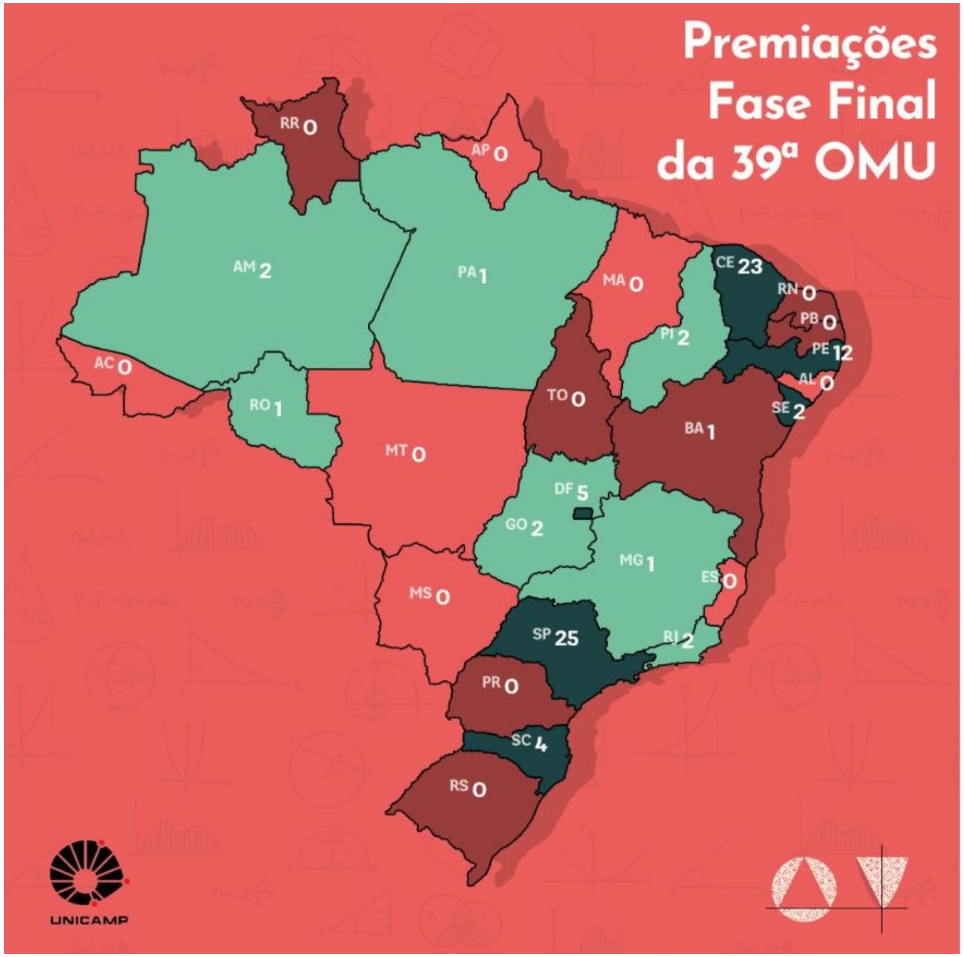
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DA UNICAMP

OMU

Evento Nacional



Participação em 2023:
9993 estudantes
25 estados

Premiação em 2023
83 equipes de 14
estados

Estrutura de participação na OMU

- Dois níveis:
  - 8º e º ano do Ensino Fundamental
  - Ensino Médio
- Equipes de 3 estudantes (e um professor responsável).

Estrutura de provas da OMU

- Duas fases a distância *(em equipe)*
  - Uma semana de duração
  - Com consulta
- Terceira fase presencial *(em equipe)*
  - Prova mais tradicional
  - Duração de 4 horas (2+2)
  - Sábado de manhã

Estrutura de provas da OMU

- Prova individual *(para Ensino Médio)*
  - Duração de 3 horas
  - Domingo de manhã

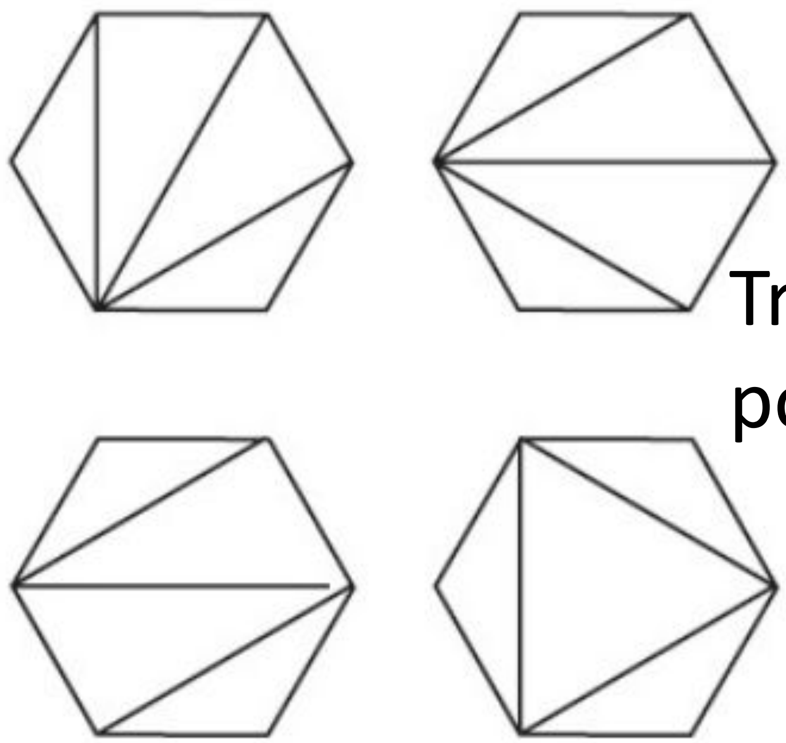
Estrutura de provas da OMU

- Prova individual *(para Ensino Médio)*
  - Duração de 3 horas
  - Domingo de manhã
  - **Permite acesso ao edital de Vagas Olímpicas da Unicamp.**

AS PROVAS EM EQUIPE, COM UMA SEMANA DE DURAÇÃO, É UMA PROPOSTA POTENTE, QUE PERMITE ALGUMAS ALTERNATIVAS PECULIARES, PRESENTES NAS PROVAS DA OMU.

Questões que abordam temas próximos a pesquisa contemporânea.

Uma **triangularização** do polígono consiste na divisão de $\mathcal{P}_n$ em n triângulos, acrescentando $n-1$ diagonais que não se interceptam. Na figura abaixo vemos 4 triangulações distintas de um hexágono.



Triangulação de polígonos

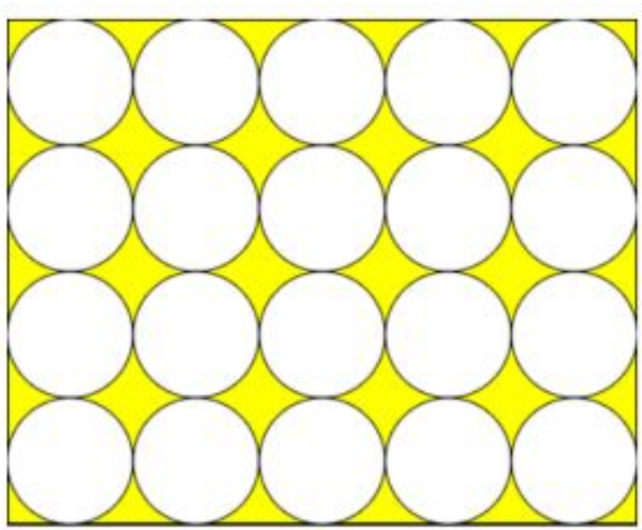
Figura 4: Algumas triangulações de um hexágono

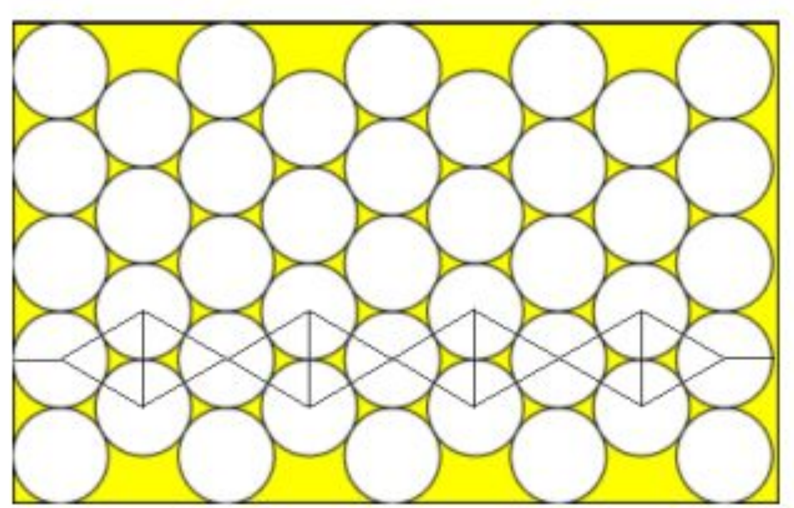
Questões que abordam temas próximos a pesquisa contemporânea.

O diâmetro do espaço de triangulações foi determinado por Sleator, Tarjan e Thurston, no trabalho *Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry*, publicado no J. Amer. Math. Soc. 1 (1988).... Vale destacar que W. Thurston ganhou a Medalha Fields em 1982 e R.E. Tarjan foi agraciado com o prêmio Turing em 1986, ...

GABARITO

Questões que abordam temas próximos a pesquisa contemporânea.





2ª fase, 2023, EM:

Empacotamento de esferas

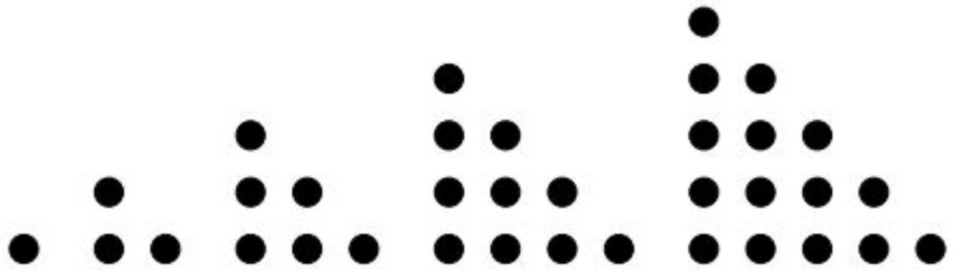
Questões que abordam temas próximos a pesquisa contemporânea.

Este exercício trata de uma instância particular de um dos mais importantes e difíceis problemas da matemática, o problema de empacotamento de esferas... É ainda um problema de pesquisa muito relevante e difícil. Uma das ganhadoras da Medalha Fields em 2022, a matemática Ucraniana Maryna S. Viazovska, deu uma contribuição significativa, resolvendo o problema em dimensão 8 e 24.

GABARITO

Questões com piso baixo ...

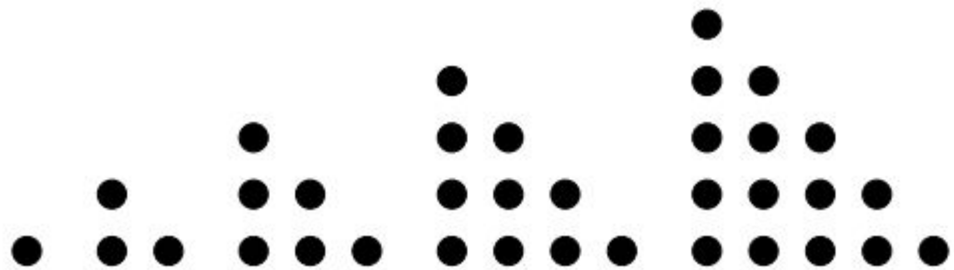
(a) Exprima t_n em termos de n. Mostre que a soma de dois números triangulares consecutivos é um número quadrado perfeito.



E teto alto!

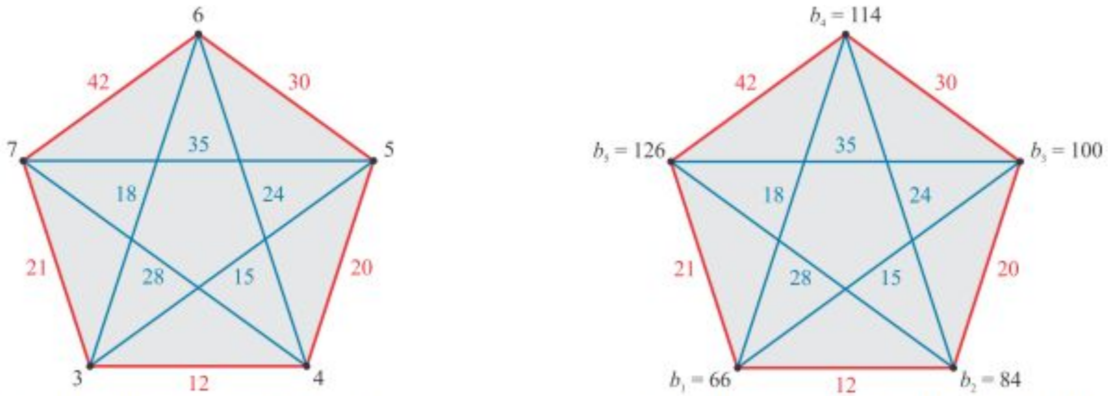
(d) Calcule a soma dos inversos $\dfrac{1}{t_n}$ de todos os números triangulares t_n:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}+\frac{1}{t_{n+1}}+\cdots.$$



Questões envolvendo determinar estratégias vencedoras de jogos

Questões que demandam estudo e consulta



(a) $A = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ (b) $B = 66 + 84 + 100 + 114 + 126 = 490$

Figura 2: Exemplo com pentágono

O valor que B assume depende de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mas o valor máximo que B pode assumir depende apenas da soma $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Qual o valor máximo que $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ pode assumir (dependendo de A)? Para quais valores de $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ocorre este máximo?

Observação: Para resolver esta pergunta, é necessário utilizar a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

Observação: Para resolver esta pergunta, é necessário utilizar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Questões que demandam estudo e consulta

- $d(X,Y) \geq 0$, para todo $X,Y \in \mathbb{R}^3$, e $d(X,Y) = 0$ se, e somente se, $X = Y$;
- $d(X,Y) = d(Y,X)$, para todo $X,Y \in \mathbb{R}^3$;
- $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ para todo $X,Y,Z \in \mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que a função d_2 definida no enunciado é uma métrica. Além disso, mostre que as funções d_∞ e d_1 definidas abaixo são métricas:

$$d_\infty(X,Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\},$$

$$d_1(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|,$$

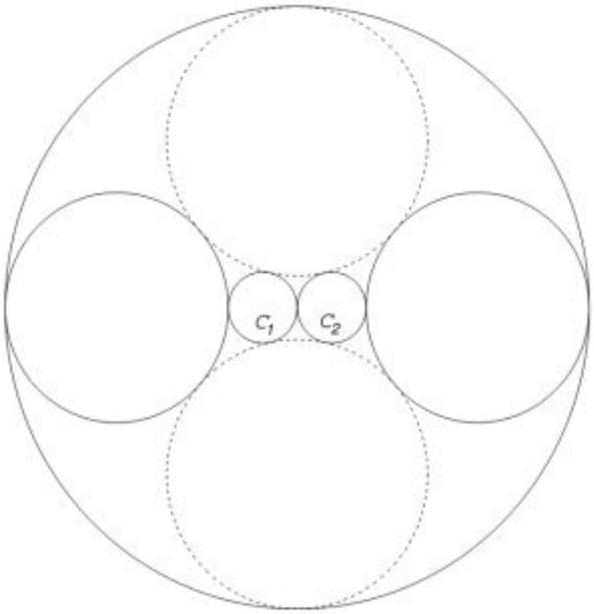
(b) Mostre que $d_\infty(X,Y) \leq d_2(X,Y) \leq d_1(X,Y)$, para todo $X,Y \in \mathbb{R}^3$.

Mostre que

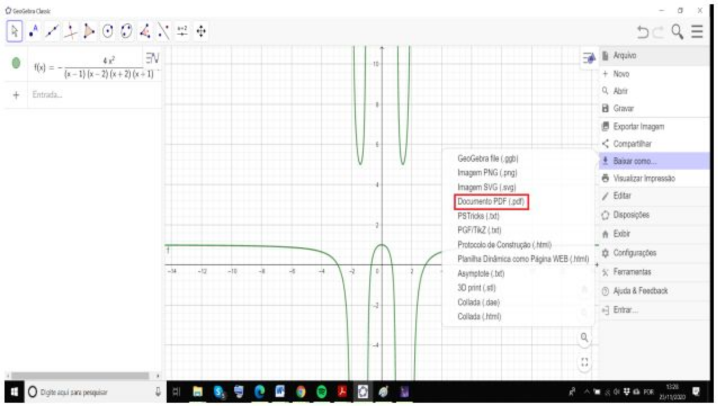
$$d_\infty(X,Y) \leq d_2(X,Y) \leq d_1(X,Y)$$

Utilização de softwares

a) Utilizando o Geogebra, verifique se a configuração acima é possível e se é única.



1. Para obter o arquivo PDF com a imagem feita, clique em "Baixar como" e em seguida em "Documento PDF", conforme ilustrado na imagem 1. Com isto você obterá um documento em formato PDF. Este documento deverá ser enviado ao professor, mas **não fará parte do caderno de respostas**.



Provas que dialogam entre si

Na segunda fase, vocês trabalharam uma operação de "*derivação*" denotada por Δ; dada uma função $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ qualquer, definimos uma função $\Delta f : N \to R$ por: $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. Agora, vamos definir uma nova função $\square f : N \to R, \square f(n) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1)$, se $n \geqslant 1$.

3. Na segunda fase, vocês trabalharam uma operação de "derivação" denotada por Δ; dada uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qualquer, definimos uma função $\Delta f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)\,.$$

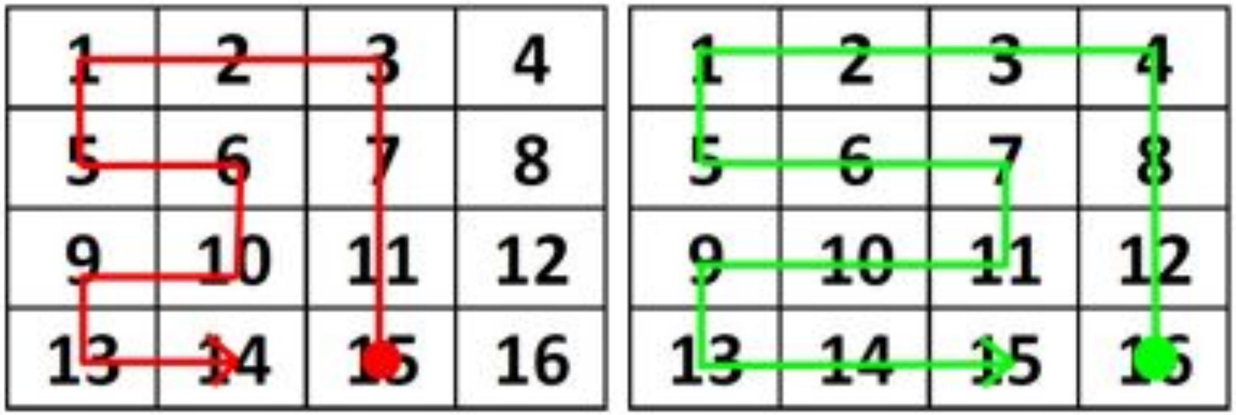
Agora, dada uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qualquer, vamos definir uma nova função $\square f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por:

$$\square f(0) = f(0), \text{ e}$$

$$\square f(n) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1), \text{ se } n \geqslant 1\,.$$

Observe que faz sentido calcular as funções $\square \Delta f$ e $\Delta \square f$.

Fazer conjecturas e justifica-las



Uncut Spaghetti

(e) Você consegue fazer e demonstrar alguma conjectura sobre as casas verdes e vermelhas? ... Enuncie e justifique alguma conjectura ligada a este jogo. Se possível, tente demonstrar.

Sabor de matemática aplicada

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Multiplicamos os dígitos das dezenas de A e B, obtendo o número $c = a_1 \times b_1$.

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Multiplicamos os dígitos da unidades de A e B, obtendo o número $u = a_2 \times b_2$.

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Somamos os dígitos de A, depois os dígitos de B e multiplicamos estas duas somas, obtendo $e = (a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2)$.

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Subtraímos deste último produto os produtos obtidos nos passos 1 e 2 e obtemos $d = e - u - c$.

$\boxed{\text{Passo 5}}$ Definimos o produto estrela de A e B como sendo o número que tem c centenas, d dezenas e u unidades, ou seja, $A \star B = (100 \times c) + (10 \times d) + u$.

Algoritmo de Karatsuba, 1960

(d) Mostre que, para A, B números de quatro algarismos, o produto estrela é o produto usual, ou seja, $A \star B = A \times B$.

e) Generalize a definição do produto estrela $A \star B$ para A, B dois números naturais quaisquer com $2n$ algarismos.

Correção das provas da OMU

- Banca de correção formada por pós-graduandos do IMECC.
- Acompanhamento das bancas por docentes do instituto.
- Duas primeiras fases: correção usando grade no computador, a distância.
- Fases presenciais: correção em papel, todos na mesma sala.

Qualidade de texto: prêmio de redação

- Correção comparativa, avaliando qualidade de redação: cada prova é comparada com outras dez provas.
- Acrescenta até 20% da nota.
- Damos também premiação específica.

Texto de alunos do Ensino Fundamental

b) Note que $x^2+4x-12 = (x+6)(x-2)$.

Então, $(x+6)(x-2) \equiv 0 \pmod{17}$. Como 17 é primo, então ou $(x+6) \equiv 0 \pmod{17}$ ou $(x-2) \equiv 0 \pmod{17}$.

1º CASO: Se $(x+6) \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv 17-6=11 \pmod{17}$.

Então, x é da forma $17k+11$. Note que $k \geq 0$, para x ser positivo.

x	11	28	45	62	79	96
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$

Note que $k<6$, para que $x \leq 100$. ($k \geq 6 \Rightarrow x \geq 113$)

2º CASO: Se $(x-2) \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{17}$.

Então, x é da forma $17k'+2$. Note que $k' \geq 0$, para x ser positivo.

x	2	19	36	53	70	87
	$k'=0$	$k'=1$				

Meu nome é M.F.P.J. Tenho 19 anos e participei da OMU em 2021, tendo ganhado 1 medalha de ouro pela competição em si, mais uma medalha de bronze pela qualidade da escrita.

Gostaria de compartilhar que fui aprovado para graduação nos EUA com bolsa 100% na Tufts University.

... A OMU teve seu papel na minha jornada. Esses resultados fizeram parte da minha aplicação. Sou morador de favela no Rio de Janeiro e o trabalho de vocês dez sua parte para contribuir para abrir para mim esta oportunidade tão preciosa...

Documentário sobre a 39ª OMU

Vídeo

OMU nas vagas olímpicas

Confira aqui as provas dos últimos anos!

Obrigado pela atenção!

Andrês R. Oliveira
Denílson Lopes M. Filho
Giuliano A. Zugliani
Marcelo Firer