Uma propriedade dos dodecágonos

Hanna Rezende

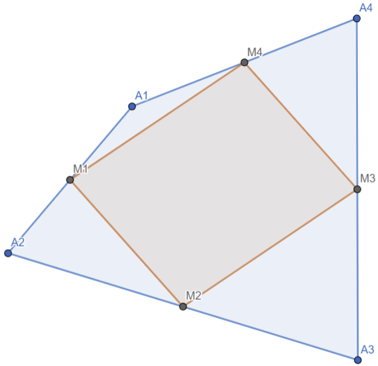
4 de julho de 2024

Introdução

Uma propriedade já conhecida na geometria plana diz que o quadrilátero com vértices nos pontos médios dos lados de um outro quadrilátero qualquer é, necessariamente, um paralelogramo.

Introdução

Dado o quadrilátero qualquer $A_1A_2A_3A_4$ vamos mostrar que $M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo.
Podemos considerar cada vértice do dodecágono como um ponto do plano cartesiano, em que $A_n = (x_{A_n}, y_{A_n})$.



Assim, temos que $M_1 = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, $M_2 = \dfrac{A_2 + A_3}{2}$, $M_3 = \dfrac{A_3 + A_4}{2}$ e $M_4 = \dfrac{A_4 + A_1}{2}$.
Nessa notação, $M_1 = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$ significa que
$x_{M_1} = \dfrac{x_{A_1} + x_{A_2}}{2}$ e $y_{M_1} = \dfrac{y_{A_1} + y_{A_2}}{2}$

Introdução

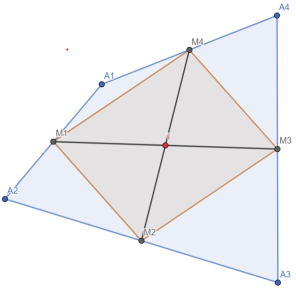
Vamos chamar de I e J os ponto médios dos segmentos M_1M_3 e M_2M_4, respectivamente.

- $I = \dfrac{M_1 + M_3}{2} = \dfrac{\frac{A_1+A_2}{2} + \frac{A_3+A_4}{2}}{2} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$
- $J = \dfrac{M_2 + M_4}{2} = \dfrac{\frac{A_2+A_3}{2} + \frac{A_4+A_1}{2}}{2} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$

Introdução

Vamos chamar de I e J os ponto médios dos segmentos M_1M_3 e M_2M_4, respectivamente.

- $I = \dfrac{M_1 + M_3}{2} = \dfrac{\frac{A_1+A_2}{2} + \frac{A_3+A_4}{2}}{2} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$
- $J = \dfrac{M_2 + M_4}{2} = \dfrac{\frac{A_2+A_3}{2} + \frac{A_4+A_1}{2}}{2} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$



$I = J$

Se as diagonais de um quadrilátero se encontram em seus pontos médios, esse quadrilátero é um paralelogramo.

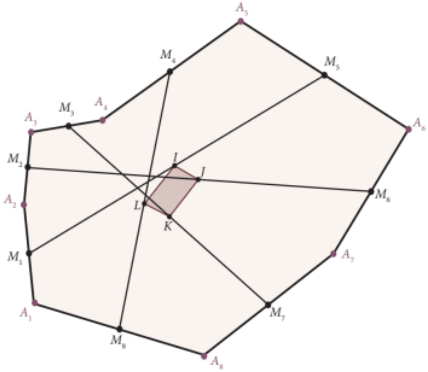
Logo, $M_1M_2M_3M_4$ é um paralelogramo.

Introdução - Uma propriedade dos octógonos

- Artigo de **Santos, Comby e Silva (2018)**, publicado na Revista do professor de Matemática.
- Tomar um octógono qualquer $A_1A_2A_3...A_8$ e definir M_1, M_2, ..., M_8 como os pontos médios dos lados A_1A_2, A_2A_3, ..., A_8A_1, respectivamente.
- Sendo I, J, K e L os pontos médios, respectivamente, dos ssegmentos M_1M_5, M_2M_6, M_3M_7 e M_4M_8, então o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo ou um polígono degenerado.

Introdução - Uma propriedade dos octógonos

- $M_1 = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, $M_2 = \dfrac{A_2 + A_3}{2}$, ..., $M_8 = \dfrac{A_8 + A_1}{2}$



Introdução - Uma propriedade dos octógonos

- $M_1 = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, $M_2 = \dfrac{A_2 + A_3}{2}$, ..., $M_8 = \dfrac{A_8 + A_1}{2}$
- $I = \dfrac{M_1 + M_5}{2} = \dfrac{\frac{A_1+A_2}{2} + \frac{A_5+A_6}{2}}{2} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6}{4}$
- $J = \dfrac{M_2 + M_6}{2} = \dfrac{\frac{A_2+A_3}{2} + \frac{A_6+A_7}{2}}{2} = \dfrac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7}{4}$
- $K = \dfrac{M_3 + M_7}{2} = \dfrac{\frac{A_3+A_4}{2} + \frac{A_7+A_8}{2}}{2} = \dfrac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8}{4}$
- $L = \dfrac{M_4 + M_8}{2} = \dfrac{\frac{A_4+A_5}{2} + \frac{A_8+A_1}{2}}{2} = \dfrac{A_1 + A_4 + A_5 + A_8}{4}$

Introdução - Uma propriedade dos octógonos

$\boxed{\text{Denotamos } |A - B| \text{ como o comprimento do segmento } AB}$

$\boxed{\text{Denotamos } |A - B| \text{ como o comprimento do segmento } AB}$

- $|I - J| = \left|\dfrac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6}{4} - \dfrac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7}{4}\right|$

  $\therefore |I - J| = \left|\dfrac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7}{4}\right|$

- $|L - K| = \left|\dfrac{A_1 + A_4 + A_5 + A_8}{4} - \dfrac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8}{4}\right|$

  $\therefore |L - K| = \left|\dfrac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7}{4}\right|$

Logo, os segmentos IJ e LK tem o mesmo comprimento.

Denotamos $|A - B|$ como o comprimento do segmento AB

- $$|I - L| = \left| \frac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6}{4} - \frac{A_1 + A_4 + A_5 + A_8}{4} \right|$$
  $$\therefore |I - L| = \left| \frac{A_2 - A_4 + A_6 - A_8}{4} \right|$$
- $$|J - K| = \left| \frac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7}{4} - \frac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8}{4} \right|$$
  $$\therefore |J - K| = \left| \frac{A_2 - A_4 + A_6 - A_8}{4} \right|$$

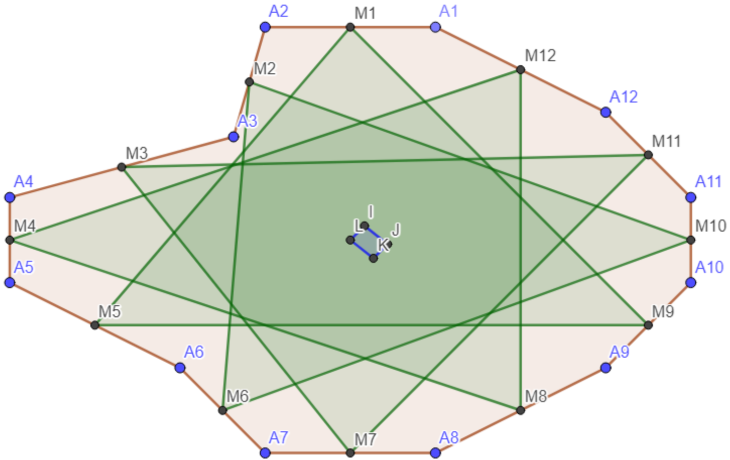
Logo, os segmentos IL e JK tem o mesmo comprimento.

$IJKL$ é um paralelogramo!

Resultado - Uma propriedade dos dodecágonos

- Tomar um dodecágono qualquer $A_1A_2A_3...A_{12}$ e definir M_1, M_2, ..., M_{12} como os pontos médios dos lados A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{12}A_1$, respectivamente.
- Sendo I, J, K e L os baricentros, respectivamente, dos triângulos $M_1M_5M_9$, $M_2M_6M_{10}$, $M_3M_7M_{11}$ e $M_4M_8M_{12}$, então o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo ou um polígono degenerado.

Resultado - Uma propriedade dos dodecágonos



Resultado - Uma propriedade dos dodecágonos

- Tomar um dodecágono qualquer $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ e definir M_1, M_2, ..., M_{12} como os pontos médios dos lados A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{12}A_1$, respectivamente.
- Sendo I, J, K e L os baricentros, respectivamente, dos triângulos $M_1M_5M_9$, $M_2M_6M_{10}$, $M_3M_7M_{11}$ e $M_4M_8M_{12}$, então o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo ou um polígono degenerado.

$$M_1 = \frac{A_1 + A_2}{2},\ M_2 = \frac{A_2 + A_3}{2},\ \ldots,\ M_{12} = \frac{A_{12} + A_1}{2}$$

Resultado - Uma propriedade dos dodecágonos

As coordenadas do barientro de um triângulo são dadas pela média aritmática das coordenadas dos vértices desse triângulo

- $I = \dfrac{M_1 + M_5 + M_9}{3} = \dfrac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{10}}{6}$
- $J = \dfrac{M_2 + M_6 + M_{10}}{3} = \dfrac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7 + A_{10} + A_{11}}{6}$
- $K = \dfrac{M_3 + M_7 + M_{11}}{3} = \dfrac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8 + A_{11} + A_{12}}{6}$
- $L = \dfrac{M_4 + M_8 + M_{12}}{3} = \dfrac{A_1 + A_4 + A_5 + A_8 + A_9 + A_{12}}{6}$

Resultado - Uma propriedade dos dodecágonos

- $|I - J| = \left| \frac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{10}}{6} - \frac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7 + A_{10} + A_{11}}{6} \right|$
  $\therefore |I - J| = \left| \frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 - A_{11}}{6} \right|$
- $|L - K| = \left| \frac{A_1 + A_4 + A_5 + A_8 + A_9 + A_{12}}{6} - \frac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8 + A_{11} + A_{12}}{6} \right|$
  $\therefore |L - K| = \left| \frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 - A_{11}}{6} \right|$
- $|I - L| = \left| \frac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{10}}{6} - \frac{A_1 + A_4 + A_5 + A_8 + A_9 + A_{12}}{6} \right|$
  $\therefore |I - L| = \left| \frac{A_2 - A_4 + A_6 - A_8 + A_{10} - A_{12}}{6} \right|$
- $|J - K| = \left| \frac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7 + A_{10} + A_{11}}{6} - \frac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8 + A_{11} + A_{12}}{6} \right|$
  $\therefore |J - K| = \left| \frac{A_2 - A_4 + A_6 - A_8 + A_{10} - A_{12}}{6} \right|$

Resultado - Uma propriedade dos dodecágonos

Logo, os segmentos IJ e LK tem o mesmo comprimento.
Assim, como os segmentos IL e JK também tem o mesmo comprimento.

Portanto, $IJKL$ é um paralelogramo!

Conclusão

- É válida uma propriedade semelhante para quadriláteros, octógonos e dodecágonos.
- A partir desse resultado, faremos uma investiagação sobre a validade dessa propriedade para outros polígonos com quantidade de lados múltipla de quatro.

Obrigada

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

INSTITUTO FEDERAL
Brasília
Campus Ceilândia

Hanna Rezende
Professora do Instituto Federal de Brasília
Aluna do PROFMAT-UnB
hanna.carolina@ifb.edu.br

PROFMAT

UnB