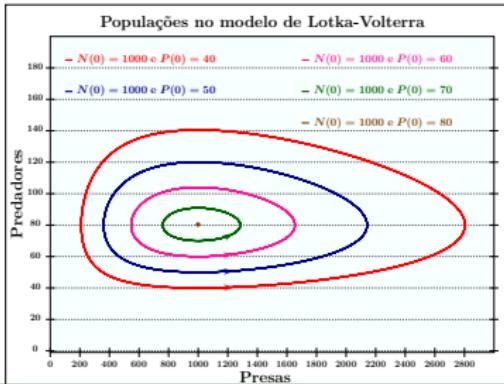
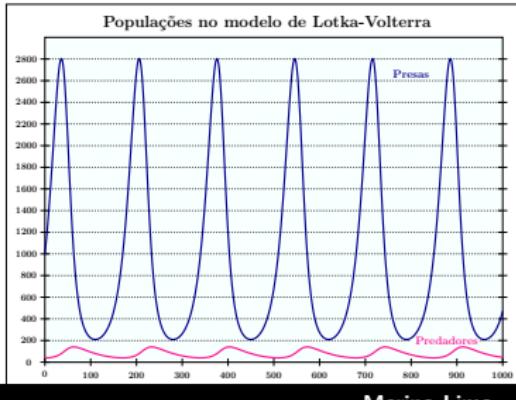
$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)P(t), \quad N(0) = N_0$$
$$\frac{dP}{dt} = \delta N(t)P(t) - \gamma P(t), \quad P(0) = P_0$$

α crescimento das presas

γ morte dos predadores pela falta de comida

β constante de mortalidade das presas

δ natalidade dos predadores



1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento

2 Modelagem Epidemiológica

3 COVID-19

4 Primeira Onda

5 Ondas Sucessivas

6 Variante Ômicron

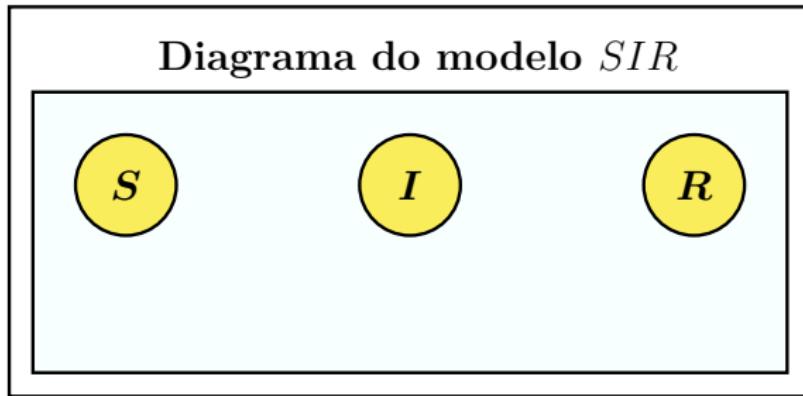
7 Conclusões e Perspectivas Futuras

Modelo *SIR*

- Kermack e McKendrick, 1927, 1932, 1933
- Divisão compartmental da população

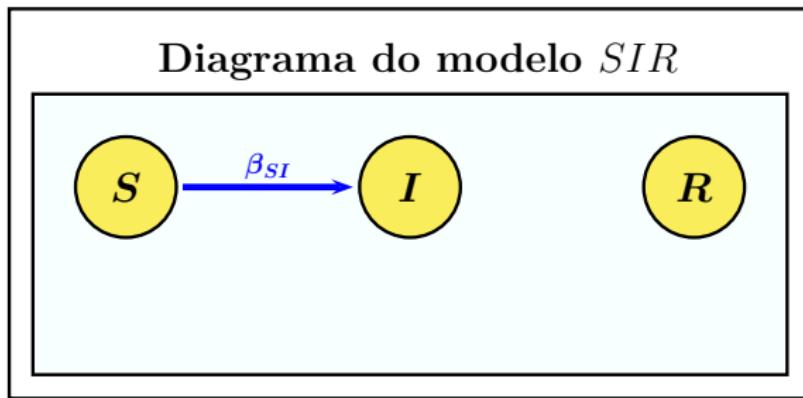
Modelo SIR

- Kermack e McKendrick, 1927, 1932, 1933
- Divisão compartmental da população
- *SIR*: Suscetível - Infectado - Resistente ou Removido



Modelo SIR

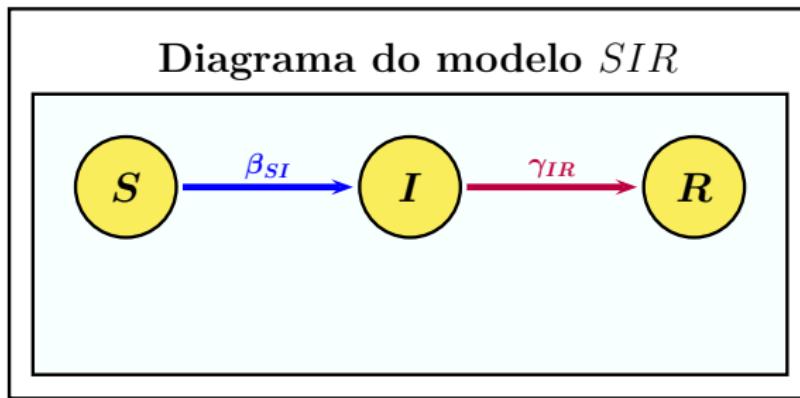
- Kermack e McKendrick, 1927, 1932, 1933
- Divisão compartmental da população
- *SIR*: Suscetível - Infectado - Resistente ou Removido



β_{SI} : taxa de transmissão

Modelo SIR

- Kermack e McKendrick, 1927, 1932, 1933
- Divisão compartmental da população
- *SIR*: Suscetível - Infectado - Resistente ou Removido

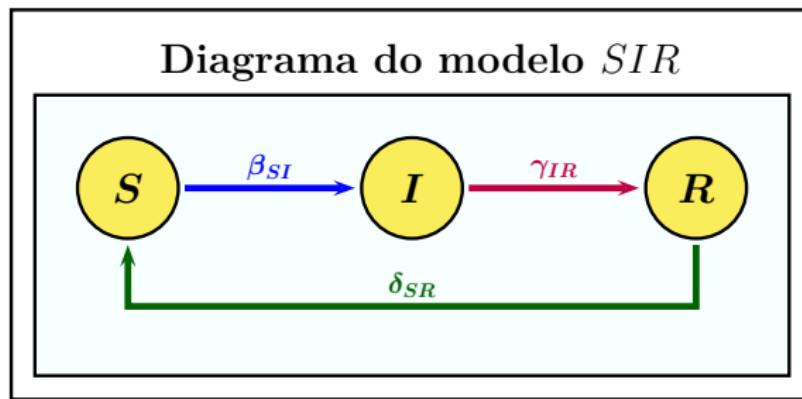


β_{SI} : taxa de transmissão

γ_{IR} : taxa de recuperação

Modelo SIR

- Kermack e McKendrick, 1927, 1932, 1933
- Divisão compartmental da população
- *SIR*: Suscetível - Infectado - Resistente ou Removido



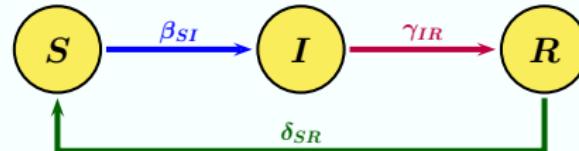
β_{SI} : taxa de transmissão

γ_{IR} : taxa de recuperação

δ_{SR} : taxa de perda de imunidade

Modelo SIR

Diagrama do modelo SIR



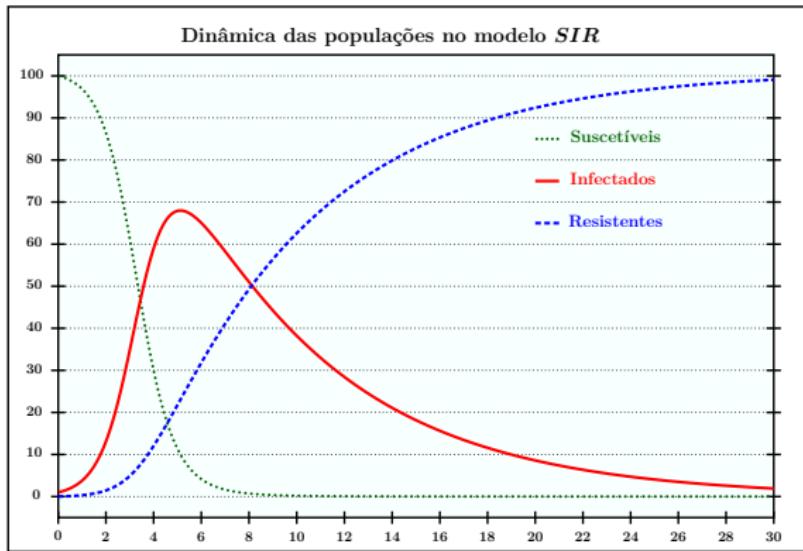
$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta_{SI} \cdot S(t) \cdot I(t) + \delta_{SR} \cdot R(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta_{SI} \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma_{IR} \cdot I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma_{IR} \cdot I(t) - \delta_{SR} \cdot R(t)$$

Meyer e Lima (2022) ZDM – Mathematics Education, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Modelo SIR

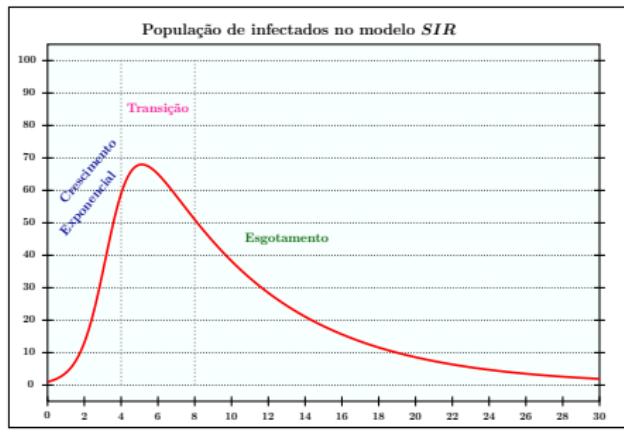


Meyer e Lima (2022) *ZDM – Mathematics Education*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Modelo SIR

- Equação dos infectados ($S_0 = 100$)

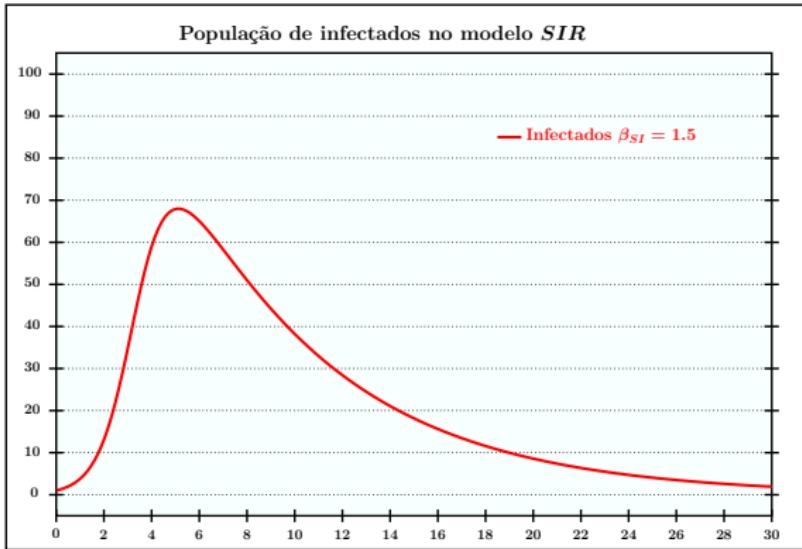
$$\frac{dI}{dt} = \beta_{SI} S_0 I(t) - \gamma_{IR} I(t) \implies I(t) = e^{(\beta_{SI} S_0 - \gamma_{IR})t}$$



- Comportamento exponencial no início $\frac{S(t)}{N(t)} > \frac{\gamma_{IR}}{\beta_{SI}}$
- Fase transitória
- Pico $S(t) = \frac{\gamma_{IR}}{\beta_{SI}} N(t)$ limitante da epidemia
- Infectados se tornam recuperados $\frac{S(t)}{N(t)} < \frac{\gamma_{IR}}{\beta_{SI}}$

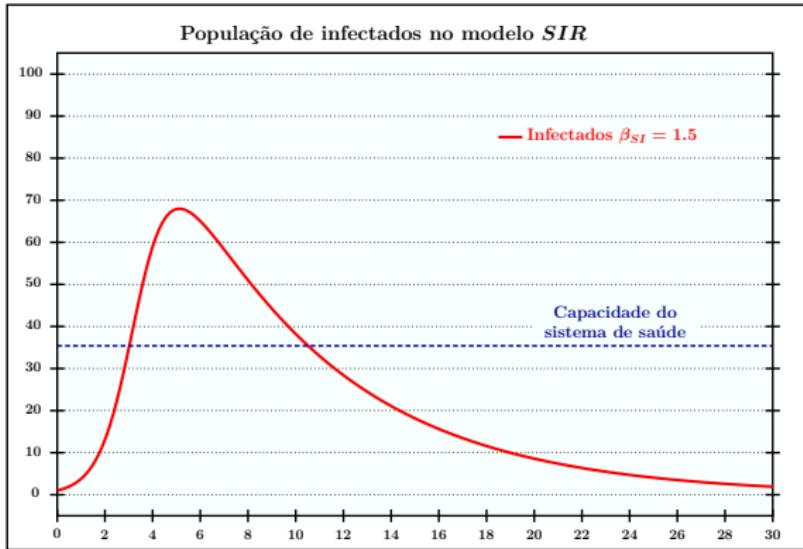
Modelo SIR

- Variação da taxa de transmissão β_{SI}



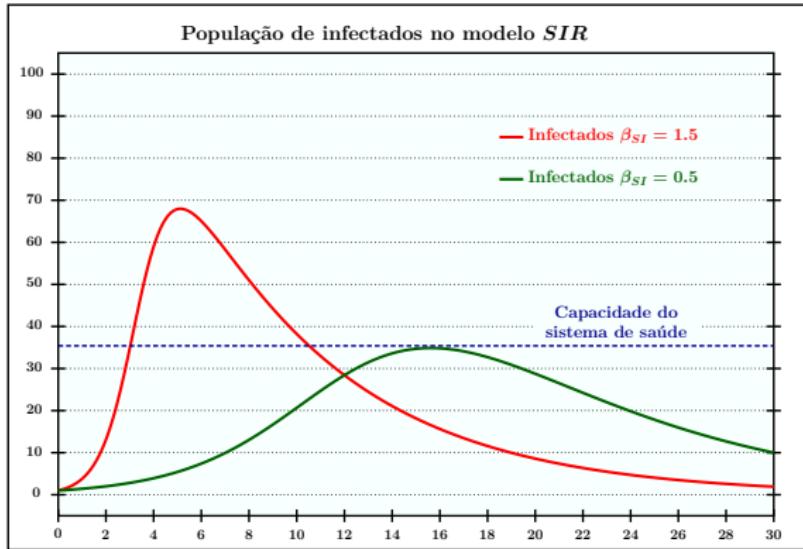
Modelo SIR

- Variação da taxa de transmissão β_{SI}



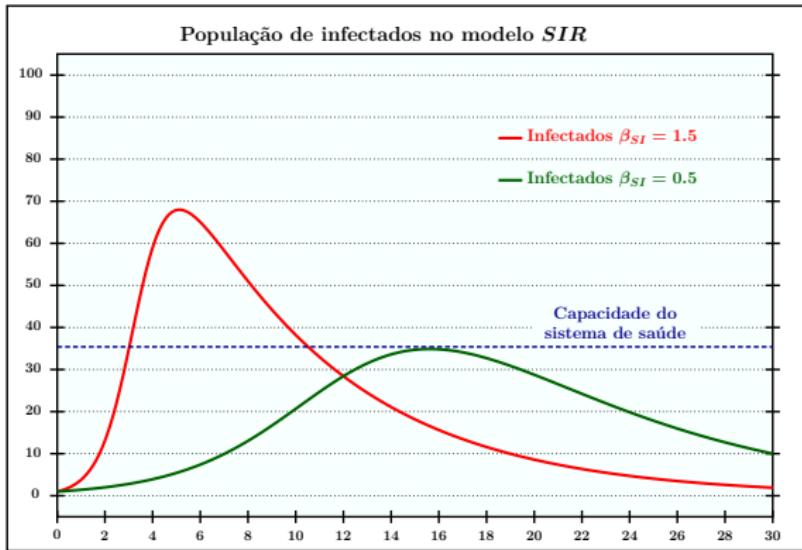
Modelo SIR

- Variação da taxa de transmissão β_{SI}



Modelo SIR

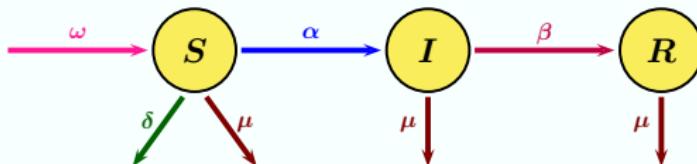
- Variação da taxa de transmissão β_{SI}



“Achatamento da curva” de infecção

Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*

Diagrama do modelo *SIR* modificado



α : taxa de transmissão

β : taxa de recuperação

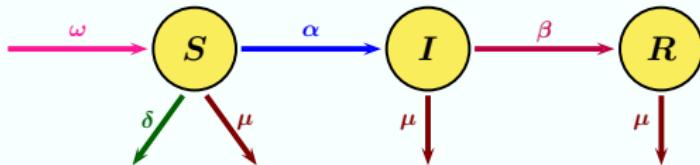
ω : taxa de natalidade

μ : taxa de mortalidade

δ : taxa de vacinação

Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*

Diagrama do modelo *SIR* modificado

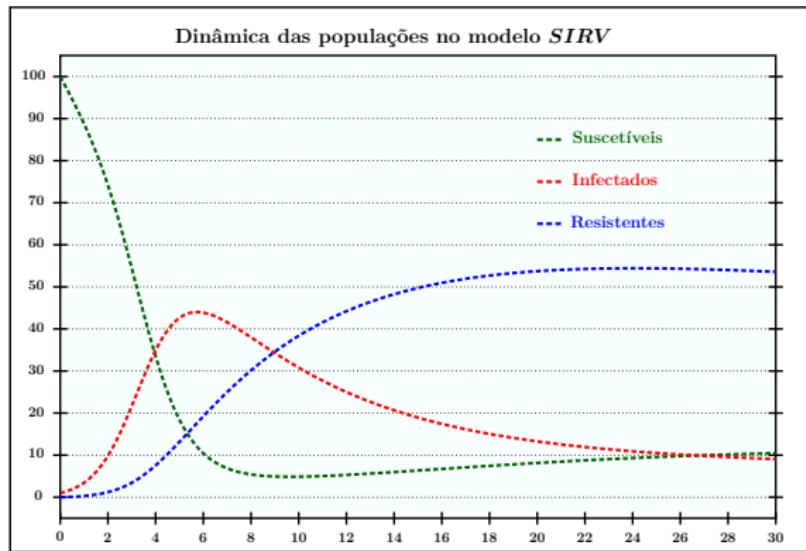


$$\frac{dS}{dt} = -\alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} + \omega N(t) - \mu S(t) - \delta S(t)$$

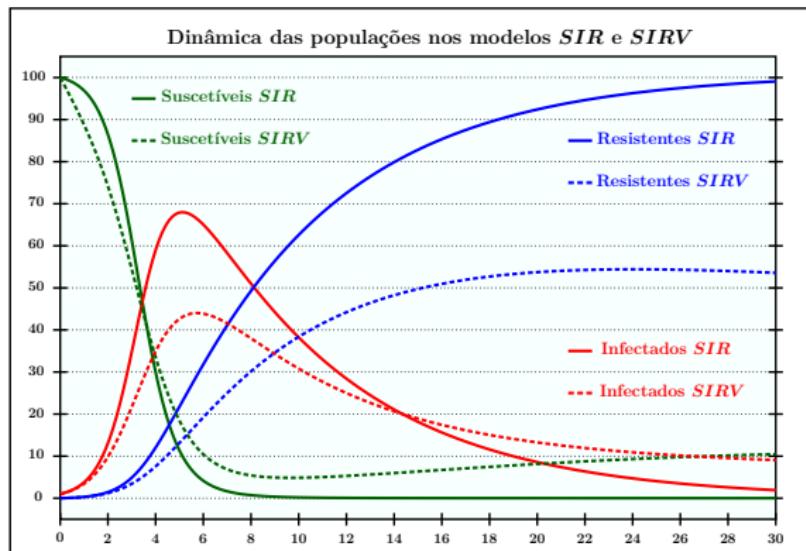
$$\frac{dI}{dt} = \alpha \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I(t) - \mu I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t) - \mu R(t)$$

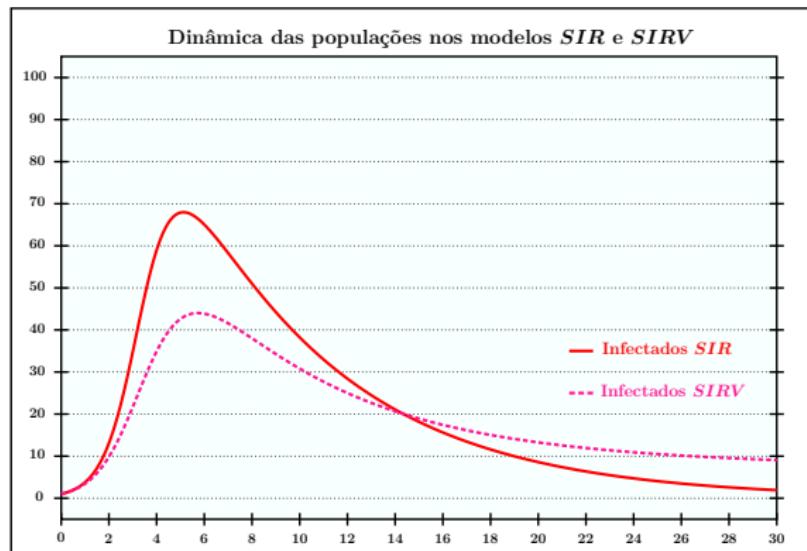
Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*



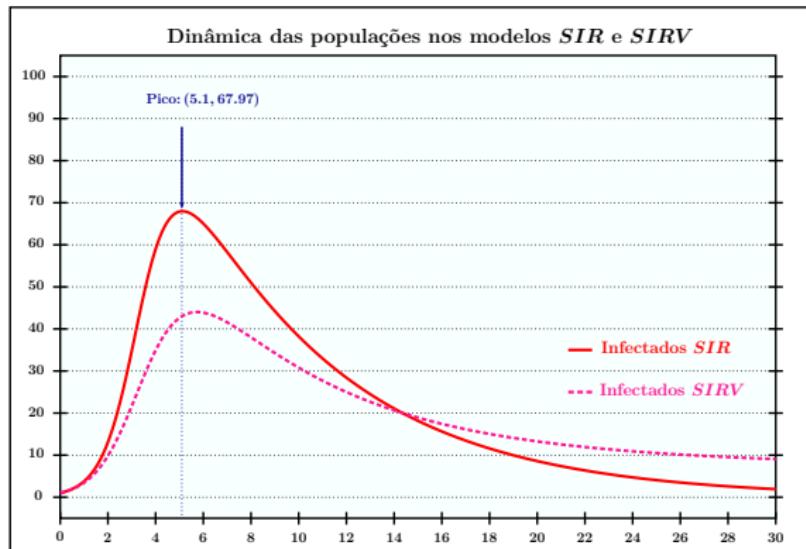
Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*



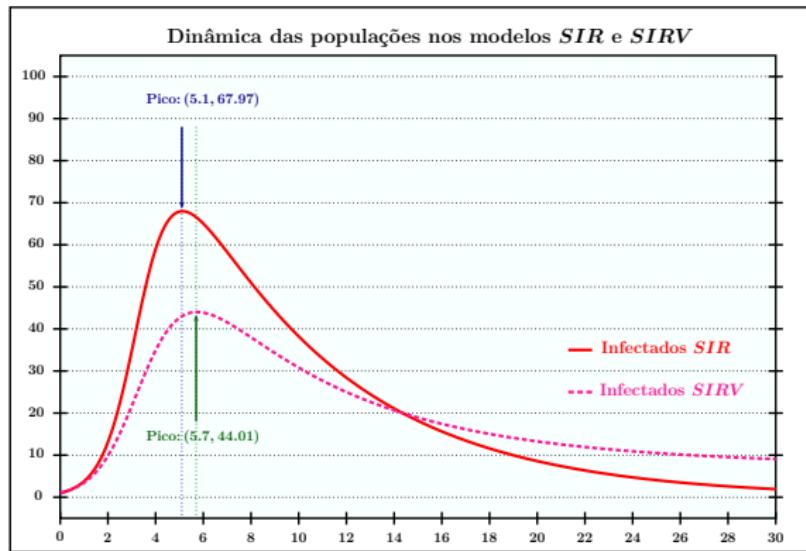
Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*



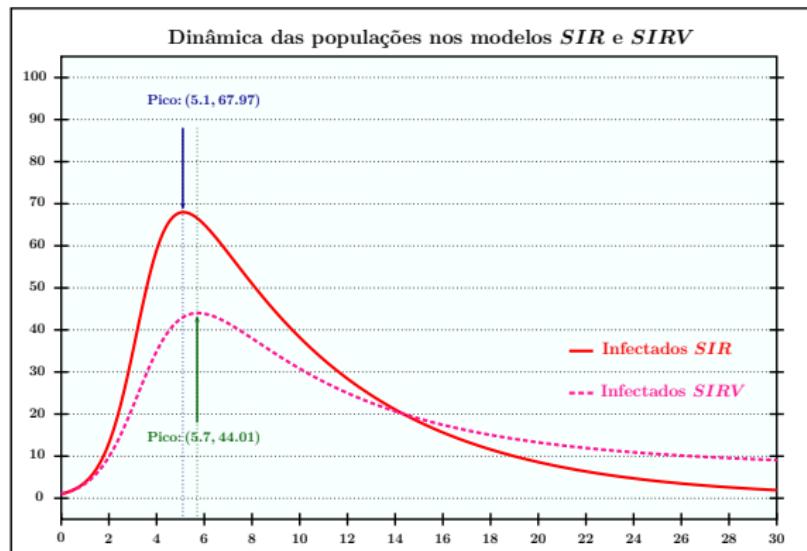
Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*



Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*

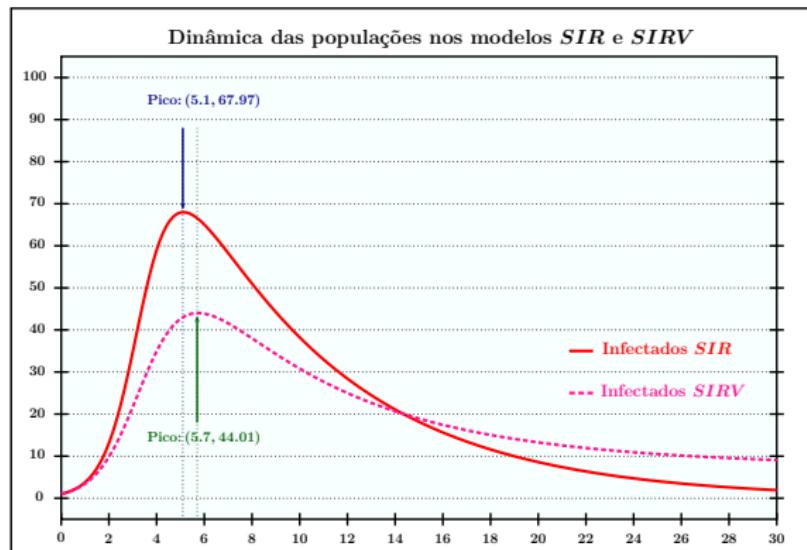


Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*



Redução de 0.6 dia na ocorrência do pico

Modelo com dinâmica vital e vacinação - *SIRV*



Redução de 0.6 dia na ocorrência do pico

Redução de 35.3% dos casos no pico

1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento

2 Modelagem Epidemiológica

3 COVID-19

4 Primeira Onda

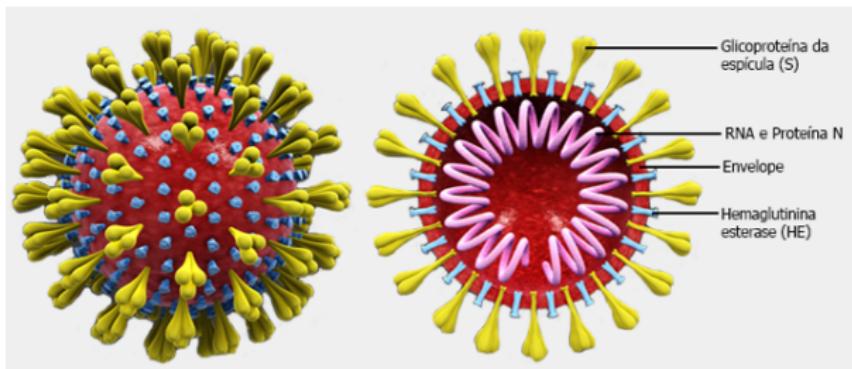
5 Ondas Sucessivas

6 Variante Ômicron

7 Conclusões e Perspectivas Futuras

COVID-19

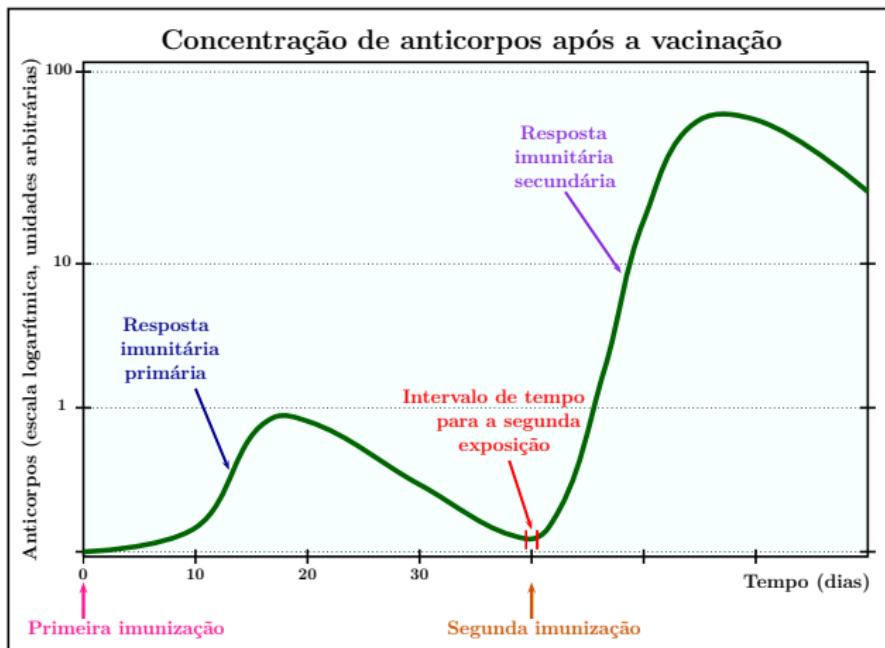
- Doença infecciosa respiratória - dezembro de 2019 - China
- Alimentação de animais silvestres? Morcego, pangolim...
- Coronavírus: SARS-CoV-2



- Infecção através das vias respiratórias
- Testes para detectar o vírus
- Tempo de incubação e assintomáticos
- Desenvolvimento de vacinas

COVID-19

Concentração de anticorpos específicos no corpo de uma pessoa após a vacinação e em uma segunda exposição ao mesmo antígeno



COVID-19 no Mundo

Coronavirus Cases:

699,739,720

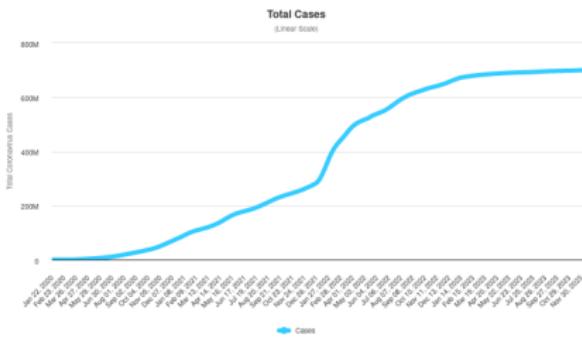
[view by country](#)

Deaths:

6,957,602

Recovered:

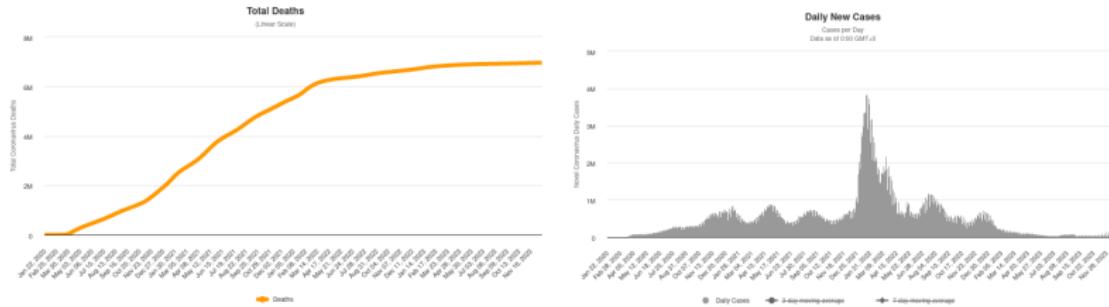
669,473,354



<https://www.worldometers.info/coronavirus/worldwide-graphs/>

Dados de 18 de dezembro de 2023

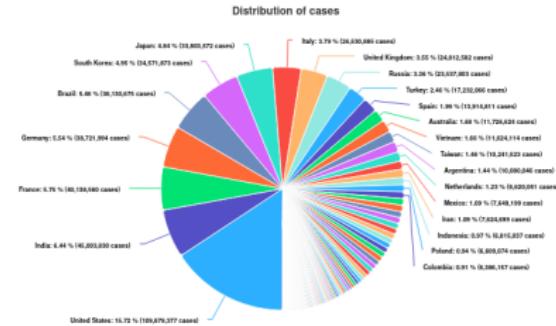
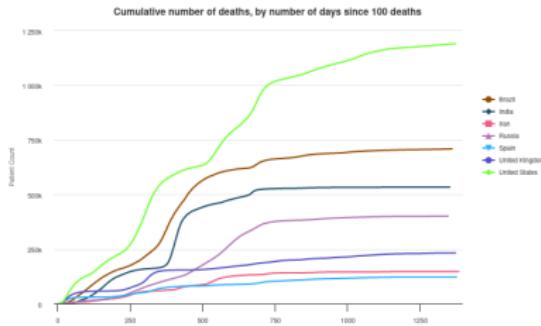
COVID-19 no Mundo



<https://www.worldometers.info/coronavirus/worldwide-graphs/>

Dados de 18 de dezembro de 2023

COVID-19 no Mundo



- População do Brasil: aproximadamente 217 milhões
2,7% da população mundial
- COVID-19: 5,46% dos casos e 10,2% das mortes

<https://www.worldometers.info/coronavirus/worldwide-graphs/>
<https://www.worldometers.info/population/>

Dados de 18 de dezembro de 2023

COVID-19 no Brasil

- Primeiro caso: 26 de fevereiro de 2020



Brazil

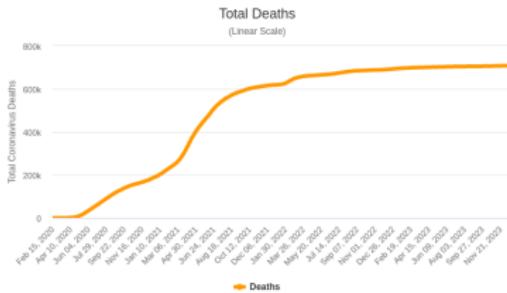
Coronavirus Cases:

38,130,675



Deaths:

708,237



Recovered:

36,249,161

<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/brazil/>

Dados de 18 de dezembro de 2023

COVID-19

Cronologia da COVID-19 neste trabalho



COVID-19

Cronologia da COVID-19 neste trabalho



COVID-19

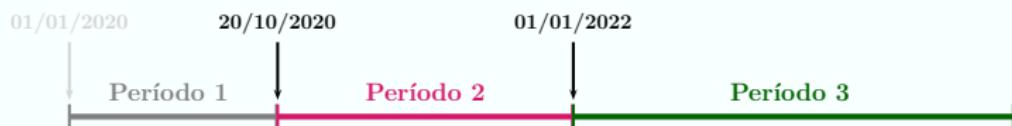
Cronologia da COVID-19 neste trabalho



- Início COVID-19
- 11/03 - Pandemia
- 26/02 - Brasil
- Isolamento social
- Uso de máscaras
- Primeira onda

COVID-19

Cronologia da COVID-19 neste trabalho



- Início COVID-19
- 11/03 - Pandemia
- 26/02 - Brasil
- Isolamento social
- Uso de máscaras
- Primeira onda

COVID-19

Cronologia da COVID-19 neste trabalho



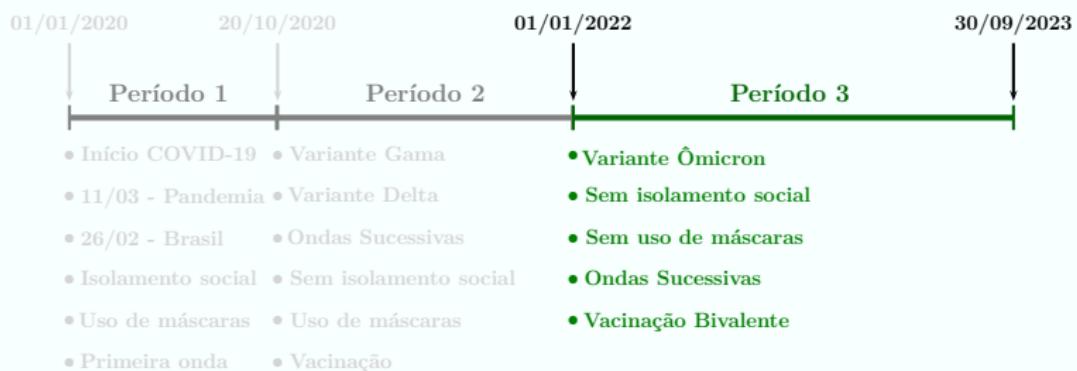
COVID-19

Cronologia da COVID-19 neste trabalho



COVID-19

Cronologia da COVID-19 neste trabalho



COVID-19

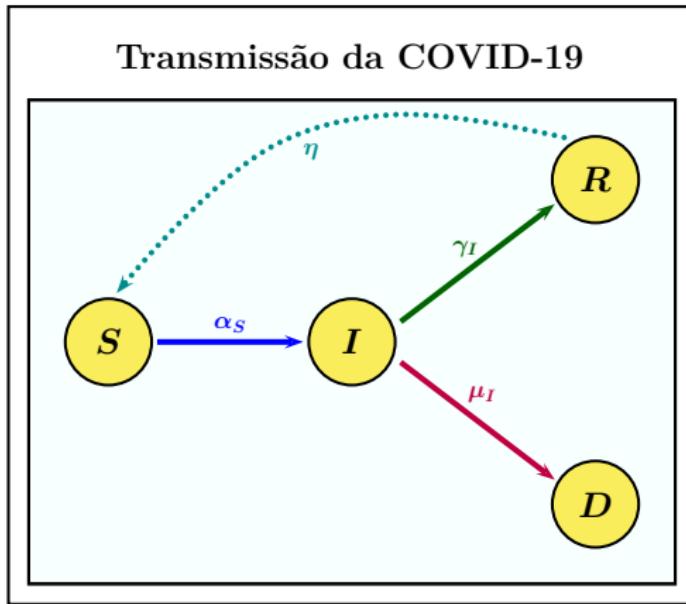
Cronologia da COVID-19 neste trabalho



- 1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento
- 2 Modelagem Epidemiológica
- 3 COVID-19
- 4 Primeira Onda
- 5 Ondas Sucessivas
- 6 Variante Ômicron
- 7 Conclusões e Perspectivas Futuras

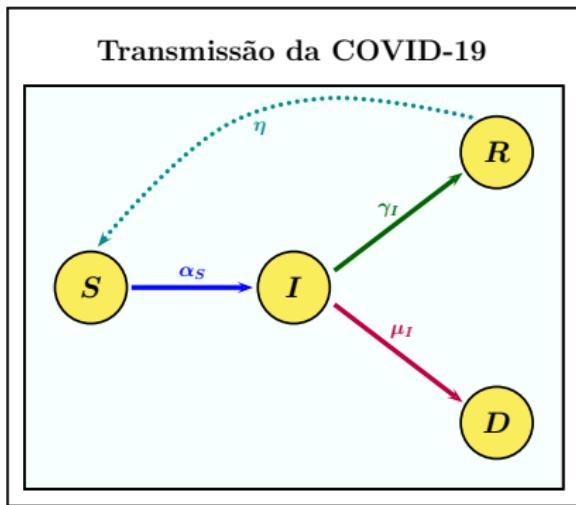
Modelo SIRD

- Compartimentos $S = S(t)$ (Suscetíveis), $I = I(t)$ (Infectados), $R = R(t)$ (Recuperados - com imunidade temporária) e $D = D(t)$ (Mortos)



Modelo SIRD

- População constante: $S(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N$



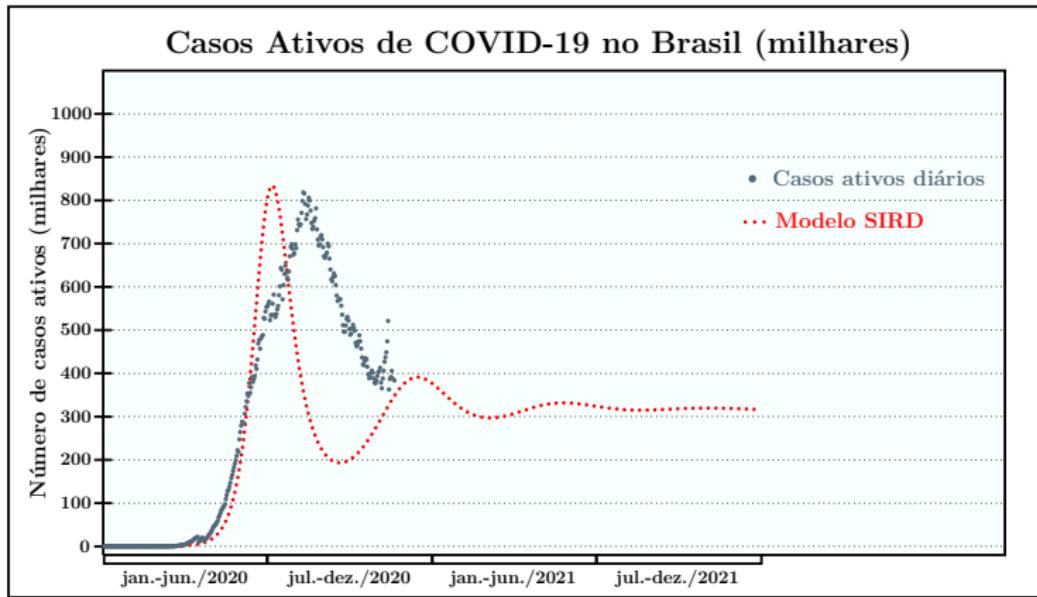
$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha_S S(t)I(t) + \eta R(t);$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha_S S(t)I(t) - \gamma_I I(t) - \mu_I I(t);$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma_I I(t) - \eta R(t);$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t).$$

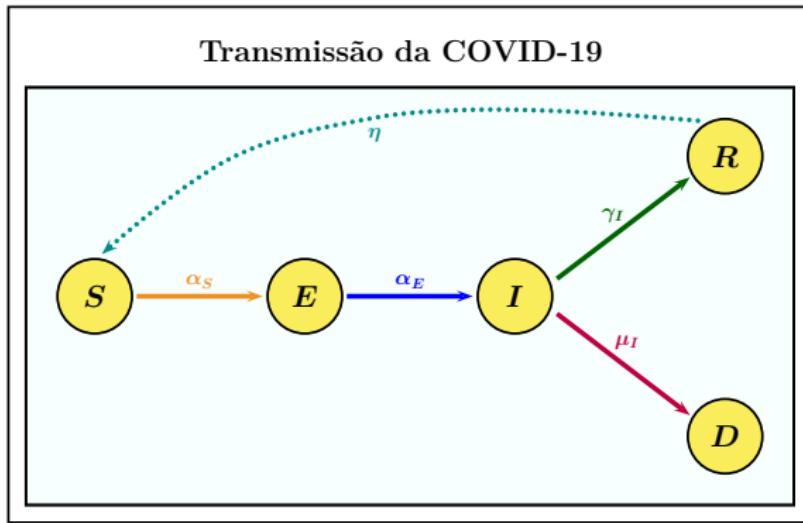
Modelo SIRD



Meyer e Lima, et al. (2021) *Trends Comput. Appl. Math.*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

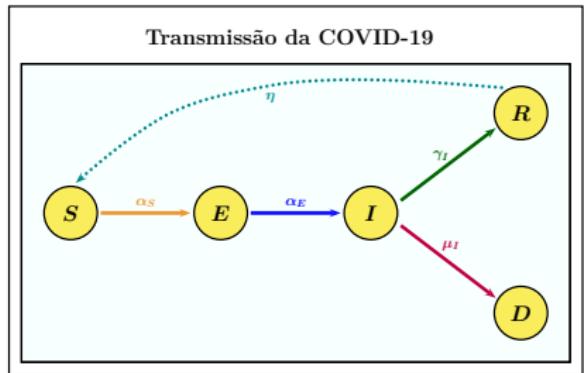
Modelo SEIRD

- Inclusão do compartimento $E = E(t)$ (Expostos - indivíduos que contraíram o vírus, mas não infectam outros, nem manifestam sintomas)



Modelo SEIRD

- População constante: $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N$



$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha_S S(t)I(t) + \eta R(t);$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \alpha_S S(t)I(t) - \alpha_E E(t);$$

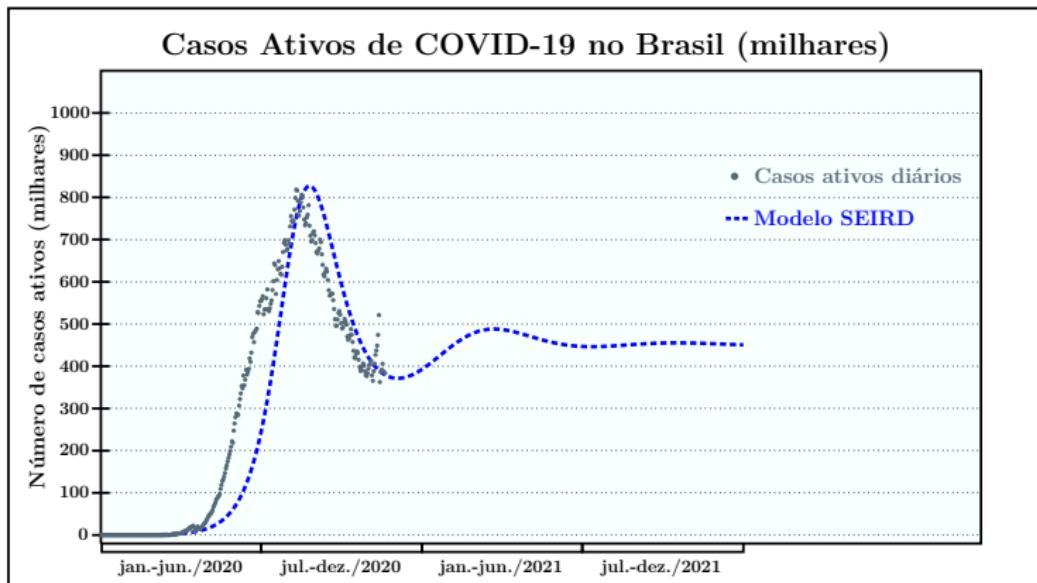
$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha_E E(t) - \gamma_I I(t) - \mu_I I(t);$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma_I I(t) - \eta R(t);$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t).$$

Meyer e Lima, et al. (2021) *Trends Comput. Appl. Math.*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Modelo SEIRD

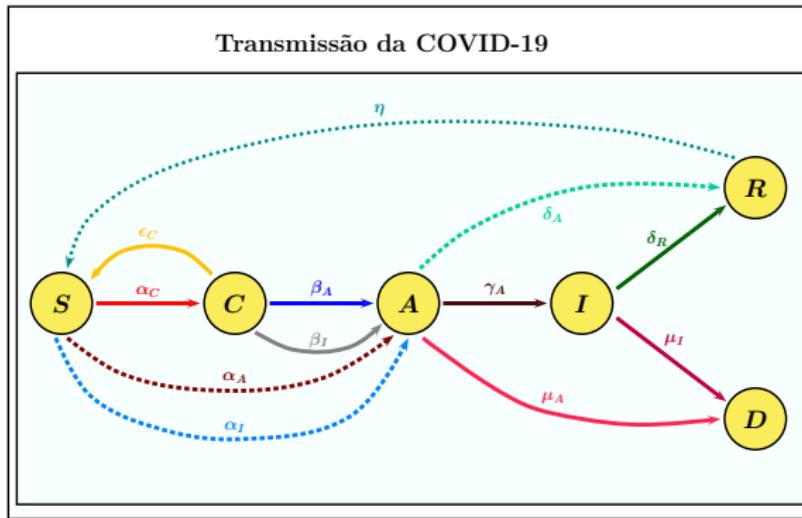


Meyer e Lima, et al. (2021) *Trends Comput. Appl. Math.*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Modelo SCAIRD

- Inclusão dos confinados
- Modelo com retardamento (5.2 dias)
- População constante:

$$S(t) + C(t) + A(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N$$



Modelo SCAIRD

$$\frac{dS(t)}{dt} = \eta R(t) - \alpha_A S(t)A(t - \tau) - \alpha_I S(t)I(t) - \alpha_C S(t) + \epsilon_C C(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha_C S(t) - \beta_A C(t)A(t - \tau) - \beta_I C(t)I(t) - \epsilon_C C(t)$$

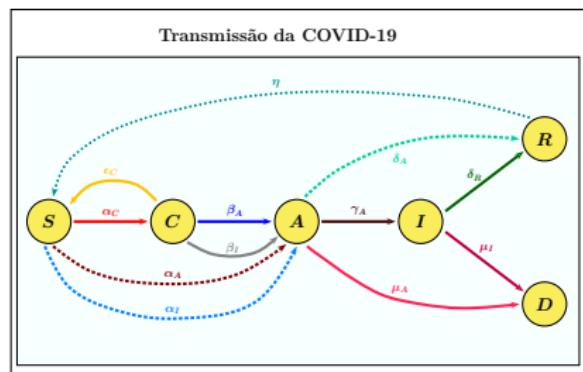
$$\frac{dA(t)}{dt} = \alpha_A S(t)A(t - \tau) + \alpha_I S(t)I(t) + \beta_A C(t)A(t - \tau)$$

$$+ \beta_I C(t)I(t) - \gamma_A A(t) - \delta_A A(t) - \mu_A A(t)$$

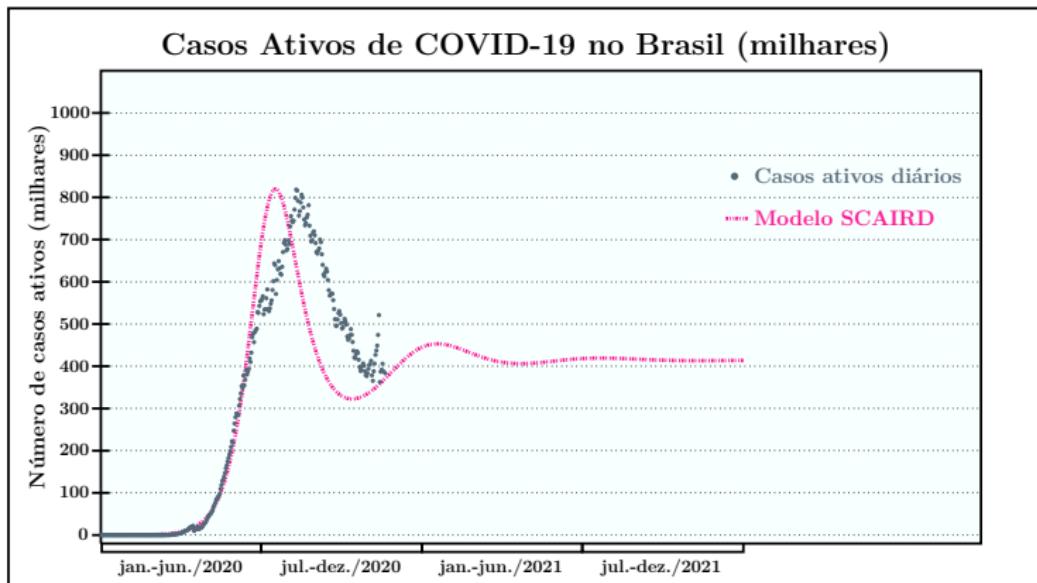
$$\frac{dI(t)}{dt} = \gamma_A A(t) - \delta_R I(t) - \mu_I I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \delta_A A(t) + \delta_R I(t) - \eta R(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t) + \mu_A A(t)$$



Modelo SCAIRD

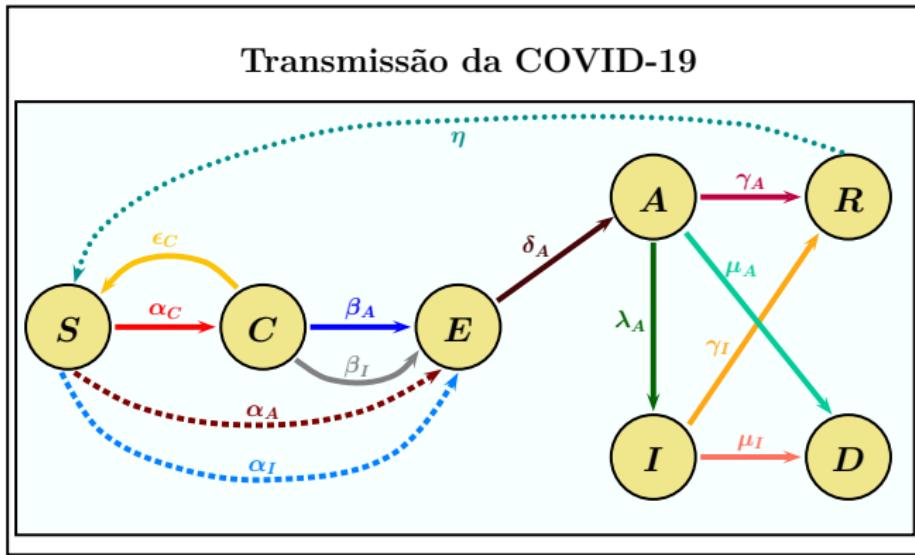


Meyer e Lima, et al. (2021) *Trends Comput. Appl. Math.*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Modelo SCEAIRD

- População

constante: $S(t) + C(t) + E(t) + A(t) + I(t) + R(t) + D(t) = N$



Modelo SCEAIRD

$$\frac{dS(t)}{dt} = \epsilon_C C(t) - \alpha_C S(t) - \alpha_A S(t)A(t) - \alpha_I S(t)I(t) + \eta R(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha_C S(t) - \epsilon_C C(t) - \beta_A C(t)A(t) - \beta_I C(t)I(t)$$

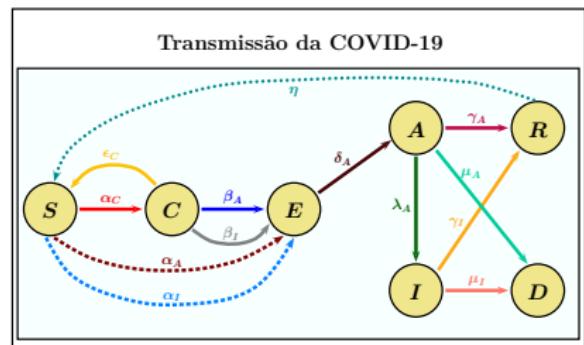
$$\frac{dE(t)}{dt} = \alpha_A S(t)A(t) + \alpha_I S(t)I(t) + \beta_A C(t)A(t) + \beta_I C(t)I(t) - \delta_A E(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \delta_A E(t) - \gamma_A A(t) - \lambda_A A(t) - \mu_A A(t)$$

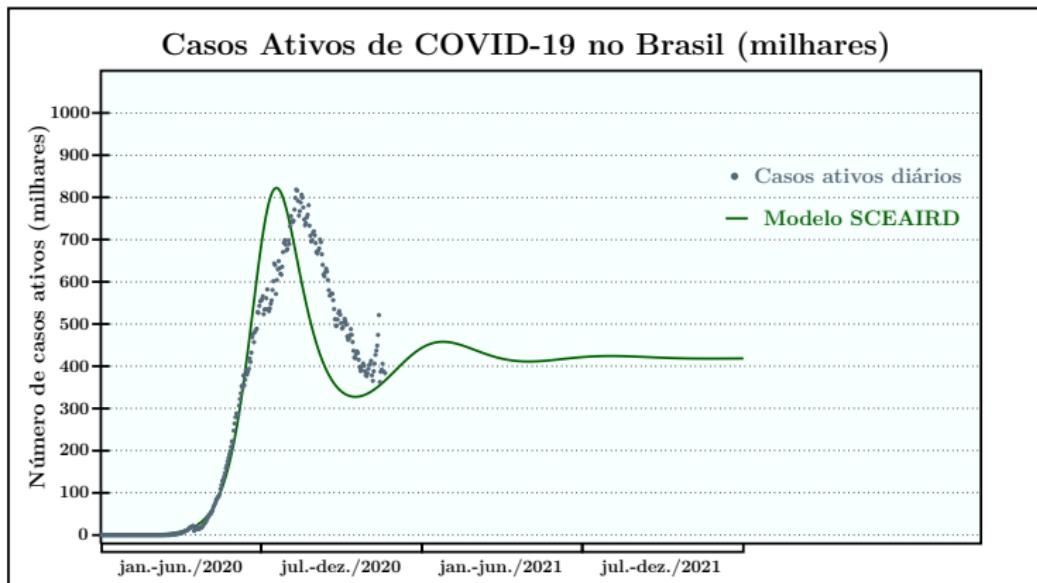
$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda_A A(t) - \gamma_I I(t) - \mu_I I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma_A A(t) + \gamma_I I(t) - \eta R(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_I I(t) + \mu_A A(t).$$

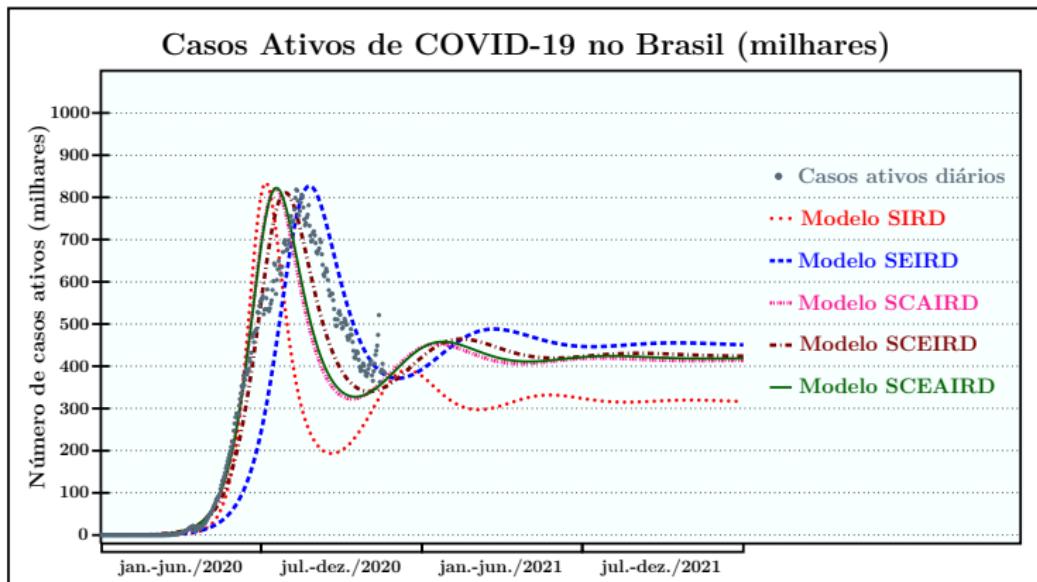


Modelo SCEAIRD



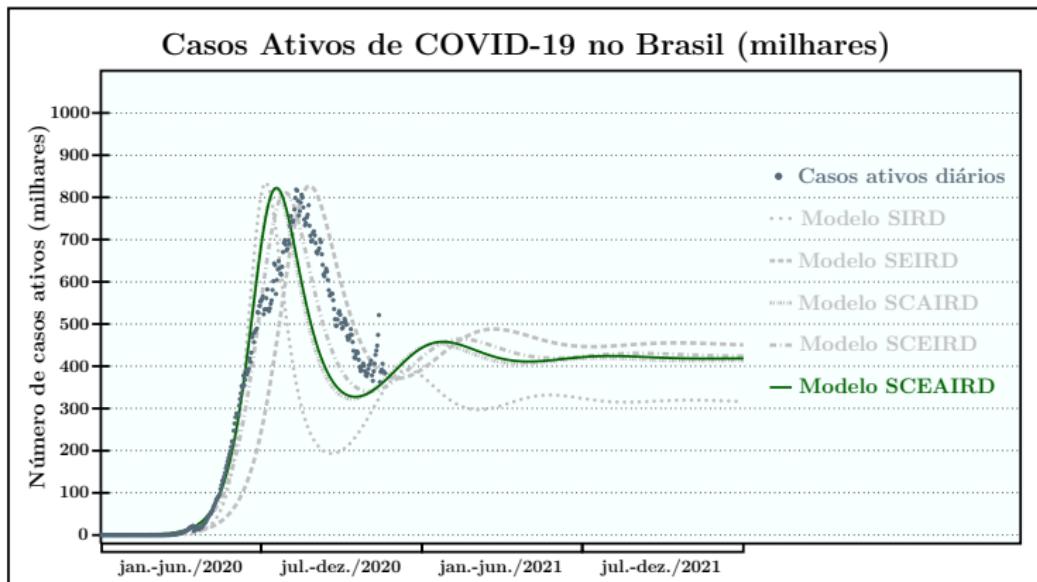
Meyer e Lima, et al. (2021) *Trends Comput. Appl. Math.*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Comparativo



Meyer e Lima, et al. (2021) *Trends Comput. Appl. Math.*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Comparativo



Meyer e Lima, et al. (2021) *Trends Comput. Appl. Math.*, doi:10.1007/s11858-022-01447-2

Fim da primeira onda

Fim da primeira onda

- COVID-19 controlada: flexibilização do comércio, eleições municipais, relaxamento do uso de máscara e medidas de proteção, negacionismo...

Fim da primeira onda

- COVID-19 controlada: flexibilização do comércio, eleições municipais, relaxamento do uso de máscara e medidas de proteção, negacionismo...

Covid-19: Manaus vive colapso com hospitais sem oxigênio, doentes levados a outros estados, cemitérios sem vagas e toque de recolher

A média móvel de mortes no estado cresceu 183% nos últimos sete dias. O envio de oxigênio ao estado não está sendo suficiente para suprir a demanda, e o governo está transferindo pacientes a outros estados.

14/01/2021 16h12 - Atualizado há 11 meses



Fim da primeira onda

- COVID-19 controlada: flexibilização do comércio, eleições municipais, relaxamento do uso de máscara e medidas de proteção, negacionismo...

Covid-19: Manaus vive colapso com hospitais sem oxigênio, doentes levados a outros estados, cemitérios sem vagas e toque de recolher

A média móvel de mortes no estado cresceu 183% nos últimos sete dias. O envio de oxigênio ao estado não está sendo suficiente para suprir a demanda, e o governo está transferindo pacientes a outros estados.

14/01/2021 16h12 - Atualizado há 11 meses



Covid avança e indica colapso generalizado pelo Brasil

Especialistas veem cenário de colapso se aproximar e pregam medidas restritivas em âmbito nacional para frear alta de casos e de mortes por covid

Por Leila Souza Lima e Ana Conceição — De São Paulo

04/03/2021 03h00 - Atualizado há 9 meses



Fim da primeira onda

- COVID-19 controlada: flexibilização do comércio, eleições municipais, relaxamento do uso de máscara e medidas de proteção, negacionismo...

Covid-19: Manaus vive colapso com hospitais sem oxigênio, doentes levados a outros estados, cemitérios sem vagas e toque de recolher

A média móvel de mortes no estado cresceu 183% nos últimos sete dias. O envio de oxigênio ao estado não está sendo suficiente para suprir a demanda, e o governo está transferindo pacientes a outros estados.

14/01/2021 16h12 - Atualizado há 11 meses



Covid avança e indica colapso generalizado pelo Brasil

Especialistas veem cenário de colapso se aproximar e pregam medidas restritivas em âmbito nacional para frear alta de casos e de mortes por covid

Por Leila Souza Lima e Ana Conceição — De São Paulo

04/03/2021 03h00 - Atualizado há 9 meses



Covid-19: Brasil bate recorde com 4.249 mortes registradas em 24 horas

Número de pessoas recuperadas subiu para 11.732.193



Publicado em 18/04/2021 - 19h21 Por Jússica Vilela - Repórter da Agência Brasil - Brasília

Fim da primeira onda

- COVID-19 controlada: flexibilização do comércio, eleições municipais, relaxamento do uso de máscara e medidas de proteção, negacionismo...

Covid-19: Manaus vive colapso com hospitais sem oxigênio, doentes levados a outros estados, cemitérios sem vagas e toque de recolher

A média móvel de mortes no estado cresceu 183% nos últimos sete dias. O envio de oxigênio ao estado não está sendo suficiente para suprir a demanda, e o governo está transferindo pacientes a outros estados.

14/01/2021 16h12 - Atualizado há 11 meses



Covid avança e indica colapso generalizado pelo Brasil

Especialistas veem cenário de colapso se aproximar e pregam medidas restritivas em âmbito nacional para frear alta de casos e de mortes por covid

Por Leila Souza Lima e Ana Conceição — De São Paulo

04/03/2021 03h00 - Atualizado há 9 meses



Covid-19: Brasil bate recorde com 4.249 mortes registradas em 24 horas

Número de pessoas recuperadas subiu para 11.732.193



Publicado em 18/04/2021 - 19h21 Por Júlio Valete - Repórter da Agência Brasil - Brasília



Linhagem P1 (Gamma) surgiu no início de novembro de 2020, em Manaus

Variante Gama é mais agressiva, mas pode ser contida com vacina e lockdown

Maria Fernanda Ziegler
Da Agência FAPESP
06/08/2021 12h45

Fim da primeira onda

- COVID-19 controlada: flexibilização do comércio, eleições municipais, relaxamento do uso de máscara e medidas de proteção, negacionismo...

Covid-19: Manaus vive colapso com hospitais sem oxigênio, doentes levados a outros estados, cemitérios sem vagas e toque de recolher

A média móvel de mortes no estado cresceu 183% nos últimos sete dias. O envio de oxigênio ao estado não está sendo suficiente para suprir a demanda, e o governo está transferindo pacientes para outros estados.

14/01/2021 16h12 - Atualizado há 11 meses



Covid avança e indica colapso generalizado pelo Brasil

Especialistas veem cenário de colapso se aproximar e pregam medidas restritivas em âmbito nacional para frear alta de casos e de mortes por covid

Por Leila Souza Lima e Ana Conceição — De São Paulo

04/03/2021 03h00 - Atualizado há 9 meses



Brasil deixou de comprar 27 milhões de doses até março por atraso em negociações

O governo federal demorou a assinar contratos com a Pfizer e o Instituto Butantan

Covid-19: Brasil bate recorde com 4.249 mortes registradas em 24 horas

Número de pessoas recuperadas subiu para 11.732.193



Publicado em 18/04/2021 - 19h21 Por Júlio Valete - Repórter da Agência Brasil - Brasília

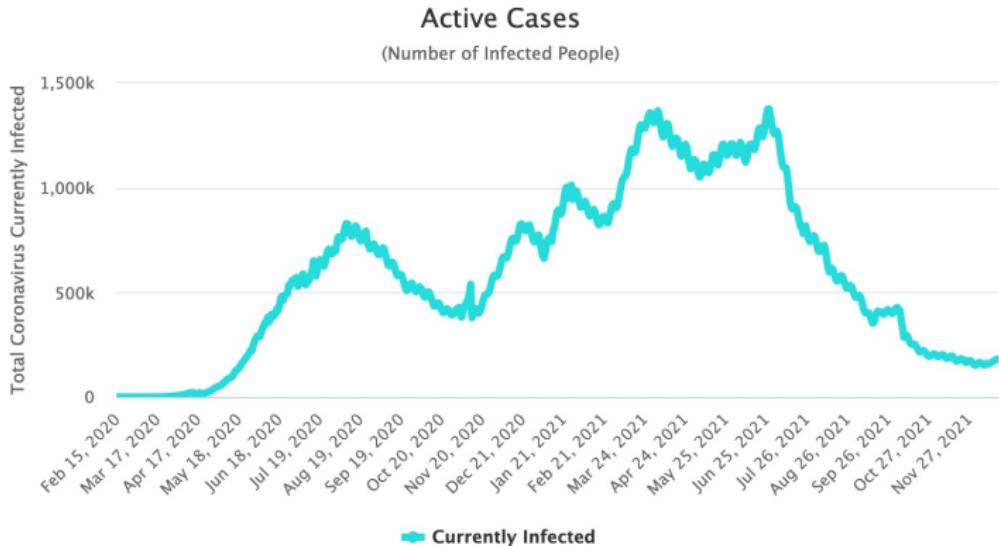


Linhagem P1 (Gama) surgiu no início de novembro de 2020, em Manaus

Variante Gama é mais agressiva, mas pode ser contida com vacina e lockdown

Maria Fernanda Ziegler
Da Agência FAPESP
06/08/2021 12h45

Mais ondas...



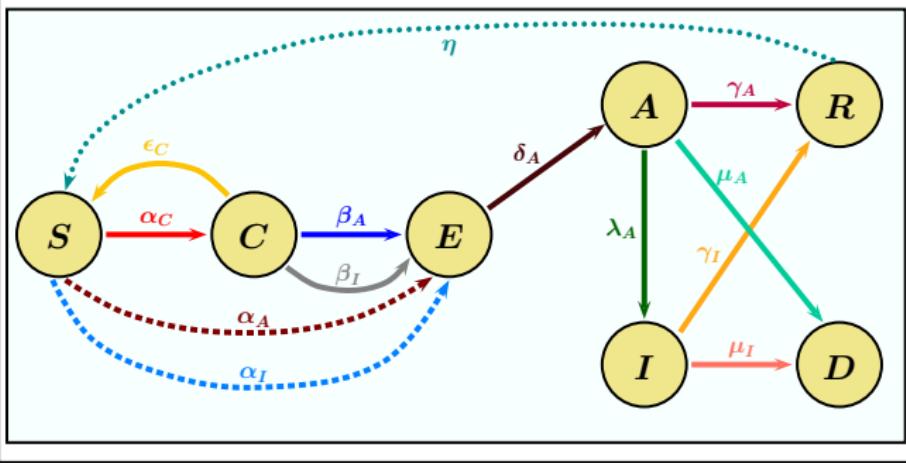
<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/brazil/>

Dados de 20 de dezembro de 2021

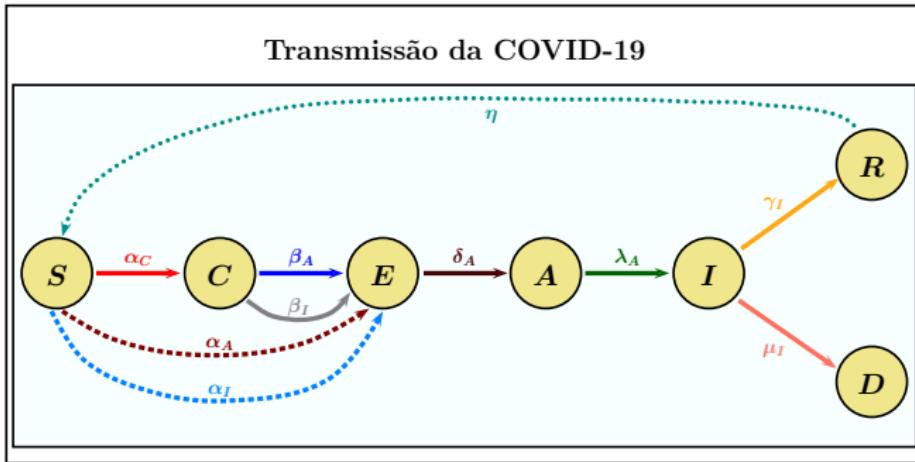
- 1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento
- 2 Modelagem Epidemiológica
- 3 COVID-19
- 4 Primeira Onda
- 5 Ondas Sucessivas
- 6 Variante Ômicron
- 7 Conclusões e Perspectivas Futuras

Modelo SCEAIRD

Transmissão da COVID-19

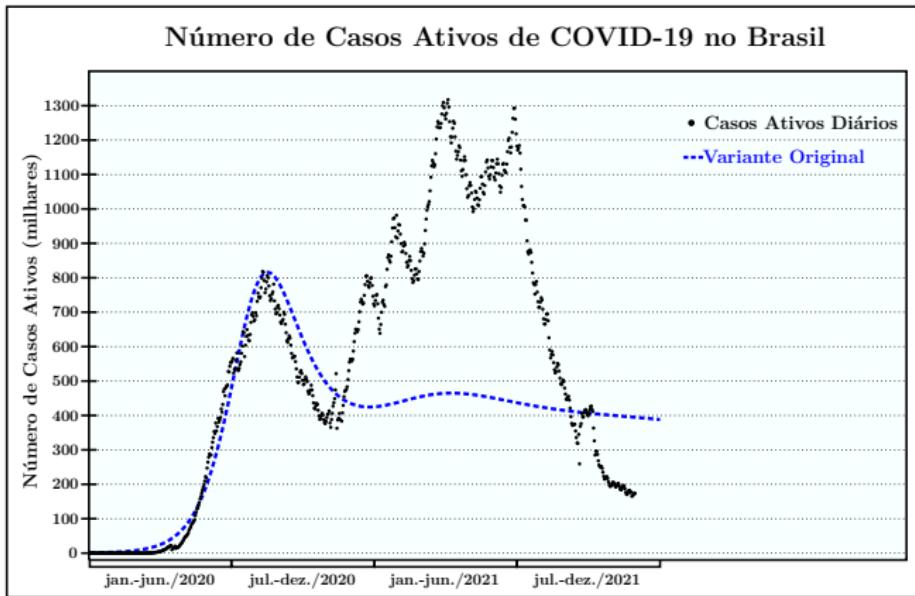


Modelo SCEAIRD simplificado



Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

Modelo SCEAIRD simplificado



Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

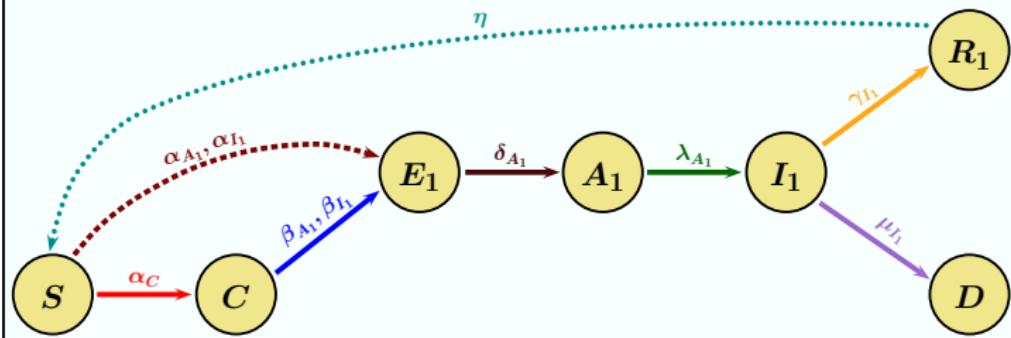
Variante Gama

- Linhagem P.1
- Origem: Brasil
- Surgiu no início de novembro de 2020, em Manaus
- Mutações na proteína *spike* e em outras proteínas associadas à evasão da resposta imune
- Maior capacidade de transmissão e reinfecção
- Pode ser contida com vacina e *lockdown*
- Capacidade de neutralizar e escapar da atividade dos anticorpos circulantes

Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

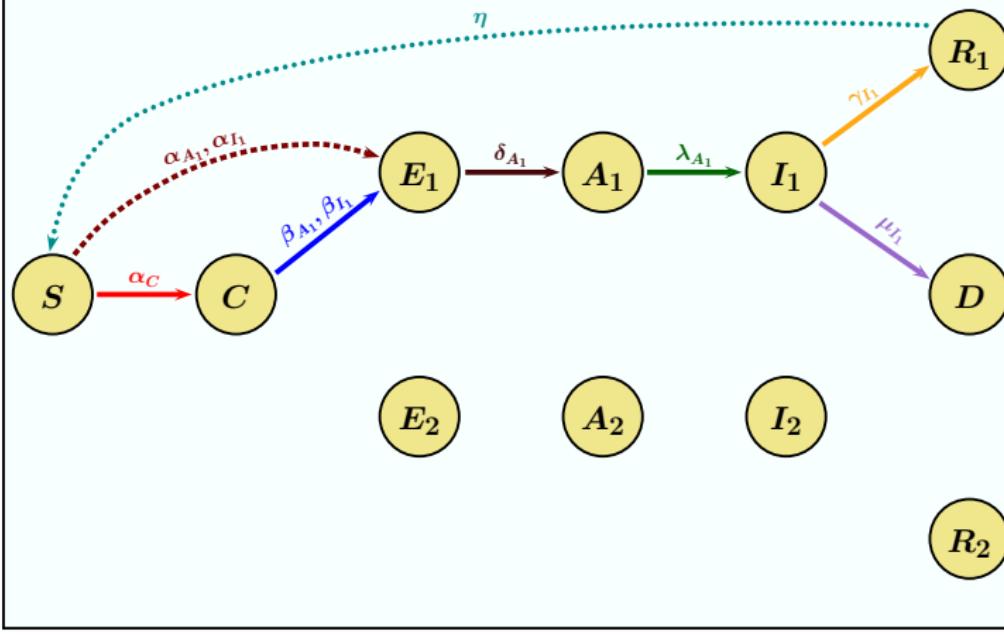
Variante Gama

Transmissão da COVID-19



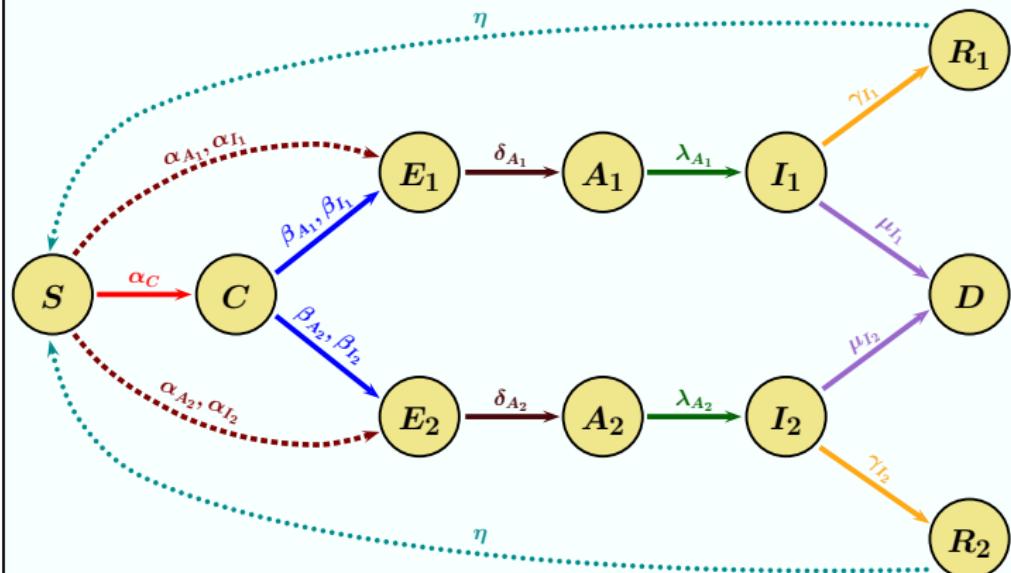
Variante Gama

Transmissão da COVID-19



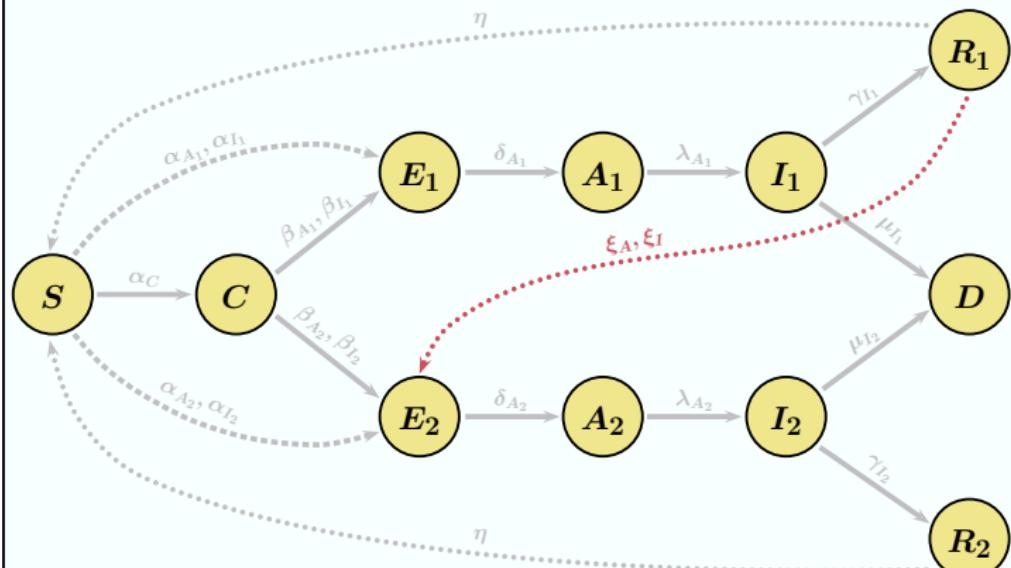
Variante Gama

Transmissão da COVID-19



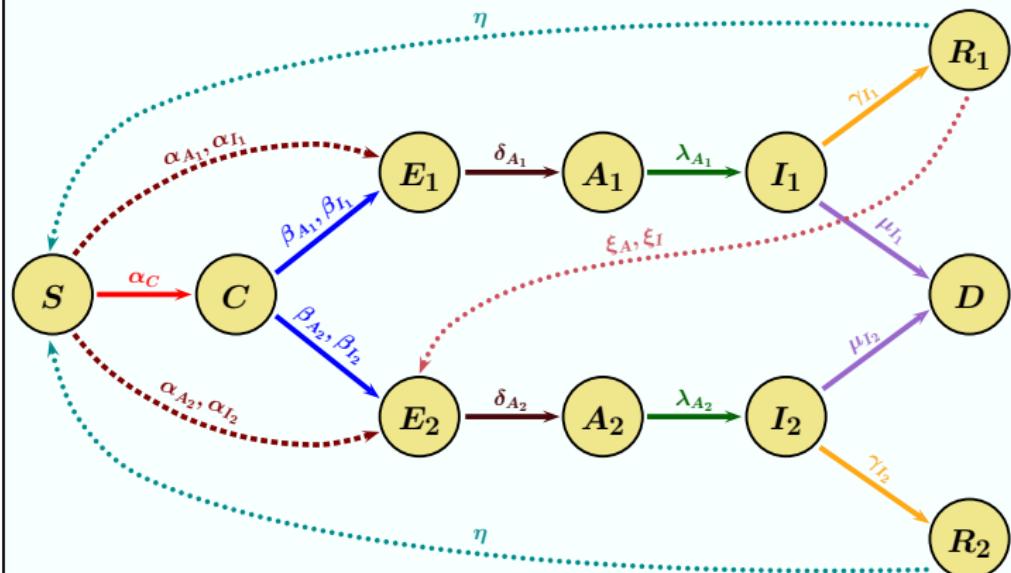
Variante Gama

Transmissão da COVID-19

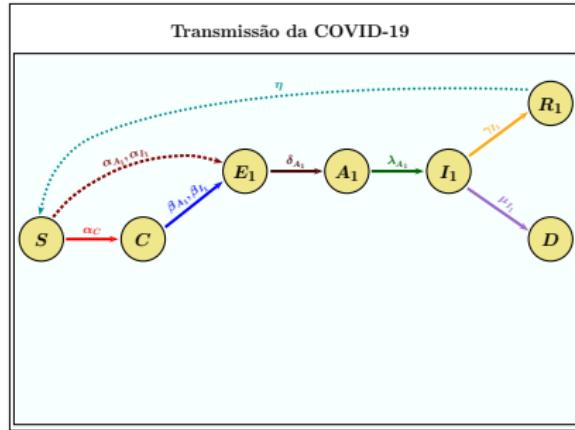


Variante Gama

Transmissão da COVID-19



Variante Gama

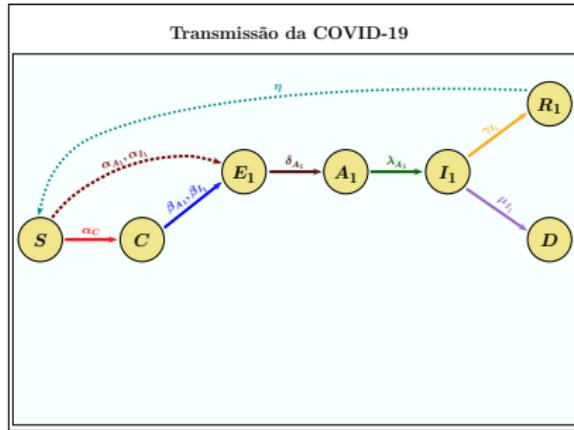


$$\frac{dS(t)}{dt} = \eta[R_1(t) + R_2(t)] - S(t)[\alpha_C + \alpha_{A_1}A_1(t) + \alpha_{I_1}I_1(t) + \alpha_{A_2}A_2(t) + \alpha_{I_2}I_2(t)]$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha_C S(t) - C(t)[\beta_{A_1}A_1(t) + \beta_{I_1}I_1(t) + \beta_{A_2}A_2(t) + \beta_{I_2}I_2(t)]$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_{I_1}I_1(t) + \mu_{I_2}I_2(t)$$

Variante Gama



Variante Original

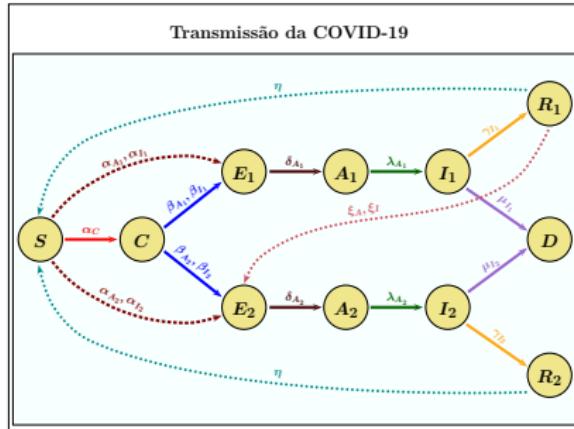
$$\frac{dE_1(t)}{dt} = \alpha_{A_1} S(t)A_1(t) + \alpha_{I_1} S(t)I_1(t) + \beta_{A_1} C(t)A_1(t) + \beta_{I_1} C(t)I_1(t) - \delta_{A_1} E_1(t)$$

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \delta_{A_1} E_1(t) - \lambda_{A_1} A_1(t)$$

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \lambda_{A_1} A_1(t) - \gamma_{I_1} I_1(t) - \mu_{I_1} I_1(t)$$

$$\frac{dR_1(t)}{dt} = \gamma_{I_1} I_1(t) - \eta R_1(t) - \xi_A R_1(t)A_2(t) - \xi_I R_1(t)I_2(t)$$

Variante Gama



Variante Gama

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = S(t)[\alpha_{A_2}A_2(t) + \alpha_{I_2}I_2(t)] + C(t)[\beta_{A_2}A_2(t) + \beta_{I_2}I_2(t)] + R_1(t)[\xi_A A_2(t) + \xi_I I_2(t)] - \delta_{A_2}E_2(t)$$

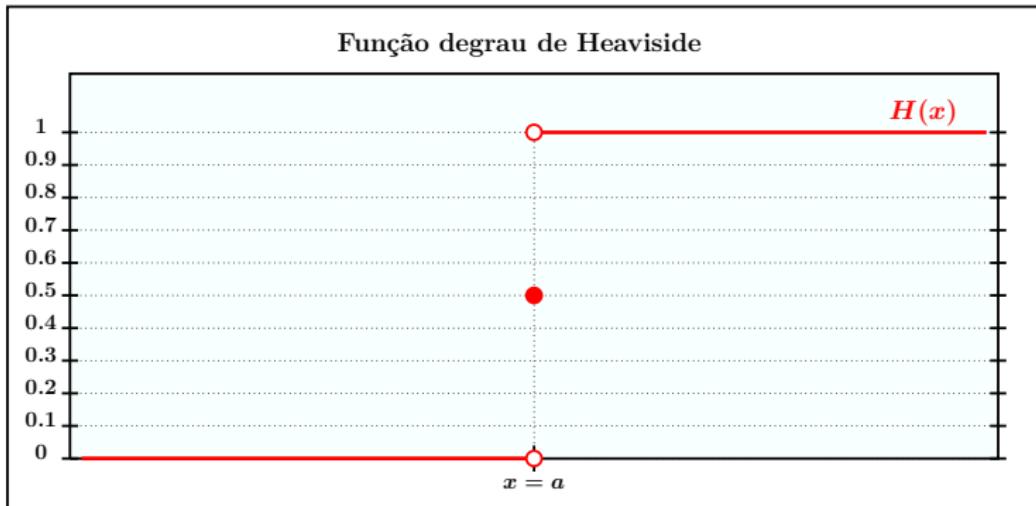
$$\frac{dA_2(t)}{dt} = \delta_{A_2}E_2(t) - \lambda_{A_2}A_2(t)$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = \lambda_{A_2}A_2(t) - \gamma_{I_2}I_2(t) - \mu_{I_2}I_2(t)$$

$$\frac{dR_2(t)}{dt} = \gamma_{I_2}I_2(t) - \eta R_2(t)$$

Função Degrau de Heaviside

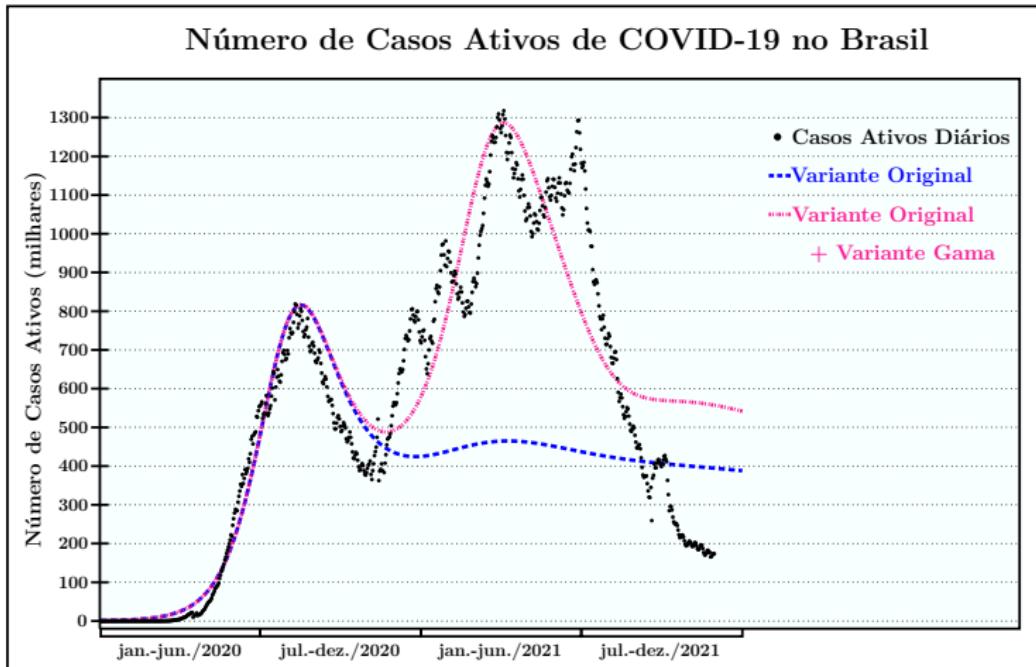
$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{2}, & x = a \\ 1, & x > a \end{cases}$$



Variante Gama

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \eta[R_1(t) + R_2(t)] - S(t)[\alpha_C + \alpha_{A_1}A_1(t) + \alpha_{I_1}I_1(t) + \alpha_{A_2}A_2(t) + \alpha_{I_2}I_2(t)] \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \alpha_C S(t) - C(t)[\beta_{A_1}A_1(t) + \beta_{I_1}I_1(t) + \beta_{A_2}A_2(t) + \beta_{I_2}I_2(t)] \\ \frac{dE_1(t)}{dt} &= \alpha_{A_1}S(t)A_1(t) + \alpha_{I_1}S(t)I_1(t) + \beta_{A_1}C(t)A_1(t) + \beta_{I_1}C(t)I_1(t) - \delta_{A_1}E_1(t) \\ \frac{dA_1(t)}{dt} &= \delta_{A_1}E_1(t) - \lambda_{A_1}A_1(t) \\ \frac{dI_1(t)}{dt} &= \lambda_{A_1}A_1(t) - \gamma_{I_1}I_1(t) - \mu_{I_1}I_1(t) \\ \frac{dR_1(t)}{dt} &= \gamma_{I_1}I_1(t) - \eta R_1(t) - \xi_A R_1(t)A_2(t) - \xi_I R_1(t)I_2(t) \\ \frac{dE_2(t)}{dt} &= H(t - \tau)S(t)[\alpha_{A_2}A_2(t) + \alpha_{I_2}I_2(t)] + H(t - \tau)C(t)[\beta_{A_2}A_2(t) + \beta_{I_2}I_2(t)] \\ &\quad + H(t - \tau)R_1(t)[\xi_A A_2(t) + \xi_I I_2(t)] - \delta_{A_2}H(t - \tau)E_2(t) \\ \frac{dA_2(t)}{dt} &= \delta_{A_2}H(t - \tau)E_2(t) - \lambda_{A_2}H(t - \tau)A_2(t) \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= \lambda_{A_2}H(t - \tau)A_2(t) - \gamma_{I_2}H(t - \tau)I_2(t) - \mu_{I_2}H(t - \tau)I_2(t) \\ \frac{dR_2(t)}{dt} &= \gamma_{I_2}H(t - \tau)I_2(t) - \eta H(t - \tau)R_2(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} &= \mu_{I_1}I_1(t) + \mu_{I_2}H(t - \tau)I_2(t)\end{aligned}$$

Variante Gama



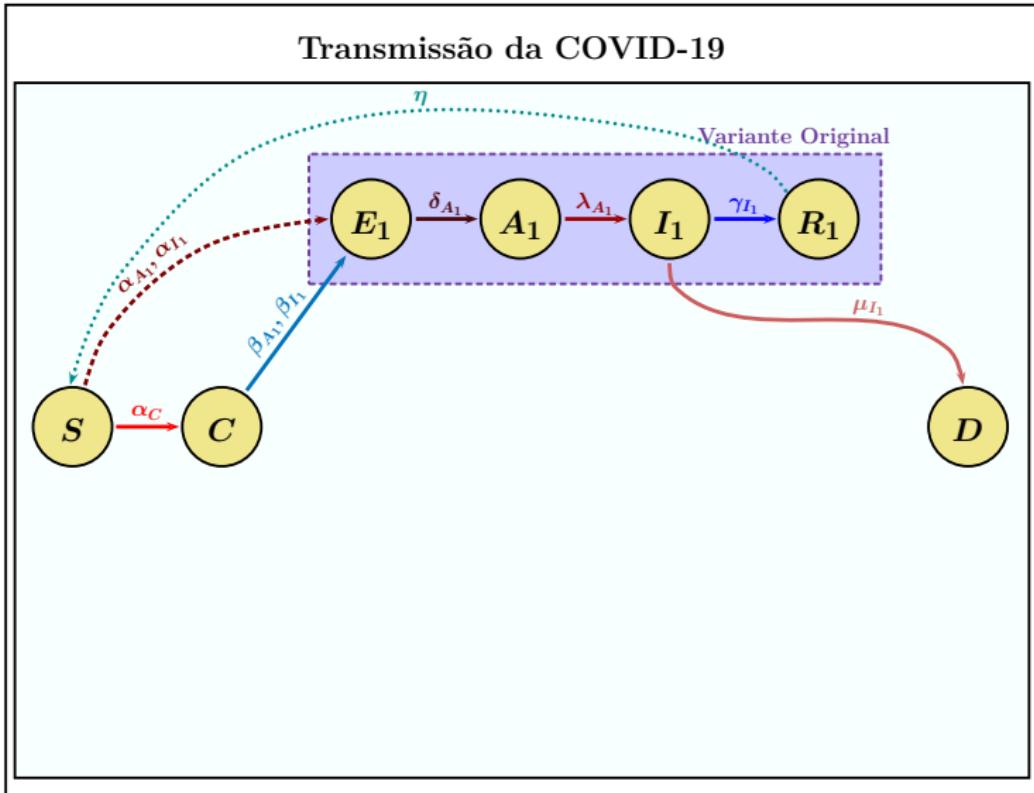
Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

Variante Delta

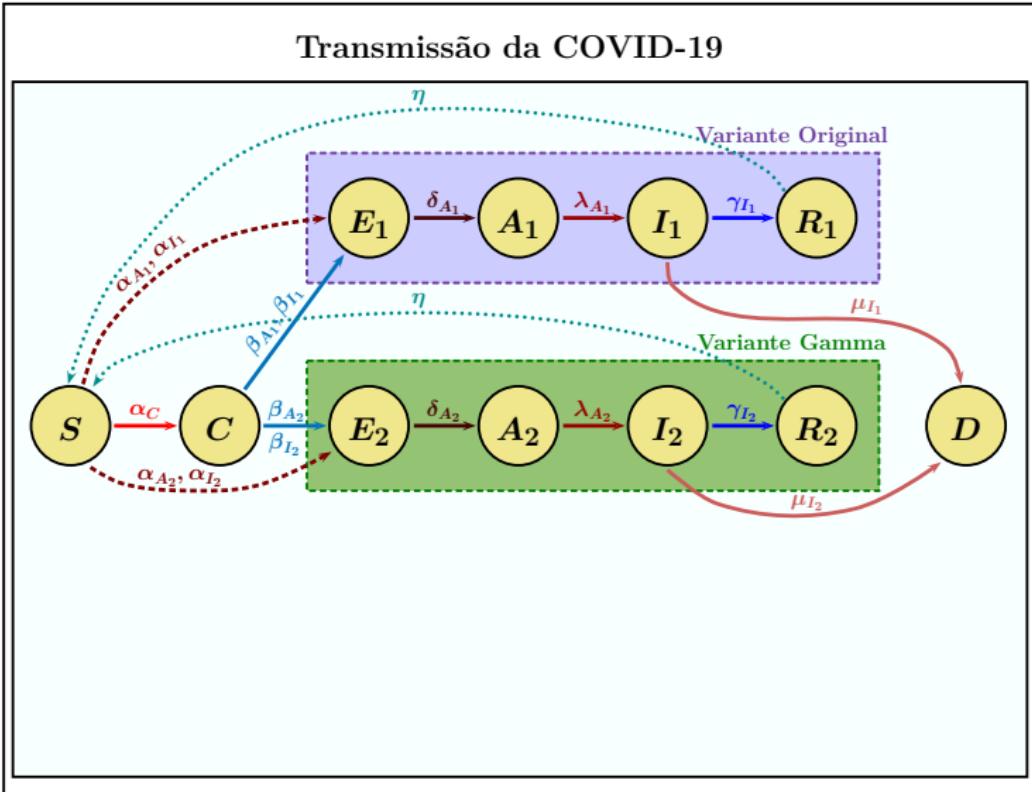
- Linhagem B.1.617
- Origem: Índia
- Identificada em dezembro de 2020 e os primeiros casos no Brasil foram confirmados em abril/maio de 2021
- Oito mutações na proteína *spike* e até 100% mais contagiosa que a cepa original do vírus
- Indivíduos infectados anteriormente com as variantes original e Gama são mais suscetíveis à reinfecção pela cepa Delta
- Os cuidados são os mesmos em relação às demais variantes

Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

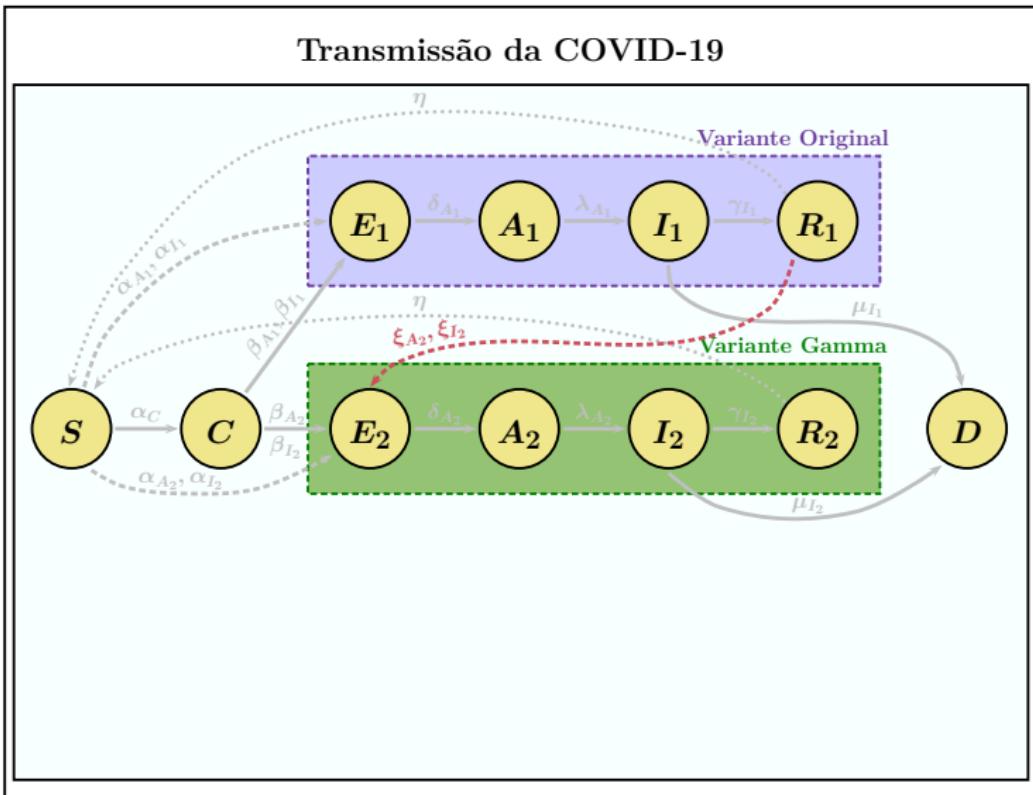
Variantes Gama e Delta



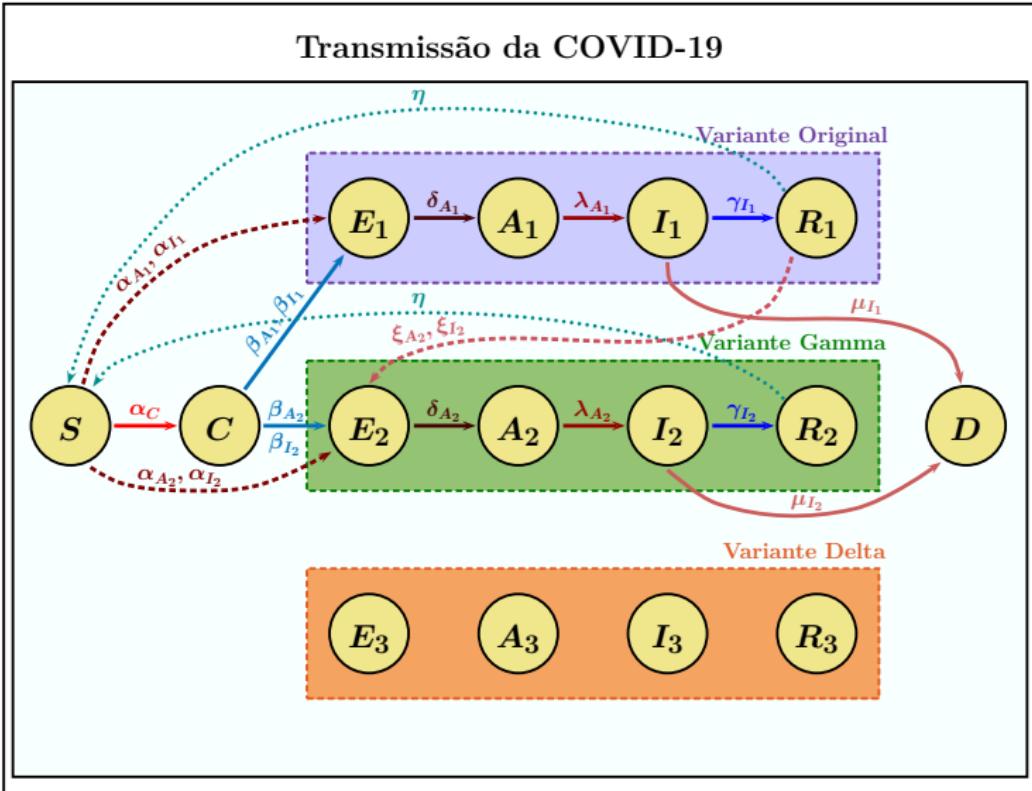
Variantes Gama e Delta



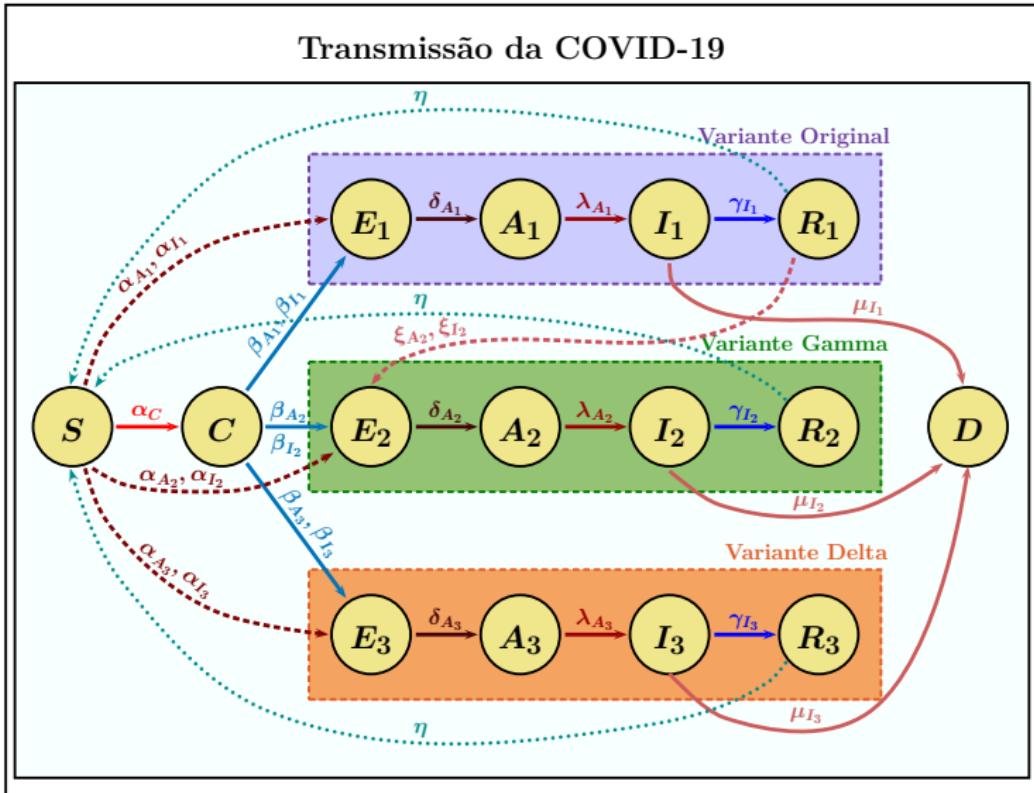
Variantes Gama e Delta



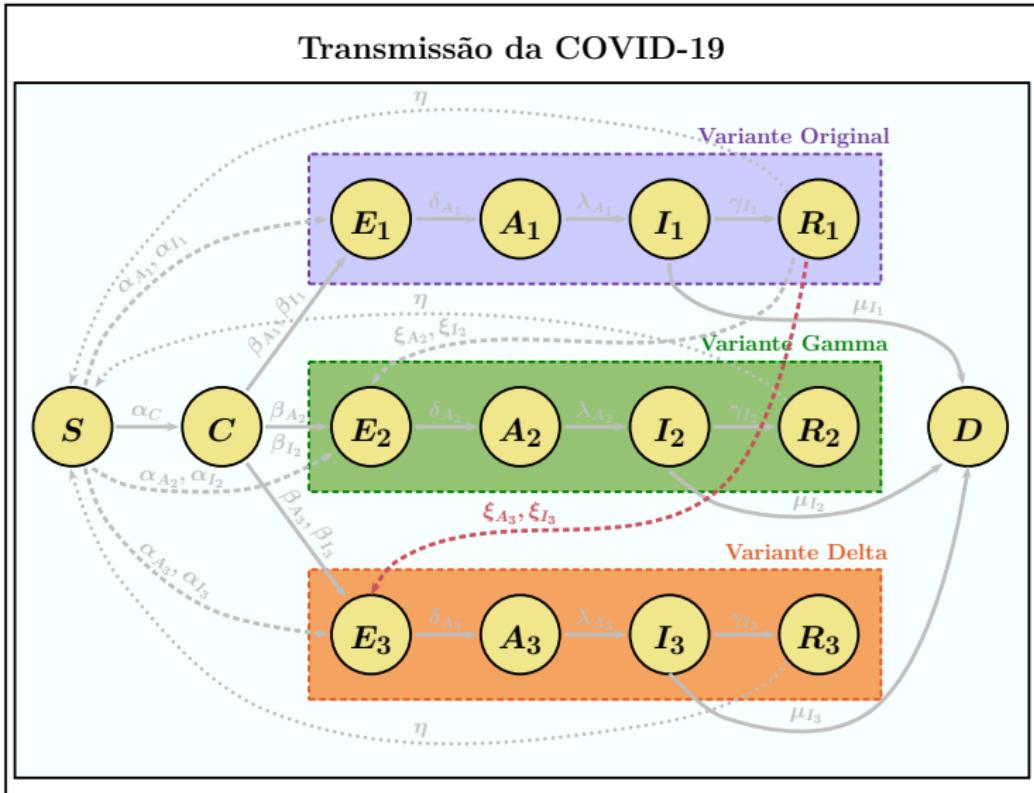
Variantes Gama e Delta



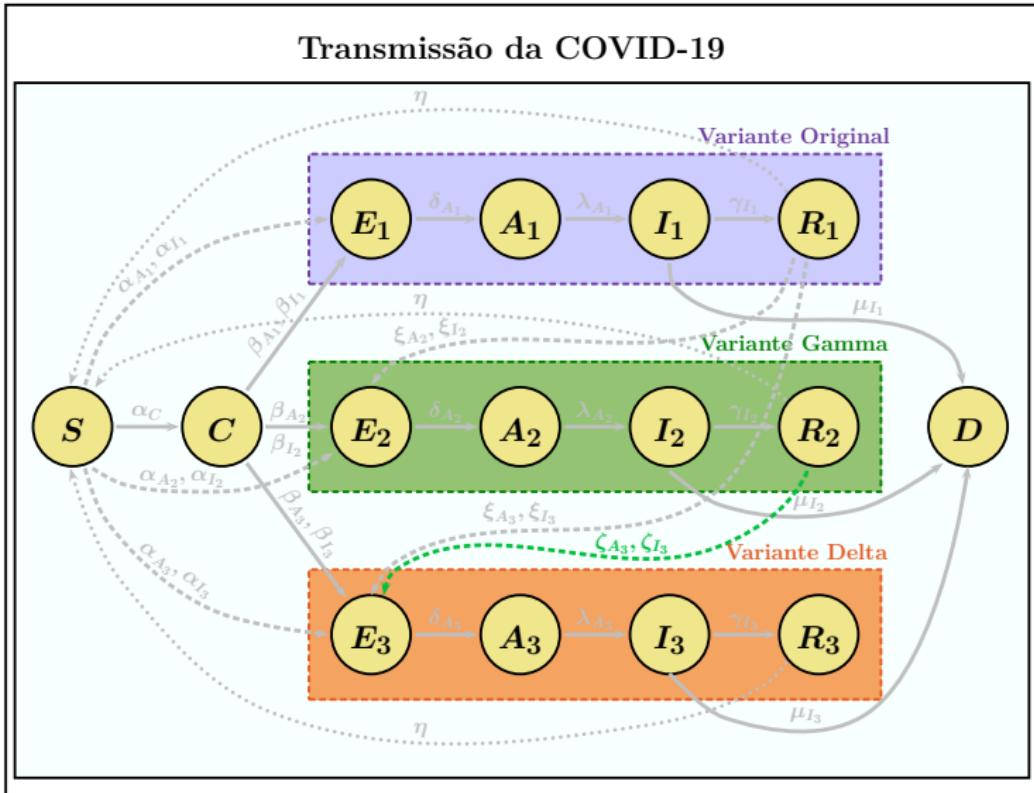
Variantes Gama e Delta



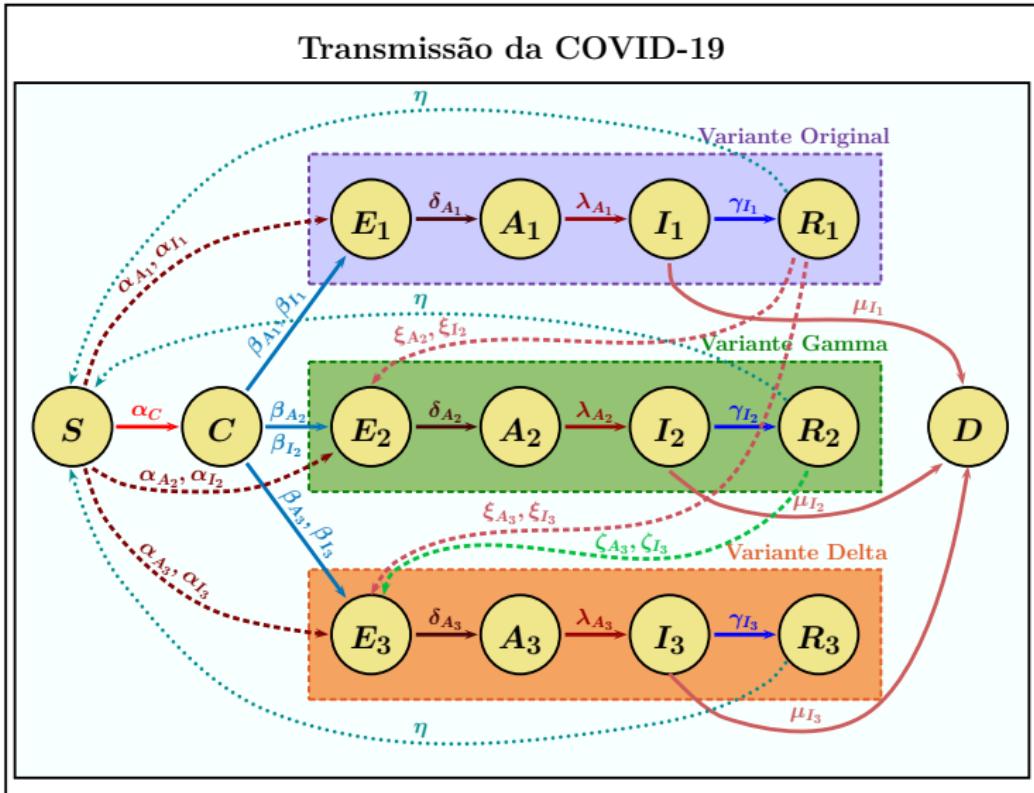
Variantes Gama e Delta



Variantes Gama e Delta



Variantes Gama e Delta



Variantes Gama e Delta

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \eta[R_1(t) + R_2(t) + R_3(t)] - S(t)[\alpha_C + \alpha_{A_1}A_1(t) + \alpha_{I_1}I_1(t) + \alpha_{A_2}A_2(t) + \alpha_{I_2}I_2(t) + \alpha_{A_3}A_3(t) + \alpha_{I_3}I_3(t)] \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \alpha_CS(t) - C(t)[\beta_{A_1}A_1(t) + \beta_{I_1}I_1(t) + \beta_{A_2}A_2(t) + \beta_{I_2}I_2(t) + \beta_{A_3}A_3(t) + \beta_{I_3}I_3(t)] \\ \frac{dE_1(t)}{dt} &= \alpha_{A_1}S(t)A_1(t) + \alpha_{I_1}S(t)I_1(t) + \beta_{A_1}C(t)A_1(t) + \beta_{I_1}C(t)I_1(t) - \delta_{A_1}E_1(t) \\ \frac{dA_1(t)}{dt} &= \delta_{A_1}E_1(t) - \lambda_{A_1}A_1(t) \\ \frac{dI_1(t)}{dt} &= \lambda_{A_1}A_1(t) - \gamma_{I_1}I_1(t) - \mu_{I_1}I_1(t) \\ \frac{dR_1(t)}{dt} &= \gamma_{I_1}I_1(t) - \eta R_1(t) - [\xi_{A_2}A_2(t) - \xi_{I_2}I_2(t) + \xi_{A_3}A_3(t) - \xi_{I_3}I_3(t)]R_1(t) \\ \frac{dE_2(t)}{dt} &= H(t - \tau_2)\{S(t)[\alpha_{A_2}A_2(t) + \alpha_{I_2}I_2(t)] + C(t)[\beta_{A_2}A_2(t) + \beta_{I_2}I_2(t)] \\ &\quad + R_1(t)[\xi_{A_2}A_2(t) + \xi_{I_2}I_2(t)] - \delta_{A_2}E_2(t)\} \\ \frac{dA_2(t)}{dt} &= H(t - \tau_2)[\delta_{A_2}E_2(t) - \lambda_{A_2}A_2(t)]\end{aligned}$$

Variantes Gama e Delta

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = H(t - \tau_2)[\lambda_{A_2} A_2(t) - \gamma_{I_2} I_2(t) - \mu_{I_2} I_2(t)]$$

$$\frac{dR_2(t)}{dt} = H(t - \tau_2)\{\gamma_{I_2} I_2(t) - \eta R_2(t) - [\zeta_{A_3} A_3 + \zeta_{I_3} I_3]R_2(t)\}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_3(t)}{dt} = & H(t - \tau_3)\{S(t)[\alpha_{A_3} A_3(t) + \alpha_{I_3} I_3(t)] + C(t)[\beta_{A_3} A_3(t) + \beta_{I_3} I_3(t)] + [\xi_{A_3} A_3(t) + \xi_{I_3} I_3(t)]R_1(t) \\ & + [\zeta_{A_3} A_3 + \zeta_{I_3} I_3]R_2(t) - \delta_{A_3} E_3(t)\}\end{aligned}$$

$$\frac{dA_3(t)}{dt} = H(t - \tau_3)[\delta_{A_3} E_3(t) - \lambda_{A_3} A_3(t)]$$

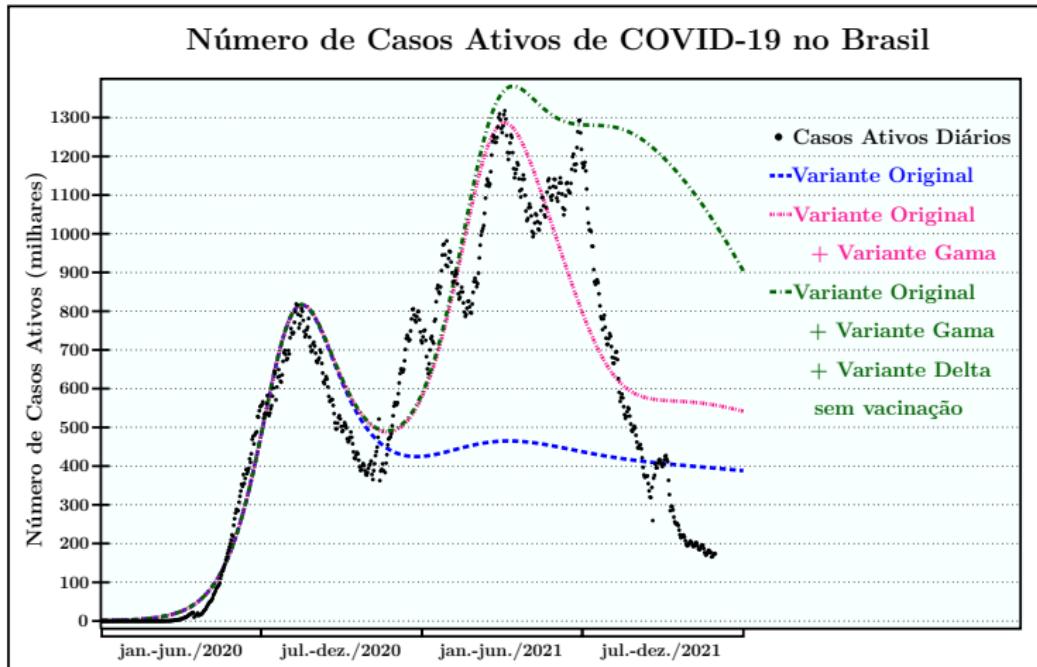
$$\frac{dI_3(t)}{dt} = H(t - \tau_3)[\lambda_{A_3} A_3(t) - \gamma_{I_3} I_3(t) - \mu_{I_3} I_3(t)]$$

$$\frac{dR_3(t)}{dt} = H(t - \tau_3)[\gamma_{I_3} I_3(t) - \eta R_3(t)]$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \mu_{I_1} I_1(t) + H(t - \tau_2)\mu_{I_2} I_2(t) + H(t - \tau_3)\mu_{I_3} I_3(t).$$

Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

Variantes Gama e Delta



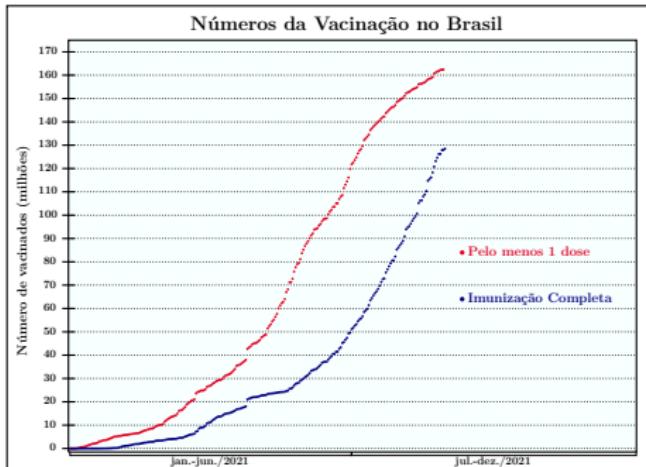
Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

Vacinação

- Início: 18 de Janeiro de 2021
- CoronaVac® - Sinovac e Instituto Butantan
- ChAdOx1-S nCoV-19® - AstraZeneca e Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz)
- Comirnaty® - Pfizer e BioNTech
- Janssen Ad26.COV2.S® - Johnson & Johnson

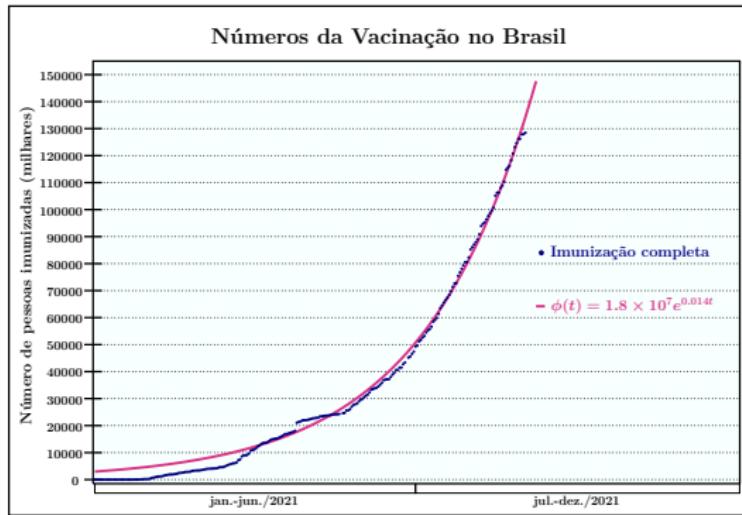
Vacinação

- Início: 18 de Janeiro de 2021
- CoronaVac® - Sinovac e Instituto Butantan
- ChAdOx1-S nCoV-19® - AstraZeneca e Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz)
- Comirnaty® - Pfizer e BioNTech
- Janssen Ad26.COV2.S® - Johnson & Johnson

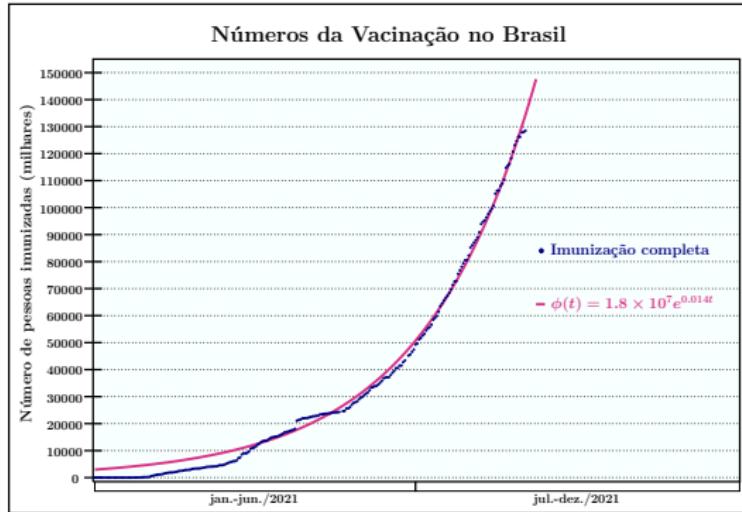


Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

Vacinação



Vacinação

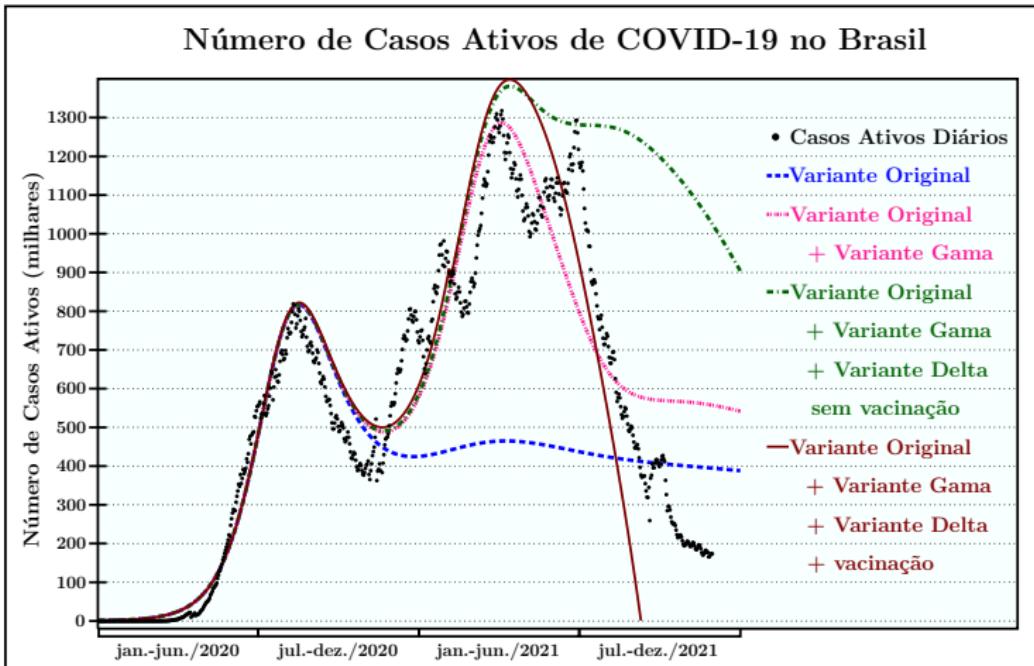


$$\psi(t) = H(t - 400)e^{\frac{\phi(t)}{N}}$$

Distribuição das vacinas e eficácia média $e = 75.3\%$

Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

Variantes Gama e Delta com Vacinação



Lima, Silva e Meyer, (2022) *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, doi:10.15517/rmta.v30i1.50566

Final da Pandemia?



<https://www.worldometers.info/coronavirus/worldwide-graphs/>

Dados de 18 de dezembro de 2023

- 1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento
- 2 Modelagem Epidemiológica
- 3 COVID-19
- 4 Primeira Onda
- 5 Ondas Sucessivas
- 6 Variante Ômicron
- 7 Conclusões e Perspectivas Futuras

Variante Ômicron

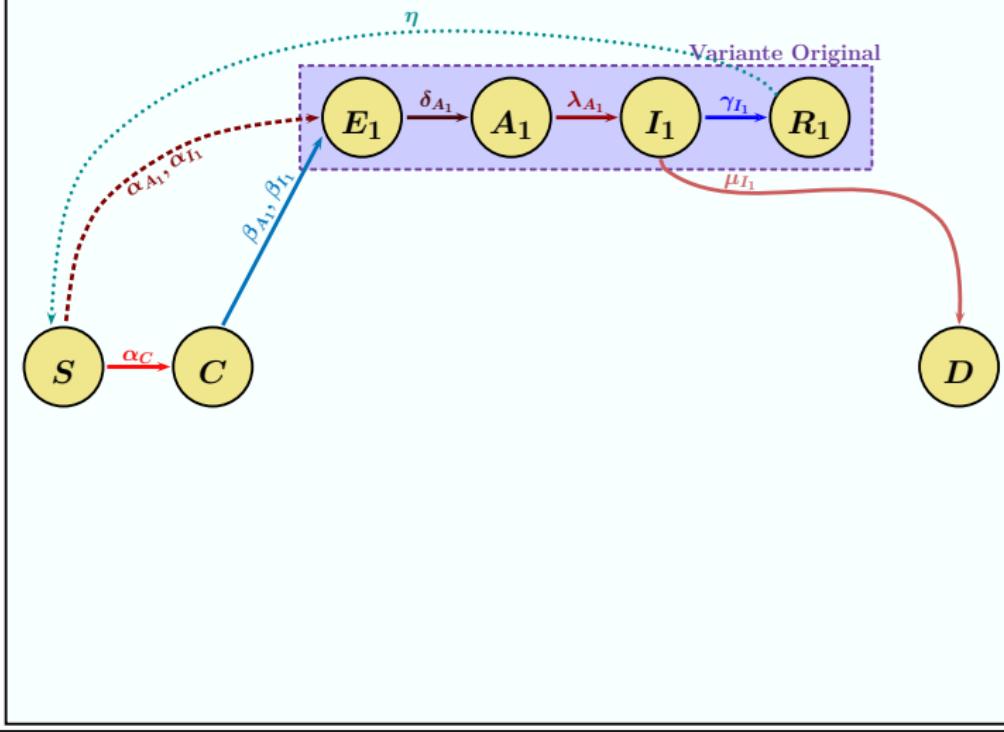
- Linhagem B.1.1.529
- Origem: África do Sul
- Surgiu no final de 2021
- Mutações na proteína *spike*
- Mais resistente às vacinas
- Infecta mais rapidamente os tecidos do trato respiratório superior em vez dos pulmões
- Facilidade de disseminação
- Sintomas mais leves
- Menor taxa de detecção

Variante Ômicron

- Continuamos considerando a circulação das variantes original, Gama e Delta
- Vacinação contra as variantes original, Gama e Delta
- Acréscimo das seguintes classes de indivíduos
 - $E_4(t)$: indivíduos Expostos à variante Ômicron
 - $A_4(t)$: indivíduos que contraíram a variante Ômicron, mas não manifestam sintomas
 - $I_4(t)$: indivíduos infectados pela variante Ômicron e que testaram positivo para a COVID-19
 - $R_4(t)$: indivíduos que adquiriram resistência, sendo essa temporária
- Os indivíduos resistentes às variantes anteriores, podem ser infectados pela Ômicron

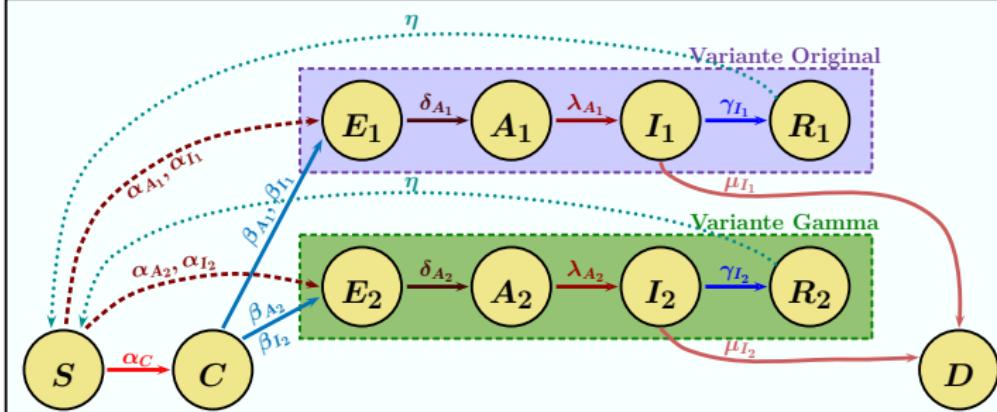
Variante Ômicron

Transmissão da COVID-19



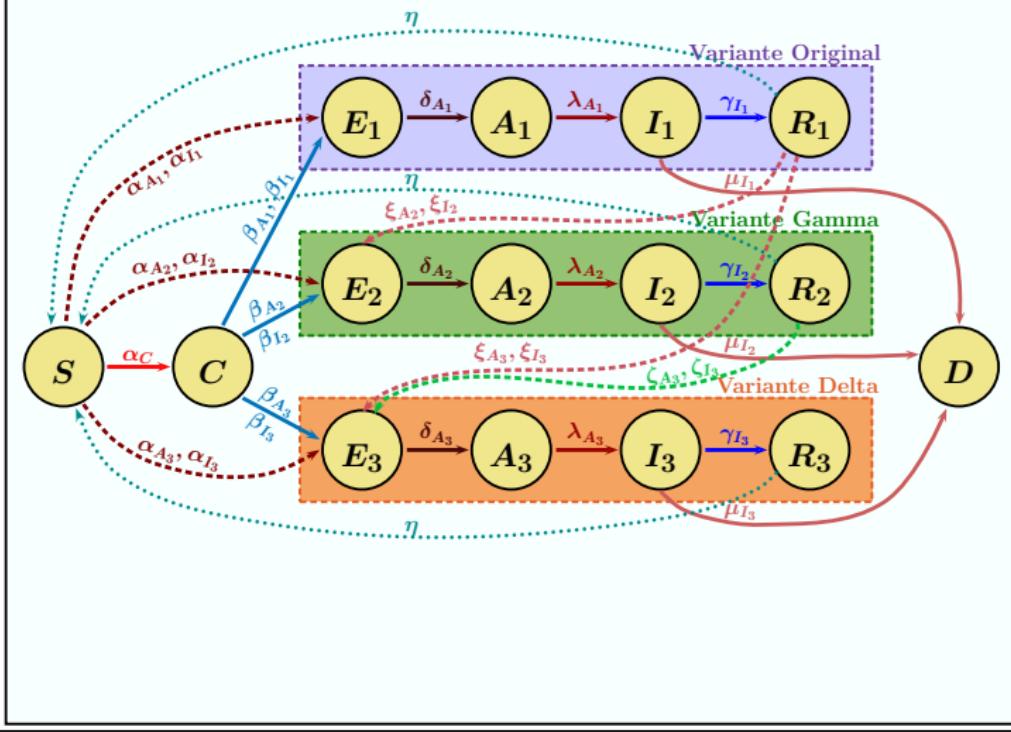
Variante Ômicron

Transmissão da COVID-19

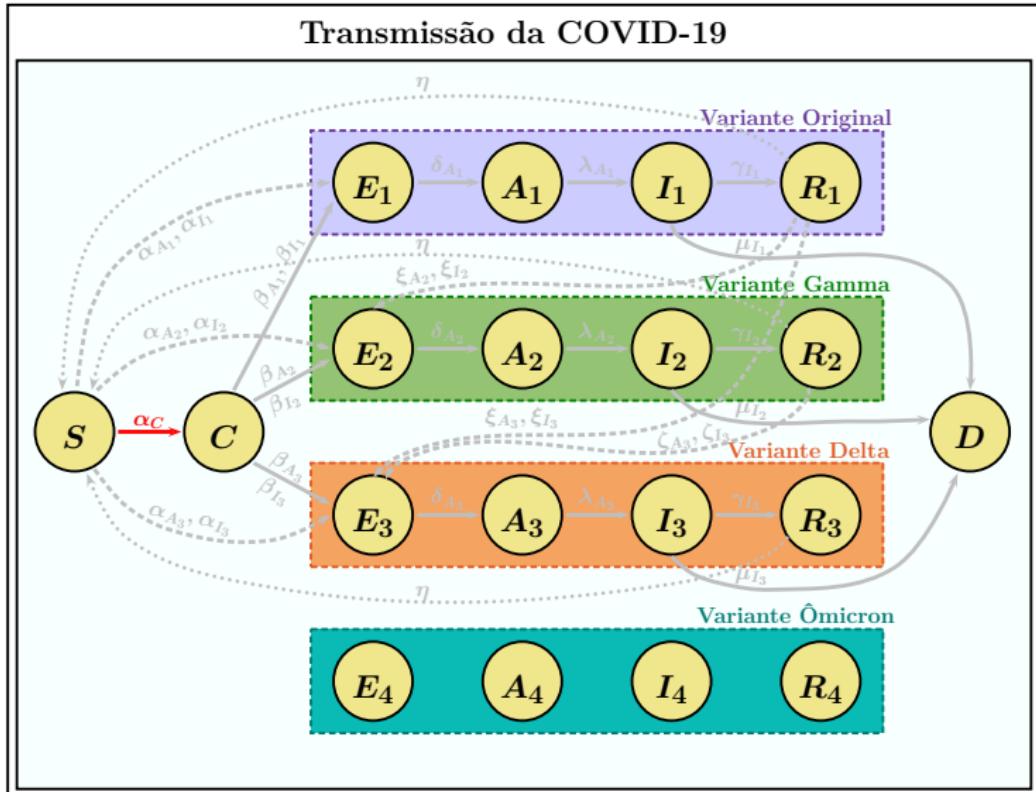


Variante Ômicron

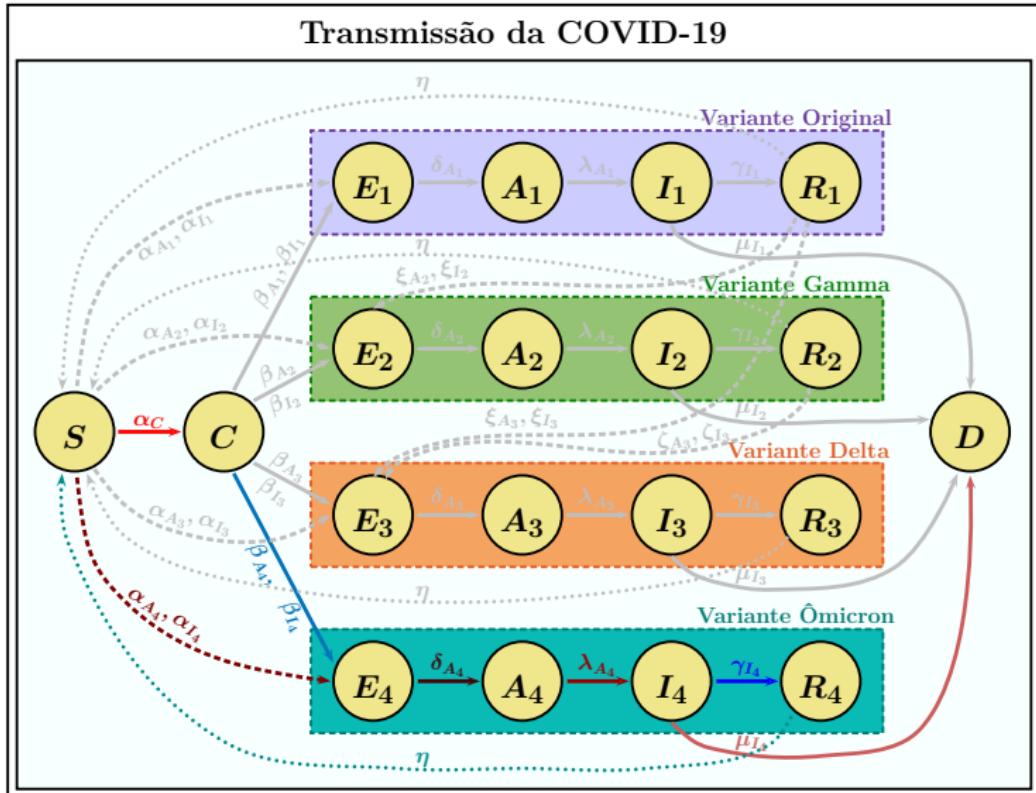
Transmissão da COVID-19



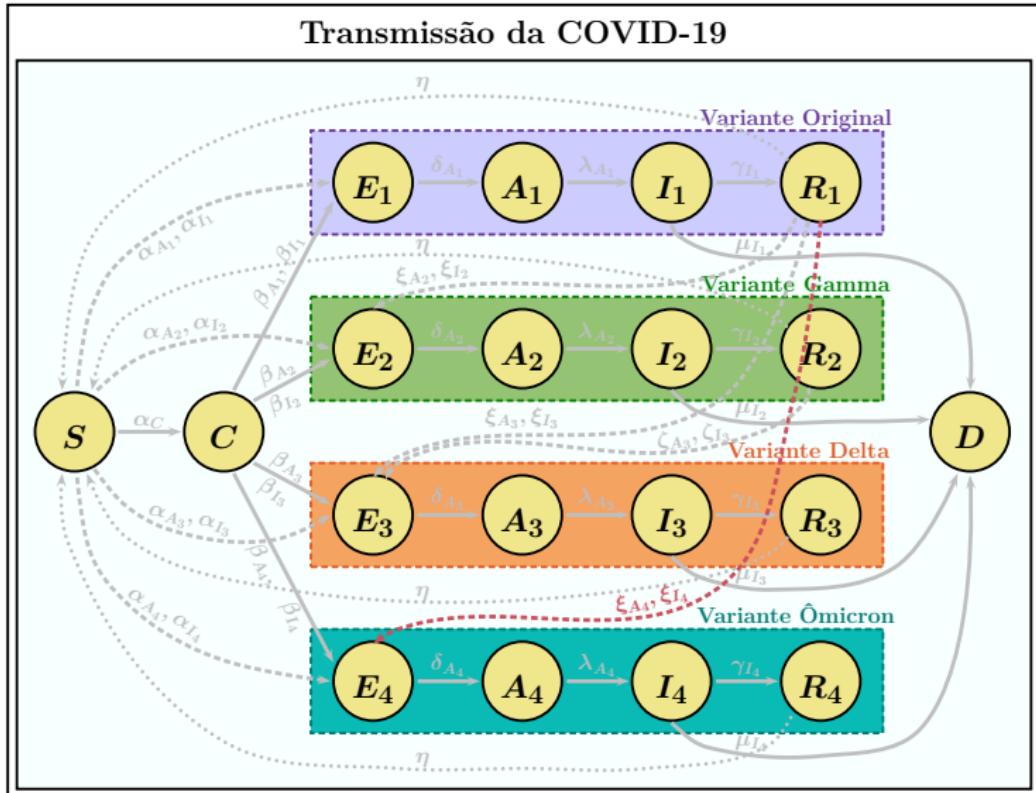
Variante Ômicron



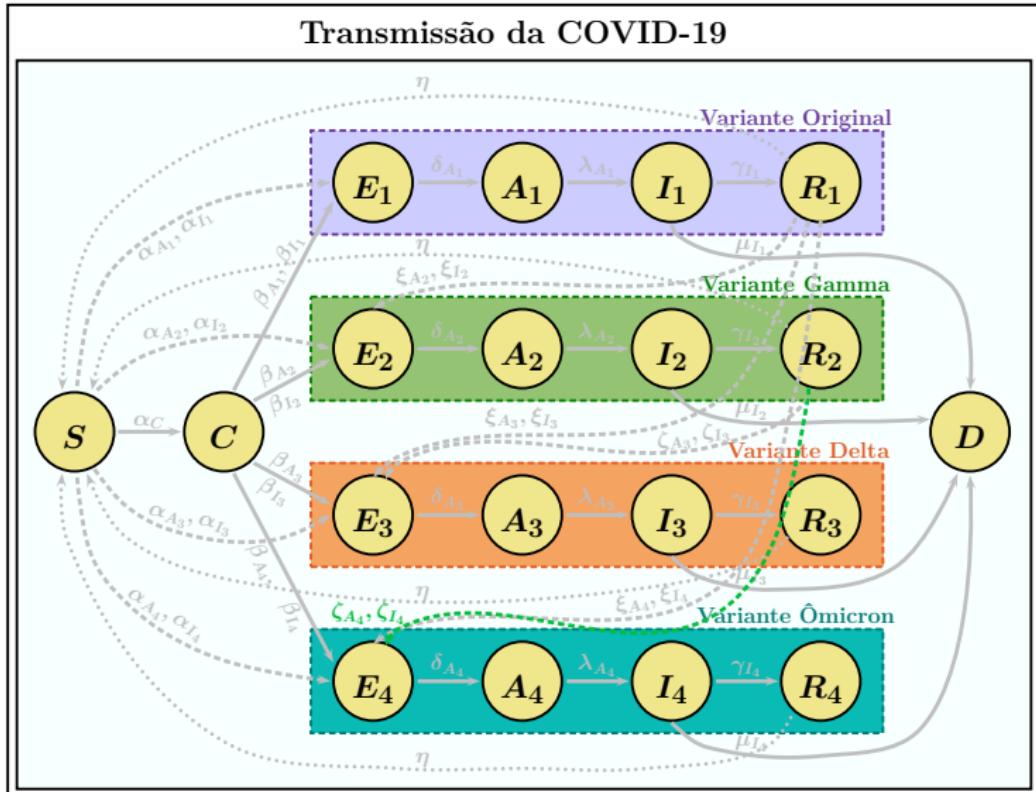
Variante Ômicron



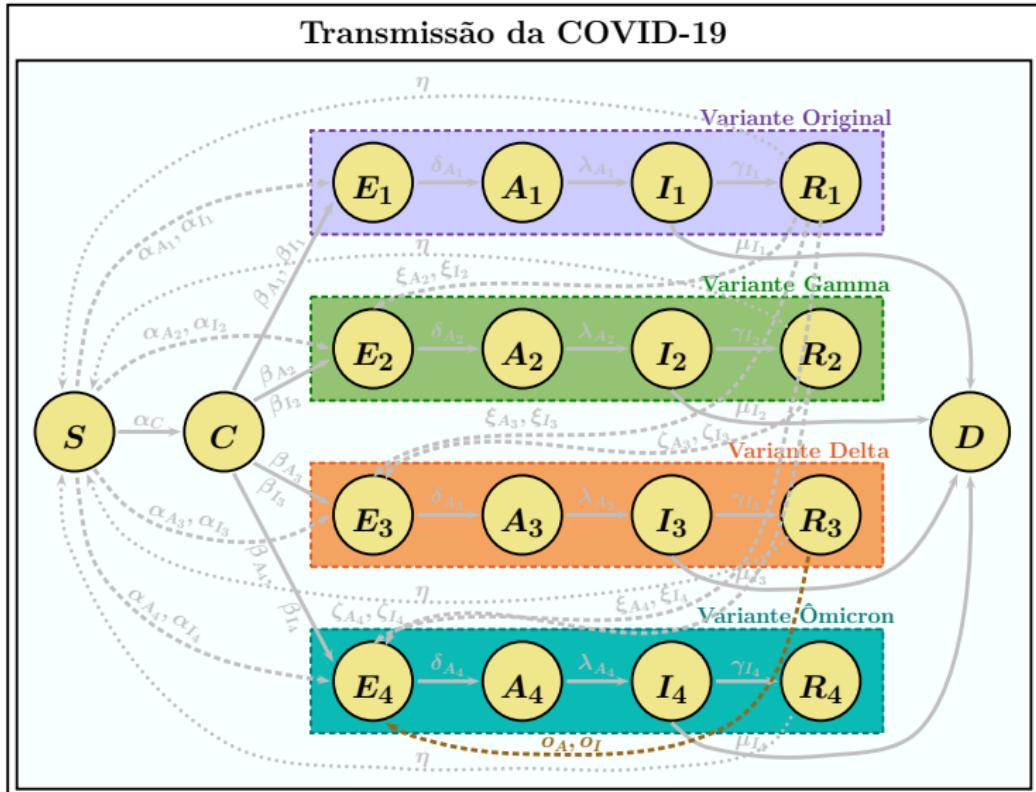
Variante Ômicron



Variante Ômicron

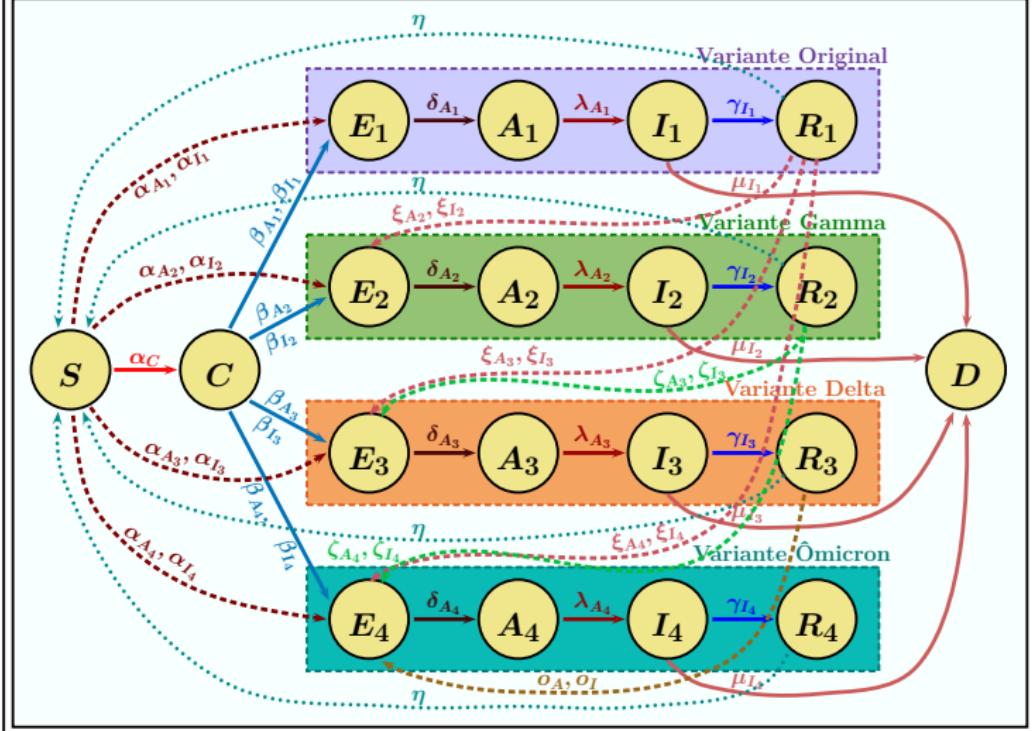


Variante Ômicron



Variante Ômicron

Transmissão da COVID-19



Variante Ômicron

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \eta[R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) + R_4(t)] - S(t)[\alpha_C + \alpha_{A_1} A_1(t) + \alpha_{I_1} I_1(t) \\&\quad + \alpha_{A_2} A_2(t) + \alpha_{I_2} I_2(t) + \alpha_{A_3} A_3(t) + \alpha_{I_3} I_3(t) + \alpha_{A_4} A_4(t) + \alpha_{I_4} I_4(t)] \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \alpha_C S(t) - C(t)[\beta_{A_1} A_1(t) + \beta_{I_1} I_1(t) + \beta_{A_2} A_2(t) + \beta_{I_2} I_2(t) + \beta_{A_3} A_3(t) \\&\quad + \beta_{I_3} I_3(t) + \beta_{A_4} A_4(t) + \beta_{I_4} I_4(t)] \\ \frac{dE_1(t)}{dt} &= \alpha_{A_1} S(t)A_1(t) + \alpha_{I_1} S(t)I_1(t) + \beta_{A_1} C(t)A_1(t) + \beta_{I_1} C(t)I_1(t) - \delta_{A_1} E_1(t) \\ \frac{dA_1(t)}{dt} &= \delta_{A_1} E_1(t) - \lambda_{A_1} A_1(t) \\ \frac{dI_1(t)}{dt} &= \lambda_{A_1} A_1(t) - \gamma_{I_1} I_1(t) - \mu_{I_1} I_1(t) \\ \frac{dR_1(t)}{dt} &= \gamma_{I_1} I_1(t) - \eta R_1(t) \\&\quad - [\xi_{A_2} A_2(t) + \xi_{I_2} I_2(t) + \xi_{A_3} A_3(t) + \xi_{I_3} I_3(t) + \xi_{A_4} A_4(t) + \xi_{I_4} I_4(t)]R_1(t)\end{aligned}$$

Variante Ômicron

$$\begin{aligned}\frac{dE_2(t)}{dt} &= H(t - \tau_2)\{S(t)[\alpha_{A_2}A_2(t) + \alpha_{I_2}I_2(t)] + C(t)[\beta_{A_2}A_2(t) + \beta_{I_2}I_2(t)] \\ &\quad + R_1(t)[\xi_{A_2}A_2(t) + \xi_{I_2}I_2(t)] - \delta_{A_2}E_2(t)\} \\ \frac{dA_2(t)}{dt} &= H(t - \tau_2)[\delta_{A_2}E_2(t) - \lambda_{A_2}A_2(t)] \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= H(t - \tau_2)[\lambda_{A_2}A_2(t) - \gamma_{I_2}I_2(t) - \mu_{I_2}I_2(t)] \\ \frac{dR_2(t)}{dt} &= H(t - \tau_2)\{\gamma_{I_2}I_2(t) - \eta R_2(t) - [\zeta_{A_3}A_3 + \zeta_{I_3}I_3 + \zeta_{A_4}A_4 + \zeta_{I_4}I_4]R_2(t)\}\end{aligned}$$

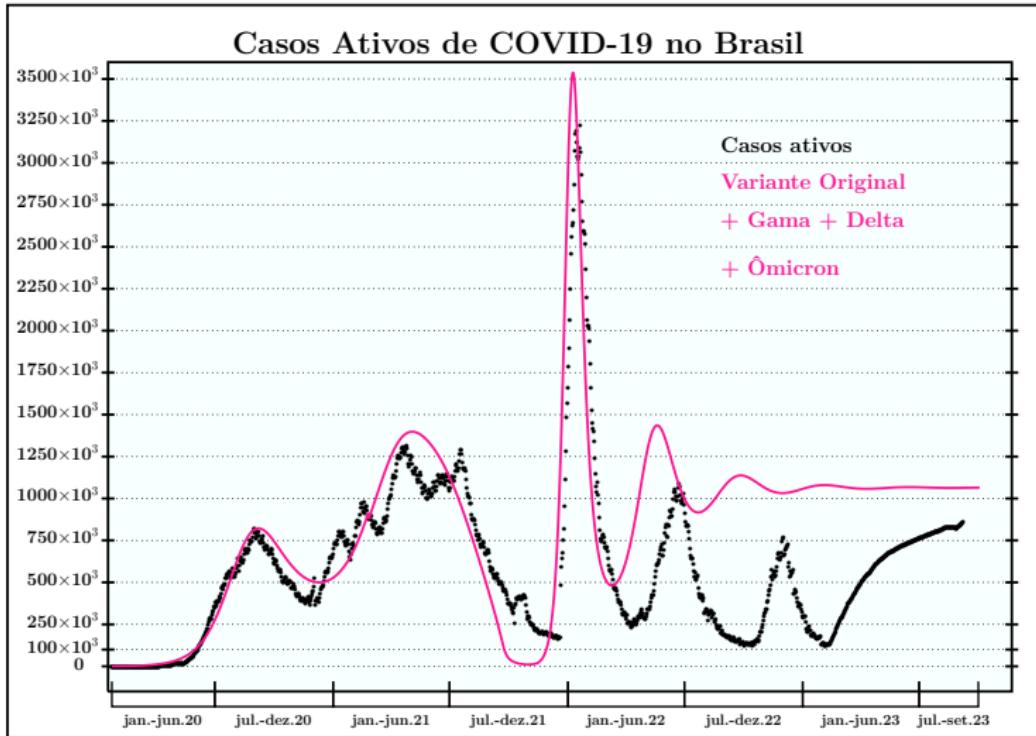
Variante Ômicron

$$\begin{aligned}\frac{dE_3(t)}{dt} &= H(t - \tau_3)\{S(t)[\alpha_{A_3}A_3(t) + \alpha_{I_3}I_3(t)] + C(t)[\beta_{A_3}A_3(t) + \beta_{I_3}I_3(t)] \\ &\quad + [\xi_{A_3}A_3(t) + \xi_{I_3}I_3(t)]R_1(t) + [\zeta_{A_3}A_3 + \zeta_{I_3}I_3]R_2(t) - \delta_{A_3}E_3(t)\} \\ \frac{dA_3(t)}{dt} &= H(t - \tau_3)[\delta_{A_3}E_3(t) - \lambda_{A_3}A_3(t)] \\ \frac{dI_3(t)}{dt} &= H(t - \tau_3)[\lambda_{A_3}A_3(t) - \gamma_{I_3}I_3(t) - \mu_{I_3}I_3(t)] \\ \frac{dR_3(t)}{dt} &= H(t - \tau_3)\{\gamma_{I_3}I_3(t) - [\eta + o_A + o_I]R_3(t)\}\end{aligned}$$

Variante Ômicron

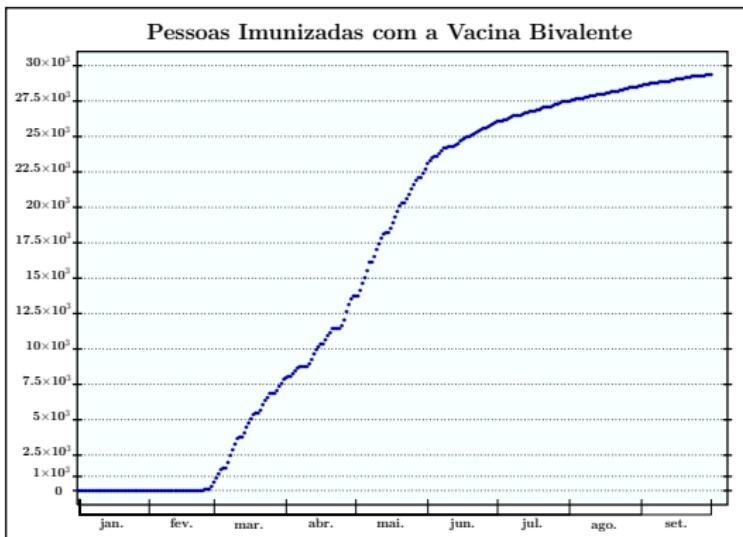
$$\begin{aligned}\frac{dE_4(t)}{dt} &= H(t - \tau_4)\{S(t)[\alpha_{A_4} A_4(t) + \alpha_{I_4} I_4(t)] + C(t)[\beta_{A_4} A_4(t) + \beta_{I_4} I_4(t)] \\&\quad + [\xi_{A_4} A_4(t) + \xi_{I_4} I_4(t)]R_1(t) + [\zeta_{A_4} A_4 + \zeta_{I_4} I_4]R_2(t) + [o_A A_4 + o_I I_4]R_3(t) - \delta_{A_4} E_4(t)\} \\ \frac{dA_4(t)}{dt} &= H(t - \tau_4)[\delta_{A_4} E_4(t) - \lambda_{A_4} A_4(t)] \\ \frac{dI_4(t)}{dt} &= H(t - \tau_4)[\lambda_{A_4} A_4(t) - \gamma_{I_4} I_4(t) - \mu_{I_4} I_4(t)] \\ \frac{dR_4(t)}{dt} &= H(t - \tau_4)[\gamma_{I_4} I_4(t) - \eta R_4(t)] \\ \frac{dD(t)}{dt} &= \mu_{I_1} I_1(t) + H(t - \tau_2)\mu_{I_2} I_2(t) + H(t - \tau_3)\mu_{I_3} I_3(t) + H(t - \tau_4)\mu_{I_4} I_4(t)\end{aligned}$$

Variante Ômicron



Vacina Bivalente

- Pfizer/BioNTech Comirnaty® Bivalente
- RNA mensageiro foi modificado de maneira a permitir uma expressão da forma transitória do antígeno S do vírus SARS-CoV-2
- Início da vacinação em janeiro de 2022

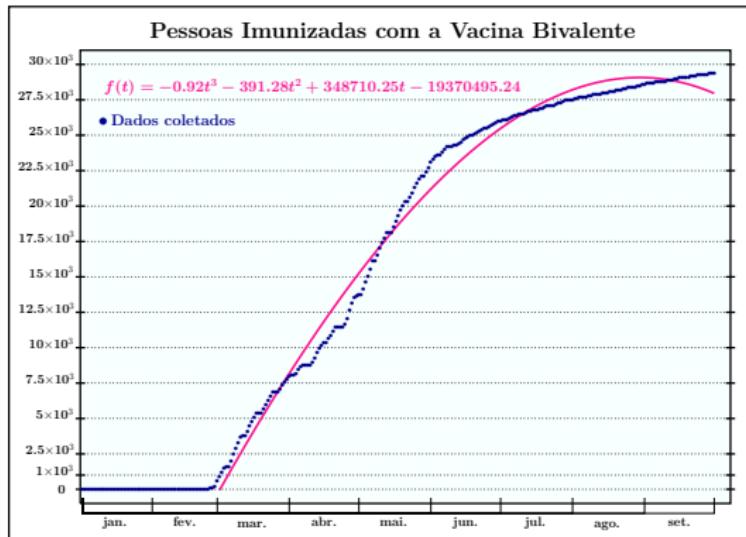


Vacina Bivalente

- Ajuste polinomial

$$f(t) = -0.92t^3 - 391.28t^2 + 348710.25t - 19370495.24$$

- $f(t)$: número de pessoas imunizadas
- Dia inicial: 56 - curva tem o seu crescimento expressivo



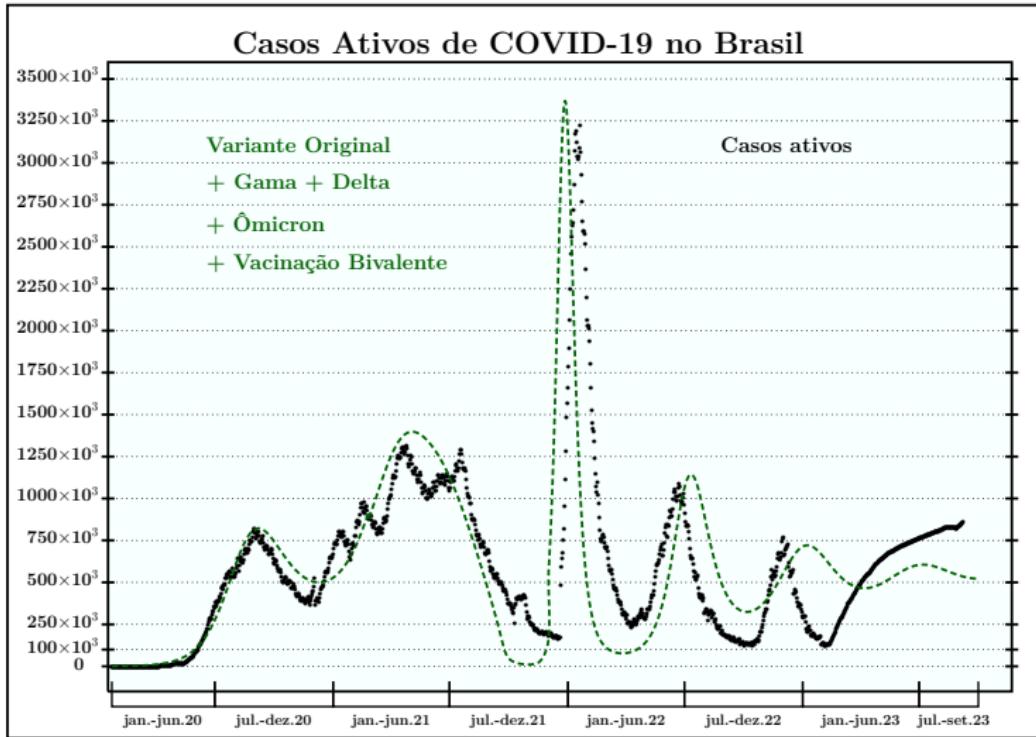
Vacina Bivalente

- Redução do número dos infectados pela variante Ômicron

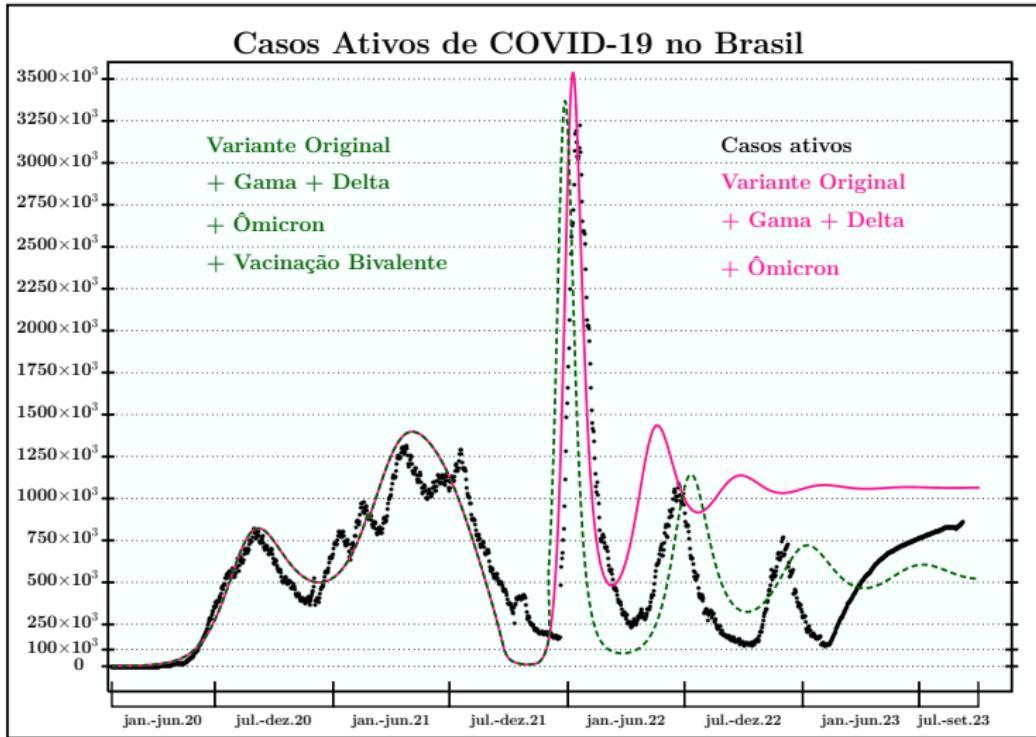
$$\phi(t) = H(t - 730)e \frac{f(t)}{N}$$

- $H(t - \tau)$: função degrau de Heaviside
- $\tau = 730$, corresponde ao dia 01/01/2022
- Eficácia da vacina: $e = 95\%$
- $f(t)$: função que descreve a curva completa de imunização
- N : população total do Brasil

Variante Ômicron



Variante Ômicron

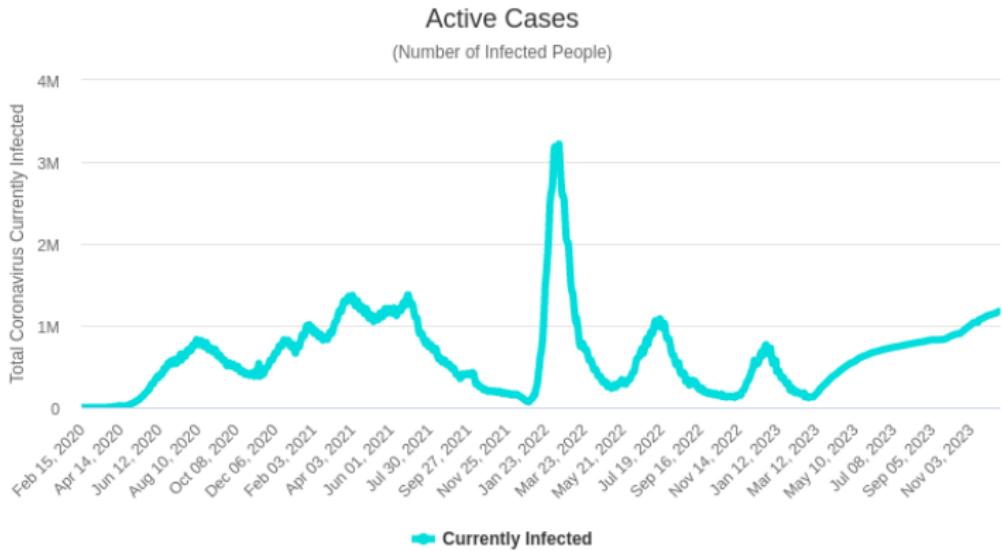


- 1 Modelagem Matemática e Modelos de crescimento
- 2 Modelagem Epidemiológica
- 3 COVID-19
- 4 Primeira Onda
- 5 Ondas Sucessivas
- 6 Variante Ômicron
- 7 Conclusões e Perspectivas Futuras

Conclusões

- Comportamento qualitativo das curvas
- Previsão de ondas sucessivas
- Vantagem da função de Heaviside
- Modelos inéditos que descrevem as ondas no Brasil
- Eficiência da vacinação na redução dos casos

E de agora em diante...



<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/brazil/>

Dados de 18 de dezembro de 2023

Perspectivas Futuras

- Novas variantes
- Vacinação periódica da população - segunda dose da Bivalente (dezembro 2023)
- Simulações de cenários de vacinação
- Dados “reais” da pandemia - subnotificação e autotestes
- Modelos intracelulares
- Perspectivas de uma COVID-19 endêmica
- Modelagem Fracionária da COVID-19

Referências

- J.F.C.A. Meyer e **M. Lima** (2022). Relevant mathematical modelling efforts for understanding COVID-19 dynamics: An educational challenge. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7):1-14,
doi:10.1007/s11858-022-01447-2
- **M. Lima** A. Silva e J.F.C.A. Meyer (2023). Mathematical models and simulations of different scenarios of COVID-19 in Brazil. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* 30(1):87–111,
doi:10.15517/rmta.v30i1.50566
- **M. Lima** A. Silva e J.F.C.A. Meyer (2022). Mathematical Modelling and Simulations of the COVID-19 in Brazil. *13th International Conference Dynamical Systems Applied to Biology and Natural Sciences (DSABNS)*, Bilbao - Espanha, p. 320-321
- J.F.C.A. Meyer, **M. Lima**, et al. (2021). Different approaches to the modelling of COVID-19. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, 22(4):515-531, doi:10.5540/tcam.2021.022.04.00515
- C.C. Morillo, A. Gois, C. Kunz, B. Laiate, **M. Lima**, F. Longo, J. F. C. A Meyer (2021). Diferentes enfoques para modelamiento matemático de COVID-19. *Modelacion Matematica IV*, p. 59-75,
ISBN:978-607-98020-7-3

Muito Obrigada!

