

# Dispersão de poluentes em meios aquáticos: Modelagem, aproximação e simulações

Ludmila Vitória Ribeiro Rocumba  
Graciele P. Silveira

Universidade Federal de São Carlos - *Campus Sorocaba*

[ludmilarocumba@estudante.ufscar.br](mailto:ludmilarocumba@estudante.ufscar.br)

29 de julho de 2024

- Aumento da poluição gerado por industrialização e urbanização
- Preocupações ambientais.
- Sistemas biológicos são complexos, difíceis de observar e contêm muitos detalhes.
- Matemática para a otimização de problemas ambientais.

- Ferramenta para diversas áreas.
- Entender e explicar situações reais a partir da matematização dos fenômenos.
- A modelagem matemática se encarrega de substituir a linguagem das hipóteses pela linguagem matemática.
- É um meio conciso de expressar ideias.
- Possibilita o cálculo de soluções numéricas a partir de métodos computacionais.

# Equação da difusão-advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{difusão\} - \{transporte\} - \{decaimento\} + \{fonte\}$$

- A difusão trata sobre o deslocamento do poluente de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração.
- O transporte ocorre pela advecção e considera o movimento do poluente ocasionado pelo fluxo da água e pelo vento, sem que este se degrade no processo.
- O decaimento expressa perdas de poluente ocasionadas por agentes naturais.
- A fonte caracteriza uma fonte poluidora.

# Equação da difusão-advecção

$$\{\textit{difusão}\} = \nabla(\alpha \nabla u)$$

$$\{\textit{transporte}\} = \vec{W} \nabla u$$

$$\{\textit{decaimento}\} = \sigma u$$

$$\{\textit{fonte}\} = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u - \vec{W} \nabla u - \sigma u + f, \quad (1)$$

- Duas dimensões espaciais  $x$  e  $y$ .
- Domínio retangular.
- O coeficiente de difusibilidade  $\alpha$  será constante em todas as direções.
- O coeficiente de decaimento  $\sigma$  será proporcional à própria poluição.
- Condições de contorno de Dirichlet.

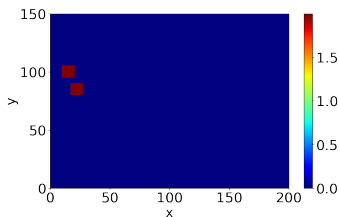
$$\begin{cases} u_t - \alpha(u_{xx} + u_{yy}) + (W_1, W_2)(u_x, u_y) + \sigma u = 0, & x \in (0, L), y \in (0, M), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & x \in [0, L], y \in [0, M] \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, M, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

# Discretização da Equação

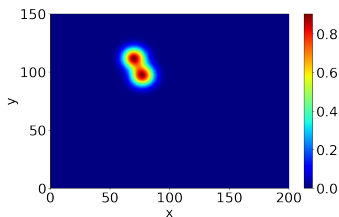
- Tratamento numérico a partir do método de diferenças finitas.
- Aproximação para a primeira derivada do tipo diferença avançada para a discretização temporal.
- Esquema upwind para o termo advectivo.
- Aproximação centrada de segunda ordem para a discretização espacial do termo difusivo.

# Simulações - Cenário 1

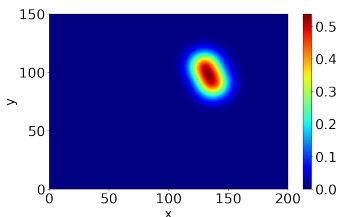
Figure: Dispersão do poluente para o cenário 1.



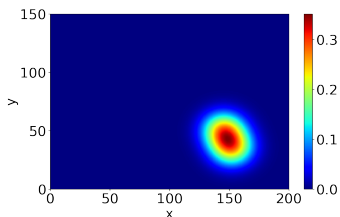
(a) Condição inicial



(b)  $t=10$  dias



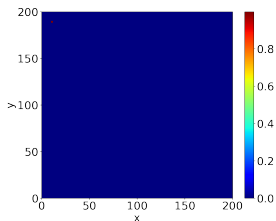
(c)  $t=20$  dias



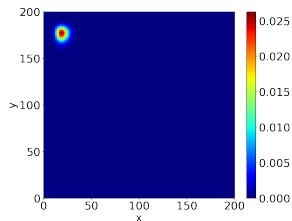
(d)  $t=30$  dias



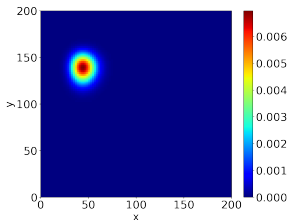
Figure: Dispersão do poluente para o cenário 2.



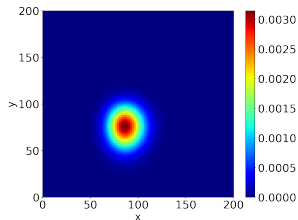
(a) Condição inicial



(b)  $t=5$  dias

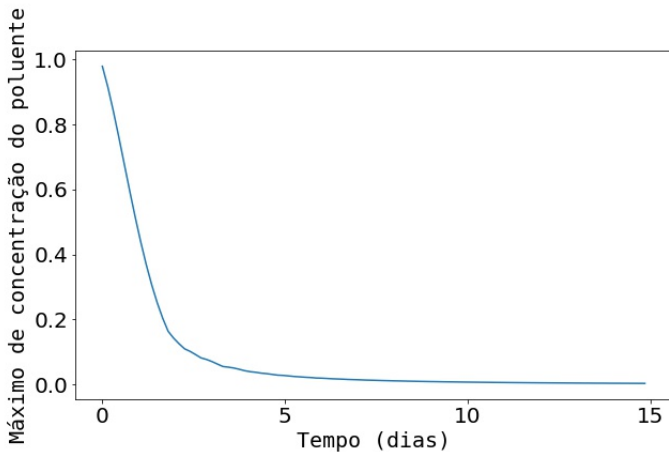


(c)  $t=10$  dias








(d)  $t=15$  dias

Figure: Gráfico do máximo da concentração do poluente ao longo do tempo para o cenário 2.



- Algumas limitações do modelo.
- Potencial do uso da modelagem matemática no enfrentamento de desastres e crimes ambientais.
- Realizar previsões, analisar o deslocamento, a movimentação e a dispersão de um poluente ao longo do tempo.
- Elaboração de estudos e estratégias para conter o avanço da poluição.
- Resultados apresentados graficamente.

-  BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelo Matemática**. Contexto: São Paulo, 2002.
-  DINIZ, G. L. **Dispersão de poluentes num sistema ar-água**: modelagem, aproximações e aplicações. Tese (Doutorado)-Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Campinas, 2003.
-  EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Philadelphia: SIAM, 2005.
-  RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico**: Aspectos teóricos e computacionais. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Pearson, 1996.
-  OLIVEIRA, R. F. **O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ**: modelagem, análise numérica e simulações. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.