Desigualdade Isoperimétrica: Uma Aplicação no Ensino da Matemática

Leonardo Souza[1] Vitor Ponciano[2]

[1]Colégio Pedro II, RJ

[2]Universidade Federal Fluminense

XI Bienal de Matemática, 2024

Resumo

Resumo: O teorema da desigualdade isoperimétrica é um princípio fundamental na geometria que estabelece relação entre a área delimitada por uma curva fechada e simples no plano, e o seu comprimento. Em termos simples, ele afirma que dentre todas curvas planas com o mesmo comprimento, a circunferência é aquela que possui a maior área delimitada. Este teorema tem implicações profundas em várias áreas da matemática e também aplicações na educação básica.

Palavras-chave

Palavras-chave: Desigualdade isoperimétrica, polígono regular, círculo, área, perímetro.

Introdução

- Exploramos o teorema da desigualdade isoperimétrica no plano e sua relevância para o ensino da matemática.
- Entre todos os polígonos de n lados com o mesmo perímetro, o polígono regular de n lados é o que possui a maior área.
- A desigualdade isoperimétrica:

$$l^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{1}$$

Desigualdade Isoperimétrica

- Dentre todas as curvas planas fechadas e simples de comprimento l, aquela que limita maior área é um círculo.
- Introdução prática e visual para os alunos:

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}. \tag{2}$$

- Teste com formas geométricas simples: triângulos, quadrados, retângulos e círculos.

Exemplos Práticos

- É possível demonstrar que a área de figuras planas, como triângulos, quadrados e retângulos, é sempre menor ou igual à área de um círculo com o mesmo perímetro.
- Se a figura for um círculo, então:

$$A = \frac{l^2}{4\pi} = \left(\frac{2\pi R}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2. \tag{3}$$

- O resultado em (3) afirma que este máximo só é atingido quando a curva é uma circunferência.
- É importante esclarecer aos alunos que a demonstração de (2) existe, mas é demasiadamente rigorosa para o nível deles, exigindo conhecer ferramentas além da matemática abordada no ensino básico.

- Agora considerando apenas os retângulos, qual é aquele que tem área máxima?
- Nesse caso, poderia propor-se, primeiro, aos alunos que verificassem a desigualdade:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \tag{4}$$

o que se prova ser equivalente a $(a-b)^2 \geq 0$. De fato,

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2-2ab \tag{5}$$

Exemplos Práticos

- Tomando a e b como medidas dos lados desse retângulo, chamando de A sua área e de l seu perímetro, segue por (5) e usando a desigualdade $\pi < 4$ (que implica em $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$):

$$A \leq \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1}{4} < \frac{l^2}{\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{l^2}{4\pi} \Leftrightarrow A \leq \frac{l^2}{4\pi}. \tag{6}$$

- Isso mostra aos alunos a desigualdade isoperimétrica.
- Então, para concluir o problema, a área máxima ocorre quando:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b) = 0 \Leftrightarrow a = b. \tag{7}$$

- Portanto, o retângulo de área máxima é, de fato, um quadrado.

Conclusão

- Importância de ampliar o conhecimento sobre temas da matemática para enriquecer a didática.
- A desigualdade isoperimétrica é fundamental no ensino básico para relacionar área e perímetro.
- Futuras pesquisas: Verificação da desigualdade em outras curvas e em espaços de dimensões maiores.

Referências

- Euclides. **Os Elementos**. Tradução diretamente do Grego Clássico por Irineu Bicudo. Editora Unesp, 2009.
- Melo, M.; Martins, C.H.S. **A desigualdade isoperimétrica: aspectos históricos e um esboço de sua demonstração para alunos do Ensino Médio**. *Revista Thema*, vol. 21, no. 2, 2022, p. 563-578.
- Moraes, P.S.A. **Abordagens da Desigualdade Isoperimétrica no Ensino Básico**. UFBA, 2017.
- Moreira, C.G.T. de A.; Saldanha, N.C. **A Desigualdade Isoperimétrica**. *Matemática Universitária*, número 15, dezembro de 1993.