Classificação das álgebras de Lie, Leibniz e Jordan de dimensão menor ou igual a 2

Juliana Medeiros Barbosa
Orientadora: Manuela da Silva Souza

IME - Universidade Federal da Bahia
XI Bienal de Matemática - São Carlos/SP

29 de julho de 2024

Objetivo

Nesta apresentação queremos classificar, a menos de isomorfismos, as álgebras de Lie, Leibniz e Jordan de dimensões um e dois sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer, em particular, se tratando da álgebra de Jordan, sobre corpo de característica diferente de 2.

Álgebra de Lie

Definição

Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma **álgebra de Lie** se, para todos $x, y, z \in \mathcal{L}$ valem:

(i)$x^2 = 0$ (anticomutatividade);

(ii)$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ (identidade de Jacobi).

Definição

Dizemos que A é **álgebra Derivada**, denotada por $A^{(2)}$, quando é a álgebra gerada por todas as multiplicações, isto é,

$$A^{(2)} = \langle \{xy \, ; x, y \in A\} \rangle.$$

Álgebra de Lie

Definição

Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma **álgebra de Lie** se, para todos $x, y, z \in \mathcal{L}$ valem:

(i)$x^2 = 0$ (anticomutatividade);

(ii)$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ (identidade de Jacobi).

Definição

Dizemos que A é **álgebra Derivada**, denotada por $A^{(2)}$, quando é a álgebra gerada por todas as multiplicações, isto é,

$$A^{(2)} = \langle \{xy \,;\, x, y \in A\} \rangle.$$

Álgebra de Lie

Seja A uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$.

Suponha $dim(A) = 1$. Seja $A = span\{e_1\}$. Então, como A é Lie, temos $e_1 e_1 = 0$ e todo elemento x de A se escreve como $x = \alpha e_1$. Daí, A é isomorfa à álgebra trivial.

Teorema

Toda álgebra de Lie, $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}^2 \neq 0$, de dimensão 2 é isomorfa àquela na qual $e_1 e_2 = e_2$.

Álgebra de Lie

Seja A uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$.

Suponha $dim(A) = 1$. Seja $A = span\{e_1\}$. Então, como A é Lie, temos $e_1 e_1 = 0$ e todo elemento x de A se escreve como $x = \alpha e_1$. Daí, A é isomorfa à álgebra trivial.

Teorema

Toda álgebra de Lie, $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}^2 \neq 0$, de dimensão 2 é isomorfa àquela na qual $e_1 e_2 = e_2$.

Álgebra de Lie

Demonstração.

Sejam A $=$ span$\{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{L} =$ span$\{m_1, m_2\}$ álgebras de Lie tais que $e_1 e_2 = e_2$ e $\mathcal{L}^2 \neq 0$.

Como $\mathcal{L}$ é Lie, temos $m_1^2 = m_2^2 = 0$ e $m_1 m_2 = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2$

Suponha $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$. Seja $\mathcal{L}^{(2)} = \langle \{xy\, ; x, y \in \mathcal{L}\} \rangle$. Temos que
$dim(\mathcal{L}^{(2)}) \leqslant \left(\begin{array}{c} dim(\mathcal{L}) \\ 2 \end{array} \right) = 1.$
Temos, então, dois casos:

(i) Se $dim(\mathcal{L}^{(2)}) = 0$, então $xy = 0, \forall x, y \in \mathcal{L}^{(2)}$, mas como $\mathcal{L}^2 \neq 0$, por hipótese, temos que $dim(\mathcal{L}^{(2)}) \neq 0$.

Álgebra de Lie

Demonstração.

(ii) $dim(\mathcal{L}^{(2)}) = 1$. Seja $x = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2$ e $y = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2$. Daí,

$$xy = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \beta_j m_i m_j$$

Como $\mathcal{L}^{(2)} = span\{xy\,;\, x, y \in \mathcal{L}\}$, temos que $\mathcal{L}^{(2)} = span\{m_1 m_2\}$.

Daí, $\mathcal{L} = span\{\hat{m}_1, \hat{m}_2\}$ onde $\hat{m}_2 = m_1 m_2$ e $\hat{m}_1$ é tal que $\{\hat{m}_1, \hat{m}_2\}$ são linearmente independentes.

Álgebra de Lie

Demonstração.

Como $\hat{m}_1\hat{m}_2 \in \mathcal{L}^{(2)}$ temos

$$\hat{m}_1\hat{m}_2 = \alpha m_1 m_2 = \alpha\hat{m}_2$$

Seja, agora, $\mathcal{L} = span\{\hat{\hat{m}}_1, \hat{m}_2\}$ onde $\hat{\hat{m}}_1 = \alpha^{-1}\hat{m}_1$. Daí,

$$\hat{\hat{m}}_1\hat{m}_2 = \alpha^{-1}\hat{m}_1\hat{m}_2 = \alpha^{-1}\alpha\hat{m}_2 = \hat{m}_2$$

Donde segue que A$\cong \mathcal{L}$ $\square$

Álgebra de Leibniz

Definição

Dizemos que uma álgebra L sobre um corpo $\mathbb{K}$ é uma **álgebra de Leibniz** se satisfaz a identidade de Leibniz, dada por

$$(xy)z = (xz)y + x(yz), \forall x, y, z \in L.$$

Note que Lie $\Rightarrow$ Leibniz. De fato, se A é Lie então pela identidade de Jacobi para $x, y, z \in A$, temos que

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0,$$

usando a anticomutatividade temos

$$(xy)z - x(yz) - (xz)y = 0.$$

Álgebra de Leibniz

Definição

Dizemos que uma álgebra L sobre um corpo $\mathbb{K}$ é uma **álgebra de Leibniz** se satisfaz a identidade de Leibniz, dada por

$$(xy)z = (xz)y + x(yz), \forall x, y, z \in L.$$

Note que Lie $\Rightarrow$ Leibniz. De fato, se A é Lie então pela identidade de Jacobi para $x, y, z \in A$, temos que

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0,$$

usando a anticomutatividade temos

$$(xy)z - x(yz) - (xz)y = 0.$$

Álgebra de Leibniz

Seja **L álgebra de Leibniz não Lie** sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Suponha $dim(L) = 1$. Seja $a \in L$, como L não é Lie, temos $a^2 \neq 0$, daí, existe $\beta \in \mathbb{K}^*$ tal que $a^2 = \beta a$. Pela identidade de Leibniz temos que

$$(aa)a = (aa)a + a(aa) \Leftrightarrow 0 = \beta(aa)$$

donde segue que $a^2 = 0$, o que é uma contradição. Portanto, a **álgebra de Leibniz de dimensão 1 é a álgebra de Lie de mesma dimensão.**

Álgebra de Leibniz

Teorema

As álgebras de Leibniz bidimensionais, tais que $L^2 \neq 0$ são isomorfas a:

$A_2 = span\{x, y\}; xy = x = -yx$

$A_3 = span\{x, y\}; xx = y$

$A_4 = span\{x, y\}; xx = y, yx = y$

Álgebra de Leibniz

Demonstração.

Suponha $dim(L) = 2$. Se L for Lie, então vimos anteriormente que L $\cong A_2$.

Suponha então que L é não Lie. Daí, existe $x \in L$ não nulo tal que $x^2 \neq 0$ donde segue que existe $\beta \in \mathbb{K}^*$ tal que $x^2 = \beta x$.

Seja $y = x^2$, temos que $L = span\{x, y\}$. Daí, pela identidade de Leibniz $y^2 = 0$. Ainda,

$$(xx)x = x(xx) + (xx)x \Leftrightarrow xy = 0.$$

Suponha que existem $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $yx = ax + by$. Daí,

$$(xy)x = (xx)y + x(yx) \Rightarrow yx = by.$$

Álgebra de Leibniz

Demonstração.

Temos, então, dois casos:

(i) Se $b = 0$, L é isomorfa à álgebra $A_3 = span\{x, y\}$ tal que $y^2 = xy = yx = 0$ e $x^2 = y$.

(ii) Se $b \neq 0$, daí, $L = span\{x, \hat{y}\}$, onde $\hat{y} = b^{-1}y$ é tal que $y^2 = x\hat{y} = 0$, $\hat{y}x = y$ e $x^2 = y$, é isomorfa à A_4.

$\square$

1. Álgebra de Lie
2. Álgebra de Leibniz
3. Álgebra de Jordan

Álgebra de Jordan

Definição

Dizemos que $\mathcal{J}$ é uma **álgebra de Jordan** se é uma álgebra comutativa e satisfaz que

$$(xy)x^2 = x(yx^2).$$

Suponha $\mathcal{J} = span\{e_1\}$ tal que $e_1e_1 = \alpha e_1$ com $\alpha \neq 0$. Verificamos que qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ satisfaz a propriedade $(xy)x^2 = x(yx^2)$.
Daí, dadas duas álgebras de Jordan $\mathcal{J} = \langle e_1 \rangle$ e $J = \langle m_1 \rangle$, com $J^2 \neq 0 \neq \mathcal{J}^2$ e produtos $e_1e_1 = \alpha e_1$ e $m_1m_1 = \beta m_1$, com $\alpha, \beta \neq 0$, elas são sempre isomorfas, basta tomar a mudança de base dada por $\hat{m}_1 = \frac{\alpha}{\beta} m_1$.

Álgebra de Jordan

Definição

Dizemos que $\mathcal{J}$ é uma **álgebra de Jordan** se é uma álgebra comutativa e satisfaz que

$$(xy)x^2 = x(yx^2).$$

Suponha $\mathcal{J} = span\{e_1\}$ tal que $e_1e_1 = \alpha e_1$ com $\alpha \neq 0$. Verificamos que qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ satisfaz a propriedade $(xy)x^2 = x(yx^2)$.
Daí, dadas duas álgebras de Jordan $\mathcal{J} = \langle e_1 \rangle$ e $J = \langle m_1 \rangle$, com $J^2 \neq 0 \neq \mathcal{J}^2$ e produtos $e_1e_1 = \alpha e_1$ e $m_1m_1 = \beta m_1$, com $\alpha, \beta \neq 0$, elas são sempre isomorfas, basta tomar a mudança de base dada por $\hat{m}_1 = \frac{\alpha}{\beta} m_1$.

Álgebra de Jordan

Lema

Seja $\mathcal{D}$ uma álgebra de Jordan sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2, tal que $\mathcal{D}^2 \neq 0$. Se $\{u, u^2\}$ é um conjunto linearmente dependente para todo $u \in \mathcal{D}$, então existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\psi : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ tal que

$$u^2 = \psi(u)u.$$

Álgebra de Jordan

Demosntração.

Seja u $\in \mathcal{D} - \{0\}$, temos que $\{u, u^2\}$ é L.D., tal que existe $\psi(u) \in \mathbb{K}$ satisfazendo $u^2 = \psi(u)u$. Defina $\psi(0) = 0$. Mostremos que $\mathcal{D} \to \mathbb{K}$ é homomorfismo.

a) Seja $u \in \mathcal{D}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Se $u = 0$ ou $\alpha = 0$, temos que $\psi(\alpha u) = \alpha\psi(u)$. Suponha $u \neq 0$ e $\alpha \neq 0$, daí

$$\psi(\alpha u)(\alpha u) = (\alpha u)^2 = \alpha^2 u^2 = \alpha^2 \psi(u) u,$$

logo

$$\psi(\alpha u) = \alpha\psi(u).$$

Álgebra de Jordan

Demosntração.

b) Sejam $u, v \in \mathcal{D}$.

(i) Se $\{u, v\}$ é L.D., então suponha, sem perda de generalidade, que $v \neq 0$. Temos que $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tal que $u = \alpha v$ e segue pelo item a) que $\psi(u+v) = \psi(u) + \psi(v)$.

(ii) Se $\{u, v\}$ é L.I., então $u + v \in \mathcal{D} - \{0\}$. Daí,

$$\psi(u+v)(u+v) = u^2 + 2uv + v^2 = \psi(u)u + 2uv + \psi(v)v$$

$$\psi(u-v)(u-v) = u^2 - 2uv + v^2 = \psi(u)u - 2uv + \psi(v)v$$

$$(\psi(u+v) + \psi(u-v))u + (\psi(u+v) - \psi(u-v))v = 2\psi(u)u + 2\psi(v)v$$

Demosntração.

Temos:

$$\begin{cases} \psi(u+v) + \psi(u-v) = 2\psi(u) \\ \psi(u+v) - \psi(u-v) = 2\psi(v). \end{cases}$$

Daí, como $char\mathbb{K} \neq 2$, temos que $\psi(u+v) = \psi(u) + \psi(v)$.

c) Resta mostrar que $\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$. Sejam $u, v \in \mathcal{D}$, temos que,

$$\psi(u)u + \psi(u)v + \psi(v)u + \psi(v)v = \psi(u+v)(u+v) = \psi(u)u + 2uv + \psi(v)v,$$

daí

$$2uv = \psi(u)v + \psi(v)u.$$

Álgebra de Jordan

Demonstração.

Daí, como $char\mathbb{K} \neq 2$, temos que

$$\psi(uv) = \psi(\frac{1}{2}(\psi(u)v + \psi(v)u)) = \frac{1}{2}(\psi(u)\psi(v) + \psi(v)\psi(u)).$$

Como $\mathcal{D}$ é Jordan, e em particular, comutativa, segue

$$\psi(uv) = \psi(u)\psi(v).$$

$\square$

Álgebra de Jordan

Teorema

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan bidimensional, sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2. Se $\mathcal{J}^2 \neq 0$, então $\mathcal{J}$ é isomorfa a uma das álgebras a seguir:

(i) $N = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_2$ e $e_2^2 = e_1e_2 = e_2e_1 = 0$;

(ii) $M = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_1$ e $e_2^2 = 0 = e_1e_2 = e_2e_1$;

(iii) $M_\lambda = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = \lambda e_1$ e $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$;

(iv) $D_2 = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = 0$ e $e_1e_2 = e_2e_1 = \frac{1}{2}e_2$.

Álgebra de Jordan

Demonstração.

Seja $\mathcal{J}$ álgebra de Jordan bidimensional tal que $\mathcal{J}^2 \neq 0$. Temos dois casos:

<u>Caso 1:</u> Suponha que $\{u, u^2\}$ é linearmente independente. Daí, $\mathcal{J} = span\{u, u^2\}$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que $u^3 = \alpha u^2 + \beta u$. Temos 3 casos:

(i) Se $\alpha = \beta = 0$, temos $u^3 = 0$. Daí, $\mathcal{J}$ é isomorfa a N.

(ii) Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$. Se $v = \alpha^{-1}u$, temos

$$v^3 = \alpha^{-3}u^3 = \alpha u^2 \alpha^{-3} = v^2.$$

Álgebra de Jordan

Demonstração.

Daí, $\mathcal{J} = span\{v, v^2\}$ faça a mudança de base onde $w_1 = v^2$ e $w_2 = v^2 - v$. Temos que $\mathcal{J} = span\{w_1, w_2\}$ e $\psi : \mathcal{J} \to M$ definida por $\psi(w_1) = e_1$ e $\psi(w_2) = e_2$ é isomorfismo.

(iii) Se $\beta \neq 0$, segue que $1 = -\alpha\beta^{-1}u + \beta^{-1}u^2$. Daí $\mathcal{J} = span\{1, u\}$. Se $w = u - \frac{\alpha}{2}1$ temos que $w^2 = \lambda 1$, onde $\lambda = \beta + \frac{\alpha^2}{4}$. Daí, $\mathcal{J} = span\{1, w\}$. Logo, $\phi : \mathcal{J} \to M_\lambda$ tal que $\phi(1) = e_1$ e $\phi(w) = e_2$ é isomorfismo.

Álgebra de Jordan

Demonstração.

Caso 2: Se $\{u, u^2\}$ é linearmente dependente, para todo $u \in \mathcal{J}$, pelo Lema existe único homomorfismo $\psi : \mathcal{J} \to \mathbb{K}$ tal que $u^2 = \psi(u)u$.
Note que $\psi \not\equiv 0$, pois $\mathcal{J}^2 \neq 0$. Daí, existe $v \in \mathcal{J}$ tal que $\psi(v) \neq 0$, então ψ é sobrejetora.
Mas como $dim(\mathcal{J}) > dim(\mathbb{K}) = 1$, temos que ψ não é injetora.

Logo, $Ker\psi \neq \{0\}$, daí existe $\hat{v} \in \mathcal{J}^*$ tal que $\psi(\hat{v}) = 0$. Ainda, como $\psi(v) \neq 0$, existe $u \in \mathcal{J}$ tal que $\psi(u) \neq 0$.
Seja $\hat{u} = \frac{1}{\psi(u)} u$. Note que $\hat{u}^2 = \hat{u}$.

Álgebra de Jordan

Demonstração.

Seja $\mathcal{J} = span\{\hat{u}, \hat{v}\}$. Note que $\hat{v}^2 = \psi(\hat{v})\hat{v} = 0$ temos

$$(\hat{u} + \hat{v})^2 = \hat{u}^2 + 2\hat{u}\hat{v} + \hat{v}^2 = \psi(\hat{u})\hat{u} + 2\hat{u}\hat{v}.$$

Por outro lado, como ψ é homomorfismo, segue que

$$(\hat{u} + \hat{v})^2 = (\hat{u} + \hat{v})\psi(\hat{u} + \hat{v}) = (\hat{u} + \hat{v})(\psi(\hat{u}) + \psi(\hat{v})).$$

Ainda

$$\psi(\hat{u}) = \psi(\frac{1}{\psi(u)}u) = \frac{1}{\psi(u)}\psi(u) = 1.$$

Álgebra de Jordan

Demonstração.

E como $\psi(\hat{v}) = 0$ e $char(\mathbb{K}) \neq 2$, temos que

$$\hat{u}\hat{v} = \frac{1}{2}\hat{v}.$$

Daí, $\phi : \mathcal{J} \to D_2$ tal que $\phi(\hat{u}) = e_1$ e $\phi(\hat{v}) = e_2$ é isomorfismo.
Note que N, M,M_λ e D_2 não são duas a duas isomorfas.
Vejamos quando M_λ e $M_{\lambda'}$ são isomorfas.

Álgebra de Jordan

Demonstração.

Seja $\varphi : M_\lambda \to M_{\lambda'}$ isomorfismo. Seja $u_\lambda = e_2$. Note que e_1 é a unidade de M_λ, daí $\varphi(e_1) = e_1^{'}$. Ainda, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ com $\beta \neq 0$ tais que

$$\varphi(\alpha e_1 + \beta e_2) = u_{\lambda'} = e_2^{'}.$$

Daí,

$$\varphi(\alpha e_1 + \beta e_2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2\lambda)\varphi(e_1) + 2\alpha\beta\varphi(e_2) = e_2^{\prime 2} = \lambda^{'}\varphi(e_1)$$

e temos que $\alpha = 0$ e $\beta^2\lambda = \lambda^{'}$.

$\square$

Referências

1. De Melo Júnior, A. F. Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a 3. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, UFBA, Salvador, 2017.
2. Diniz, D., Gonçalves, D. J., da Silva, V. R. T., Souza, M. Two-dimensional Jordan algebras: Their classification and polynomial identities. Linear Algebra and its Applications, 664, 104-125, 2023.

Obrigada!