O Problema de Sturm-Liouville: Introdução aos espaços de dimensão infinita

Gabriel Pruculi e Prucoli, Fabiana Maria Ferreira

Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal do Espírito Santo - Unidade de Alegre

Introdução

O problema a ser tratado é associado aos nomes dos matemáticos Jacques Charles François Sturm (1803 - 1855) e Joseph Liouville (1809 - 1882), e historicamente deu início a uma série de ideias que conduziram, no começo do século XX, ao surgimento da Análise Funcional.

Introdução

O problema a ser tratado é associado aos nomes dos matemáticos Jacques Charles François Sturm (1803 - 1855) e Joseph Liouville (1809 - 1882), e historicamente deu início a uma série de ideias que conduziram, no começo do século XX, ao surgimento da Análise Funcional.

O problema de Sturm-Liouville é um problema de valores de contorno que surgiu a partir do método de separação de variáveis para a resolução de algumas classes de equações diferenciais parciais, como a equação da onda, da corda vibrante, de calor e de Laplace.

O Problema de Sturm-Liouville

O problema consiste em equações diferenciais ordinárias da forma

$$[p(t)y']' - q(t)y + \lambda r(t)y = 0, \qquad (1)$$

onde p, q, r são funções reais, $p, r > 0, \quad p \in \mathcal{C}^1([a,b]), \quad q, r \in \mathcal{C}([a,b])$, e com as condições de fronteira

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0; \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \quad \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Pergunta

Para quais valores de λ a equação diferencial possui solução não-trivial?

Pergunta

Para quais valores de λ a equação diferencial possui solução não-trivial?

Conhecemos problemas semelhantes da Teoria de Matrizes e Operadores Lineares, como por exemplo o sistema álgébrico $Ax = \lambda x$. Nesse caso, aos valores de λ chamamos de autovalores, e para cada autovalor, a equação matricial possui soluções não-triviais, às quais damos o nome de autovetores.

O Operador de Sturm-Liouville

Definamos o operador diferencial linear $L : \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ de modo que:

$$L[y] = \frac{1}{r(t)}\Big((p(t)y')' - q(t)y\Big).$$

O Operador de Sturm-Liouville

Definamos o operador diferencial linear $L : \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ de modo que:

$$L[y] = \frac{1}{r(t)}\Big((p(t)y')' - q(t)y\Big).$$

Assim, a equação (1) pode ser reescrita como $L[y] = -\lambda y$.

O Operador de Sturm-Liouville

Definamos o operador diferencial linear $L : \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ de modo que:

$$L[y] = \frac{1}{r(t)}\Big((p(t)y')' - q(t)y\Big).$$

Assim, a equação (1) pode ser reescrita como $L[y] = -\lambda y$.

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** do Problema de Sturm-Liouville se a equação $L[y] = -\lambda y$ possui solução não-trivial que satisfaz às condições de fronteira. A solução $y = y(t)$ é chamada de **autofunção** associada ao autovalor λ.

O Teorema Espectral em Dimensão Finita

Teorema 1 (Teorema Espectral)

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) com produto interno e de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é autoadjunto, então existe uma base ortonormal de V cujos vetores são autovetores de T.

Prova: Ver Teorema 7.4.8 do Capítulo 7 de [3]. $\square$

Observação 1

Consideraremos o espaço vetorial $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) como sendo o espaço $\mathcal{C}([a,b])$ munido do produto interno com função peso $r(t)$, com $r(t)>0$, definido como $\langle f,g\rangle_r = \displaystyle\int_a^b r(t)f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$.

Proposição 1

O operador de Sturm-Liouville $L[y]$ é autoadjunto, isto é, $\langle L[y_1], y_2 \rangle = \langle y_1, L[y_2] \rangle$ para todo y_1, y_2 do conjunto de soluções do problema de Sturm-Liouville.

Proposição 1

O operador de Sturm-Liouville $L[y]$ é autoadjunto, isto é, $\langle L[y_1], y_2 \rangle = \langle y_1, L[y_2] \rangle$ para todo y_1, y_2 do conjunto de soluções do problema de Sturm-Liouville.

Teorema 2

Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais.

Proposição 1

O operador de Sturm-Liouville $L[y]$ é autoadjunto, isto é, $\langle L[y_1], y_2 \rangle = \langle y_1, L[y_2] \rangle$ para todo y_1, y_2 do conjunto de soluções do problema de Sturm-Liouville.

Teorema 2

Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais.

Teorema 3

Sejam λ_1 e λ_2 dois autovalores distintos do problema de Sturm-Liouville. Então as autofunções associadas a λ_1 e λ_2 são ortogonais entre si.

Teorema 4

Todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são simples, ou seja, o autoespaço associado à autofunção $y(t)$ tem dimensão um.

Teorema 4

Todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são simples, ou seja, o autoespaço associado à autofunção $y(t)$ tem dimensão um.

Prova: Suponha que λ é um autovalor de L e que y_1 e y_2 são duas autofunções de L associadas ao autovalor λ, ou seja,

$$\begin{cases} L[y_1] = -\lambda y_1 \\ L[y_2] = -\lambda y_2 \end{cases}$$

Teorema 4

Todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são simples, ou seja, o autoespaço associado à autofunção $y(t)$ tem dimensão um.

Prova: Suponha que λ é um autovalor de L e que y_1 e y_2 são duas autofunções de L associadas ao autovalor λ, ou seja,

$$\begin{cases} L[y_1] = -\lambda y_1 \\ L[y_2] = -\lambda y_2 \end{cases}$$

Multiplicando a linha de cima por y_2 e a de baixo por y_1 observamos que

$$y_2 L[y_1] - y_1 L[y_2] = 0,$$

Teorema 4

Todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são simples, ou seja, o autoespaço associado à autofunção $y(t)$ tem dimensão um.

Prova: Suponha que λ é um autovalor de L e que y_1 e y_2 são duas autofunções de L associadas ao autovalor λ, ou seja,

$$\begin{cases} L[y_1] = -\lambda y_1 \\ L[y_2] = -\lambda y_2 \end{cases}$$

Multiplicando a linha de cima por y_2 e a de baixo por y_1 observamos que

$$y_2 L[y_1] - y_1 L[y_2] = 0,$$

de forma que, usando a definição de L, temos

Teorema 4

Todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são simples, ou seja, o autoespaço associado à autofunção $y(t)$ tem dimensão um.

Prova: Suponha que λ é um autovalor de L e que y_1 e y_2 são duas autofunções de L associadas ao autovalor λ, ou seja,

$$\begin{cases} L[y_1] = -\lambda y_1 \\ L[y_2] = -\lambda y_2 \end{cases}$$

Multiplicando a linha de cima por y_2 e a de baixo por y_1 observamos que

$$y_2 L[y_1] - y_1 L[y_2] = 0,$$

de forma que, usando a definição de L, temos

$$y_2 \left(\frac{1}{r(t)} \left((p(t)y_1')' + q(t)y_1 \right) \right) - y_1 \left(\frac{1}{r(t)} \left((p(t)y_2')' + q(t)y_2 \right) \right) = 0$$

É fácil ver então que

$$y_2\big(p(t)y_1'\big)' - y_1\big(p(t)y_2'\big)' = 0$$

ou, de forma equivalente, que

$$\big(p(t)\,(y_2y_1' - y_1y_2')\,\big)' = 0.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo temos,

$$p(t)\,(y_2y_1' - y_1y_2') = c,$$

para $c \in \mathbb{R}$.

O termo $y_2y_1' - y_1y_2'$ é o oposto do determinante da matriz wronskiana W de y_1 e y_2,

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

De fato, aplicando as condições de fronteira, temos que para duas autofunções y_1 e y_2 do Problema de Sturm-Liouville vale, em particular, que $\det W[y_1, y_2](a) = 0$ (vide [1]). Assim,

$$p(t) \det W[y_1, y_2](t) = -c.$$

Fazendo $t = a$ encontramos que $c = 0$. Como $p(t)$ é sempre não nula, concluímos que

$$\det W[y_1, y_2](t) = 0$$

para todo $t \in [a, b]$.

De nossos estudos em EDO, sabemos que o determinante wronskiano de duas soluções ser nulo implica a dependência linear das soluções, ou seja, que y_1 é múltiplo de y_2, o que completa a demonstração. $\square$

Algumas das principais propriedades do problema de Sturm-Liouville estão listadas no próximo teorema, que está demonstrado no capítulo IV em [4].

Teorema 5

Considere o problema de Sturm-Liouville expresso em (1) com condições de fronteira (2). Então:
a) Os autovalores do problema formam uma sequência infinita e crescente $\{\lambda_n\}$ de números reais tais que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$;
b) Os autovalores do problema formam um conjunto enumerável;
c) A sequência de autofunções $\{y_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$.

Teorema Espectral

Com esses resultados, podemos apresentar um dos mais belos teoremas da Matemática, desta vez generalizado para a dimensão infinita: o Teorema Espectral.

Teorema 6 (Teorema Espectral)

Seja E um espaço vetorial com produto interno e A um operador autoadjunto e compacto. Então, existe uma sequência $\{\lambda_n\} \in \mathbb{R}$ (finita ou infinita) de autovalores não-nulos de A e uma sequência $\{y_n\}$ de autovetores correspondentes que formam uma base ortonormal de E.

Prova

Como o operador é autoadjunto e compacto, segue que possui pelo menos um autovetor, que por sua vez pode ser normalizado (vide Teorema 3.7 do capítulo III de [4]).

Prova

Como o operador é autoadjunto e compacto, segue que possui pelo menos um autovetor, que por sua vez pode ser normalizado (vide Teorema 3.7 do capítulo III de [4]). Indiquemos por λ_1 e y_1 o autovalor e o autovetor unitário correspondente, e façamos $E_1 = E$ e $A_1 = A$.

Prova

Como o operador é autoadjunto e compacto, segue que possui pelo menos um autovetor, que por sua vez pode ser normalizado (vide Teorema 3.7 do capítulo III de [4]). Indiquemos por λ_1 e y_1 o autovalor e o autovetor unitário correspondente, e façamos $E_1 = E$ e $A_1 = A$. Daí, $|\lambda_1| = \|A_1\|$ e $E_2 = \{y_1\}^{\perp}$ é um subespaço de E_1 invariante por A_1.

Prova

Como o operador é autoadjunto e compacto, segue que possui pelo menos um autovetor, que por sua vez pode ser normalizado (vide Teorema 3.7 do capítulo III de [4]). Indiquemos por λ_1 e y_1 o autovalor e o autovetor unitário correspondente, e façamos $E_1 = E$ e $A_1 = A$. Daí, $|\lambda_1| = \|A_1\|$ e $E_2 = \{y_1\}^{\perp}$ é um subespaço de E_1 invariante por A_1. A restrição A_2 de A_1 a E_2 é também um operador autoadjunto e compacto, e novamente pelo primeiro resultado existem um autovalor λ_2 e um autovetor unitário correspondente y_2 de A_2 tal que $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$.

Repetindo este processo obtemos sucessivamente autovalores não nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, com $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$, e autovetores correspondentes $y_1, \ldots, y_n$ formando um sistema ortonormal, subespaços $E_2, E_3, \ldots, E_{n+1}$ onde E_{i+1} indica o subespaço de E formado pelos vetores ortogonais a $y_1, \ldots, y_i$, com $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{i+1}$.

Repetindo este processo obtemos sucessivamente autovalores não nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, com $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$, e autovetores correspondentes $y_1, \ldots, y_n$ formando um sistema ortonormal, subespaços $E_2, E_3, \ldots, E_{n+1}$ onde E_{i+1} indica o subespaço de E formado pelos vetores ortogonais a $y_1, \ldots, y_i$, com $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{i+1}$. Se para todo inteiro natural n a restrição A_{n+1} de A a E_{n+1} for sempre não nula, então o processo acima nos dá uma sequência infinita $\{\lambda_n\}$ de autovalores não nulos de A com $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots$ e um sistema ortonormal $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formado pelos autovetores correspondentes. $\square$

Referências Bibliográficas

- BORTOLATTO, R. B. **Equações com Derivadas Parciais:** *conceitos fundamentais.* 1. ed. São Paulo: EdUSP, 2023. 440p.
- CAVALHEIRO, A. C. *Minicurso:* **O Problema de Sturm-Liouville.** II Colóquio de Matemática da Região Sul, Universidade Estadual de Londrina, 2012.
- COELHO, F. U; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed.São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2020. 261p.
- HONIG, C. S. **Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville.** São Paulo: EdUSP, 1978, 178p.