

# Interações entre Espécies via Equações Diferenciais Parciais: um modelo de Holling-Tanner

Profa. Dra. Graciele P. Silveira

Prof. Dr. Raphael de O. Garcia

DFQM/UFSCar - Campus Sorocaba; DCA/UNIFESP - Campus Osasco

São Carlos, 29 de julho de 2024

# Introdução

- Crescimento da industrialização e urbanização
- Ecossistemas em desequilíbrio
- Mudanças climáticas
- Modelagem Matemática
- Equações Diferenciais Parciais e Métodos Numéricos

# Objetivo

Investigar o impacto de termos advectivos e difusivos na dinâmica populacional de presas e predadores, descritos por um modelo do tipo Holling-Tanner [2], cujas populações estão distribuídas espacialmente em diferentes localidades.

# Modelo de Holling-Tanner

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla P_1 &= b_1 \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right) + P_1 (1 - P_1) - \frac{P_1}{a + P_1} P_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla P_2 &= b_2 \left( \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) - P_2 \left( d - b \frac{P_2}{P_1} \right) \end{cases} \quad (1)$$

# Modelo de Holling-Tanner

- $P_1 = P_1(x, y, t)$  é a distribuição da população de presas
- $P_2 = P_2(x, y, t)$  é a distribuição da população de predadores que se alimentam de  $P_1$  e se beneficiam do encontro entre  $P_1$  e  $P_2$  - representado por  $P_1 P_2$
- Os coeficientes advectivos  $\vec{u} = (u_x, u_y)$  e  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  descrevem, respectivamente, o deslocamento das populações no domínio espacial

# Modelo de Holling-Tanner

- Os coeficientes difusivos  $b_1$  e  $b_2$ , o espalhamento das populações
- A expressão  $-\frac{P_1}{a + P_1}P_2$  é a função resposta, a constante  $a$  refere-se a capacidade das presas evitarem o ataque dos predadores
- As constantes  $d$  e  $b$  interferem diretamente da dinâmica dos predadores

- Método de diferenças finitas avançado - derivada temporal
- Esquema de diferenças finitas centrado para o termo difusivo
- Método *Upwind* para o termo advectivo
- Linguagem *Python*

# Simulações e Resultados

- Domínio espacial  $(x, y) \in [0, 20] \times [0, 20]$ , com uma malha de  $60 \times 60$  subintervalos
- Domínio temporal  $t \in [0, 30]$ , com 600 subintervalos

As escolhas satisfazem os critérios de estabilidade de Courant, Friedrichs e Levy (CFL) e o critério do termo difusivo



Parâmetros adotados conforme [1]:

- $a = 0,5$ ,
- $b = d = 0,1$
- Um ponto de equilíbrio das populações é  $(P_1, P_2) = (0,5, 0,5)$
- Deslocamento das populações  $\vec{u} = (-0,1, -0,1)$ ,
- $\vec{v} = (0,2, 0,2)$
- Espalhamento  $b_1 = b_2 = 0,01$

# Simulações e Resultados

$P_1$  à esquerda e  $P_2$  à direita

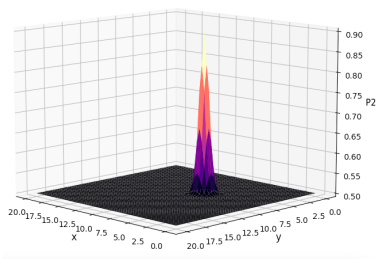
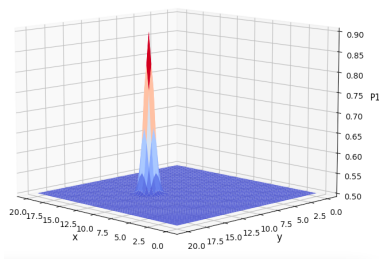


Figura: Condições Iniciais. Autoria própria.

# Simulações e Resultados

$P_1$  à esquerda e  $P_2$  à direita

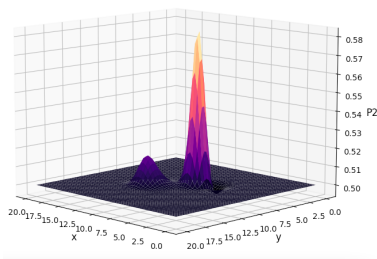
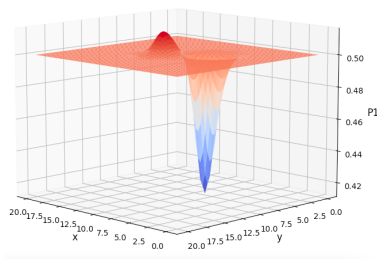


Figura: Evolução temporal  $t = 4$ . Autoria própria.

# Simulações e Resultados

$P_1$  à esquerda e  $P_2$  à direita

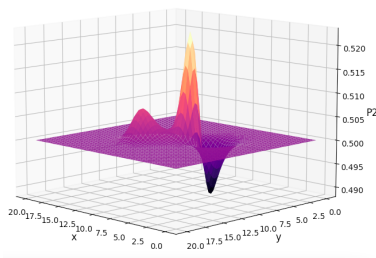
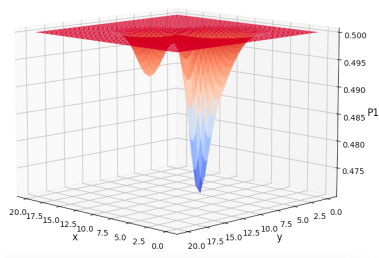


Figura: Evolução temporal  $t = 8$ . Autoria própria.

# Considerações Finais

- As simulações computacionais mostraram que pequenas perturbações nas populações iniciais das espécies causam desequilíbrios
- Os desequilíbrios se propagam pelo domínio
- Aquecimento global e mudanças climáticas afetam os ecossistemas como um todo

- [1] LIU, P.-P. An analysis of a predator–prey model with both diffusion and migration, **Math. Compt. Model.**, v. 51, p. 1064-1070, 2010.
- [2] MURRAY, J. D. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [3] THOMAS, J. W. **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995.