

# Análise Geométrica de Sistemas Bidimensionais de Equações Diferenciais

Érik Feitosa Barbosa  
Fabiana Maria Ferreira  
Gabriel Lavagnoli

Universidade Federal do Espírito Santo  
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Julho 2024

- Diagrama de fase e órbitas;
- Pontos de equilíbrio ou Singularidades;
- Linearização;
- Teorema de Hartman-Grobman.

Neste trabalho, foram realizadas construções utilizando o *software GeoGebra* com o objetivo de auxiliar na visualização e interpretação geométrica dos sistemas de equações. Todas as construções estão disponíveis no perfil do GEEDs (Grupo de Estudos de Equações Diferenciais).

**Escaneie para ter acesso às construções**



# Introdução

- Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) iniciaram o estudo das equações diferenciais ordinárias no final do século XVII;
- Métodos gerais de resolução explícita para todas as equações diferenciais;
- Henri Poincaré (1854-1912) revitalizou o modo de se lidar com equações diferenciais não lineares;
- Novos métodos de resolução e Teoria de Existência e Unicidade;
- Teoria qualitativa.

# Sistemas Lineares Bidimensionais

Um sistema linear bidimensional de equações diferenciais de primeira ordem é um sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + e(t), \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + h(t). \end{cases} \quad (1)$$

Um sistema linear autônomo homogêneo com coeficientes constantes é da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (2)$$

# Análise Qualitativa

A análise qualitativa para equações de primeira ordem pode ser estendida a sistemas de equações, sofrendo apenas algumas adaptações.

- Diagrama de fase (Plano de fase);
- Órbitas são os conjuntos  $\{(x(t), y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ;
- Pontos de equilíbrio: Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (3)$$

Os pontos de equilíbrio são dados pelas soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Note que podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \quad (5)$$

em sua forma matricial:

$$X' = AX. \quad (6)$$

Onde:  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

# Autovalores e Autovetores

No caso de uma equação escalar

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (7)$$

a solução geral é  $x(t) = Ce^{at}$ .

Vamos verificar se  $X = Ke^{\lambda t}$  pode ser uma solução do sistema:

$$X' = AX.$$

Note que  $X' = K\lambda e^{\lambda t}$ , logo

$$K\lambda e^{\lambda t} = AK e^{\lambda t} \Rightarrow AK = \lambda K$$

# Diagonalização

Considere o sistema

$$X' = AX \tag{8}$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dizemos que  $A$  é diagonalizável se existe  $P$  invertível tal que

$$P^{-1}AP = D, \tag{9}$$

onde  $D$  é uma matriz diagonal.

Se  $A$  é uma matriz diagonalizável, então seus autovalores serão os elementos da matriz  $D$  e seus autovetores serão os vetores coluna da matriz  $P$ .

# Diagonalização

Por meio da matriz  $P$ , e definindo uma nova variável dependente  $Y$  pela relação

$$X = PY,$$

temos, da equação  $X' = AX$ ,

$$PY' = APY.$$

Multiplicando ambos os lados por  $P^{-1}$ , obtemos

$$Y' = (P^{-1}AP)Y,$$

logo,

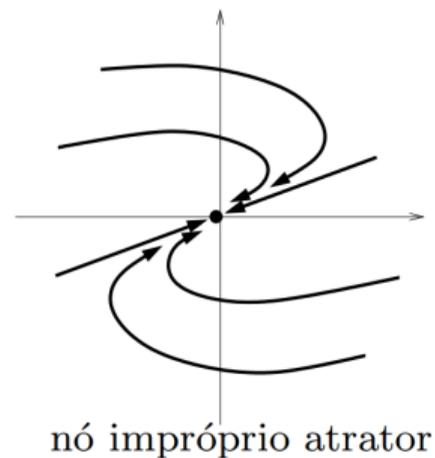
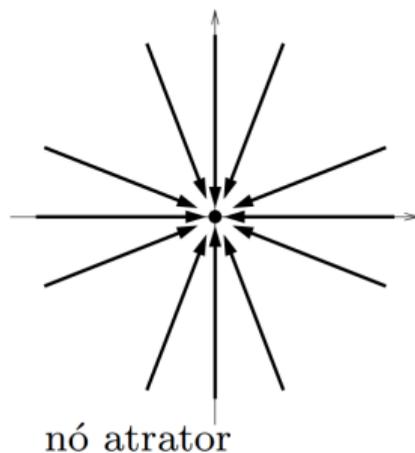
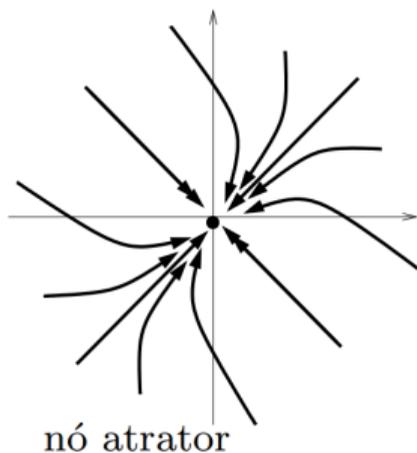
$$Y' = DY.$$

# Sistemas Lineares Bidimensionais

- Sistemas Lineares Diagonalizáveis com Autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais;
- Sistemas Lineares com Autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  complexos;
- Sistemas Lineares Não-Diagonalizáveis com Autovalores reais iguais.

# Classificação de Sistemas Lineares

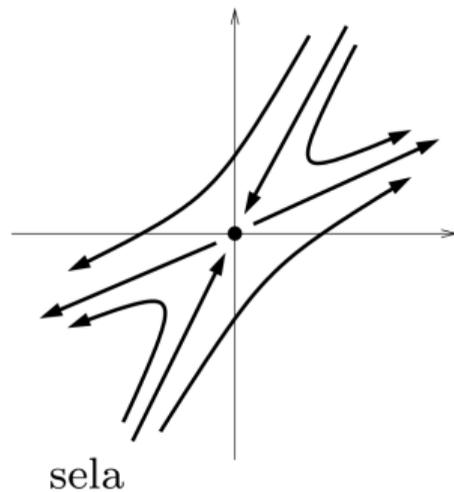
Figura: Diagramas de fase de sistemas lineares cujas origens são nós.



**Fonte:** Rosa, 2023.

# Classificação de Sistemas Lineares

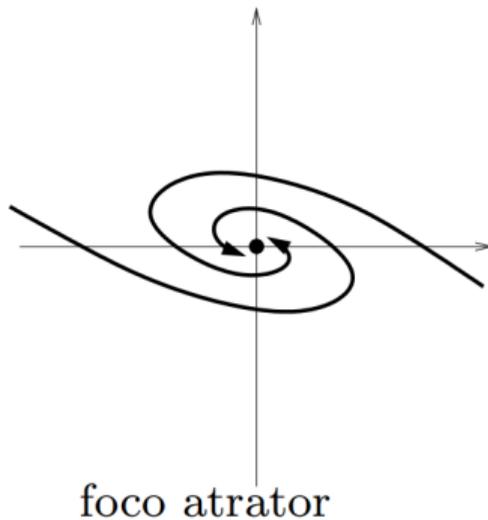
Figura: Diagrama de fase de um sistema linear cuja origem é um ponto fixo de sela.



**Fonte:** Rosa, 2023.

# Classificação de Sistemas Lineares

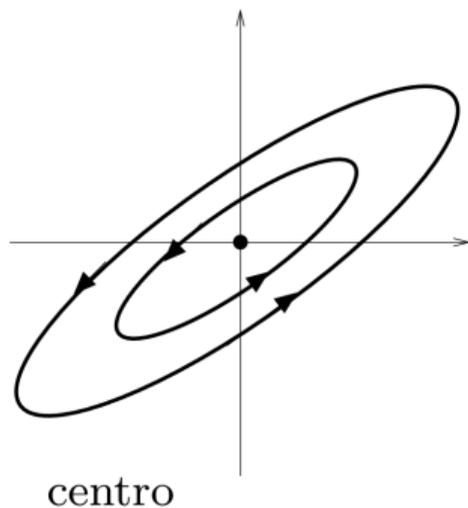
Figura: Diagrama de fase de um sistema linear cuja origem é um foco.



**Fonte:** Rosa, 2023.

# Classificação de Sistemas Lineares

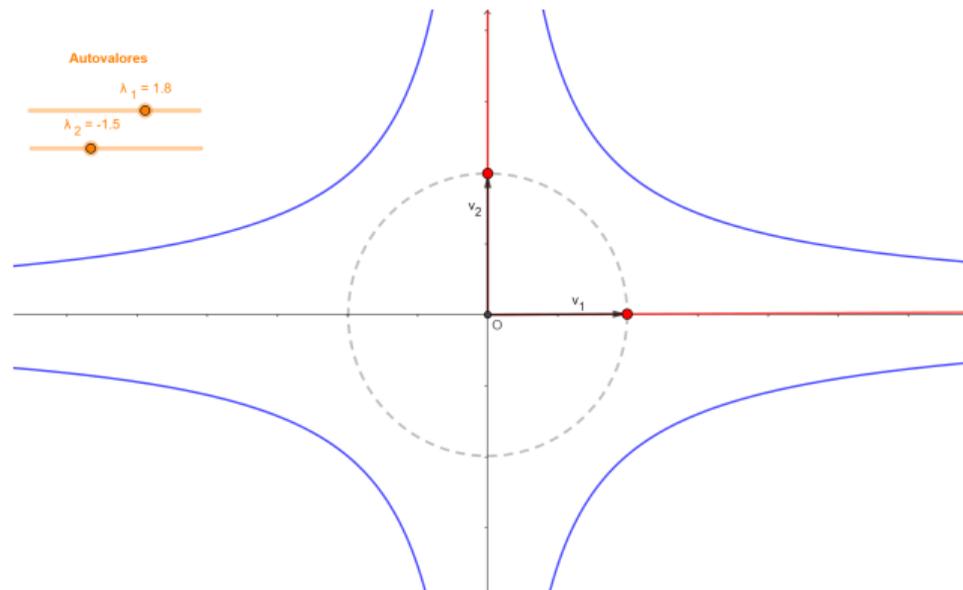
Figura: Diagrama de fase de um sistema linear cuja origem é um ponto fixo de centro.



**Fonte:** Rosa, 2023.

# Sistemas Lineares Diagonalizáveis com Autovalores reais

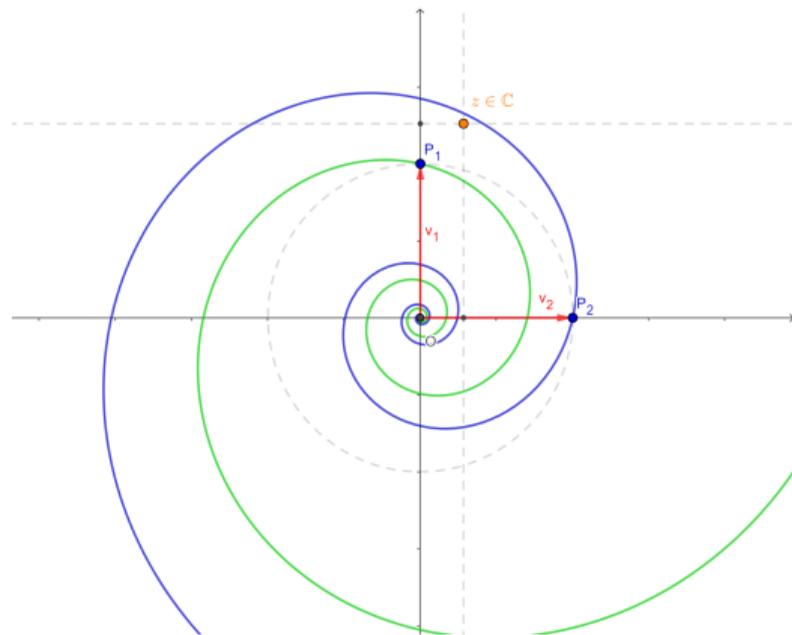
Figura: Diagrama de fase no caso de sistemas lineares diagonalizáveis com autovalores reais de sinais opostos.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/udgbcksr>

# Sistemas Lineares com Autovalores complexos

Figura: Diagrama de fase de um sistema linear com autovalores complexos no caso em que  $\alpha, \beta > 0$ .



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/vmnktam5>

# Sistemas Bidimensionais Não-Lineares

Um Sistema Bidimensional de equações não-lineares autônomas é da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases} \quad (10)$$

- Comportamento Global;
- Comportamento Local.

# Linearização

Considere um ponto fixo  $P^* = (x^*, y^*)$  de um sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases}$$

Neste caso, temos

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0, \\ g(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

Fazendo a expansão em série de Taylor de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  em torno de  $P^* = (x^*, y^*)$ , temos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) + O(2), \\ g(x, y) &= g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) + O(2). \end{aligned}$$

# Linearização

$$f(x, y) \approx f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*),$$
$$g(x, y) \approx g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*).$$

Para analisar uma vizinhança do ponto fixo, faremos uma translação a fim de colocar a origem no ponto fixo. Considere o novo sistema de coordenadas  $XY$  dado por

$$X = x - x^*, Y = y - y^*.$$

Portanto, cada solução  $(x(t), y(t))$  pode ser representada nas novas coordenadas por

$$X(t) = x(t) - x^*, Y(t) = y(t) - y^*.$$

# Linearização

Note que,

$$X'(t) = x'(t) = f(x, y) \approx f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) = f_x(x^*, y^*)X + f_y(x^*, y^*)Y$$

$$Y'(t) = y'(t) = g(x, y) \approx g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) = g_x(x^*, y^*)X + g_y(x^*, y^*)Y$$

Assim, vemos que  $(X(t), Y(t))$  satisfaz aproximadamente o sistema

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (11)$$

A análise via linearização só é justificada quando a matriz de linearização não possui autovalores reais nulos nem autovalores complexos com parte real nula (Pontos Fixos Hiperbólicos).

# Teorema de Hartman-Grobman

Seja  $X^* = (x^*, y^*)$  um ponto de equilíbrio do sistema não-linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases}$$

Se as condições abaixo forem satisfeitas, então, o retrato de fase do sistema acima, localmente em torno de  $X^*$ , é equivalente ao retrato de fase do sistema linearizado em  $X^*$ , dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases}$$

onde

$$a = f_x(x^*, y^*), b = f_y(x^*, y^*), c = g_x(x^*, y^*), d = g_y(x^*, y^*).$$

# Teorema de Hartman-Grobman

Em sua forma matricial, o sistema linearizado é dado por  $X' = AX$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

As condições sob as quais o Teorema se aplica são:

- O determinante de  $A$  deve ser diferente de zero;
- Cada autovalor de  $A$  deve possuir parte real não nula.

## Exemplo - Coelhos versus Ovelhas

Suponha que uma população de coelhos e uma população de ovelhas estejam competindo pelo mesmo suprimento de alimentos e a quantidade disponível seja limitada. Serão ignoradas outras situações como predadores e outras fontes de alimentos. Segue abaixo o modelo que descreve esta situação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(3 - x - 2y), \\ \frac{dy}{dt} = y(2 - x - y), \end{cases} \quad (12)$$

onde  $x(t)$  e  $y(t)$  representam as populações de coelhos e ovelhas respectivamente. Note que,

$$A = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Pontos Fixos:  $(0, 0)$ ;  $(0, 2)$ ;  $(0, 3)$ ;  $(1, 1)$ .

## Exemplo - Coelhos versus Ovelhas

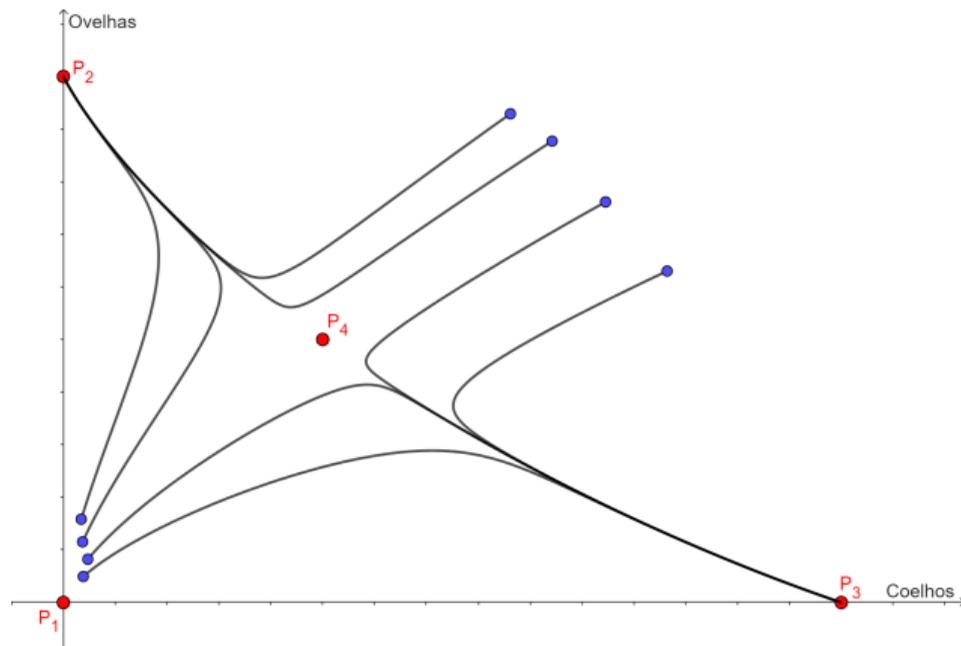
Para o ponto fixo  $(0, 0)$ , temos que,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores são 3 e 2 e os autovetores são  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  respectivamente, portanto  $(0, 0)$  é um nó instável.

# Exemplo - Coelhos versus Ovelhas

Figura: Diagrama de fase do sistema bidimensional não-linear 12.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/avdepynt>

# Considerações Finais

O estudo qualitativo dos sistemas de equações diferenciais interligado com recursos computacionais, auxilia na análise e compreensão deste campo da matemática. O conteúdo abordado neste trabalho é uma introdução ao estudo de Sistemas Dinâmicos.

# Referências bibliográficas

DE FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA,2007.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 3 ed. São Paulo: Editora Livraria sa Física, 2011.

ROSA, R. M. S. **Equações Diferenciais**. IM: UFRJ, 2022. Disponível em: <https://rmsrosa.github.io/assets/material/apostila-ed-ago2022.pdf>. Acesso em: 01 jul. 2023.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, and engineering**. CRC press, 2018