Diferentes noções de produto desenvolvidas ao longo da História da Matemática

Os casos de Graßmann e de Hamilton

Débora Ferreira e Gert Schubring
UFRJ

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Estrutura da apresentação

- Contexto
- A comutatividade da multiplicação.
- Hamilton e os quatérnios.
- Graßmann e as quantidades extensivas.
- Seus desdobramentos.

Contexto

- Início do século XIX.
- Novos tipos de multiplicação foram desenvolvidas por matemáticos, entre eles: Graßmann e Hamilton.
- Fatores: novos tipos de quantidades.
- Alguns desses produtos não possuíam todas as propriedades da multiplicação usual.

A comutatividade da multiplicação

- *a* x *b* = *b* x *a*.
- Paradigma consolidado (até o início do século XIX): as propriedades observadas nas operações aritméticas com números reais deveriam continuar válidas para todo o caso. Entre elas, a comutatividade.
- Arnauld (1612-1694) fez referência à propriedade comutativa da multiplicação na forma de axioma em 1667; e Legendre (1752-1833) a demonstrou, para o produto entre números, no *Essai sur la Théorie des Nombres* de 1798.
- Desenvolver uma álgebra com multiplicação não comutativa quebraria esse modelo de pensamento!

William Rowan Hamilton

- Matemático irlandês (1805-1865).
- Criança prodígio.
- 1826: Tornou-se professor de astronomia no Trinity College e Astrônomo Real da Irlanda.
- 1835: *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*.

Number couples:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

$$\text{e} \quad (x, y) \times (a, b) = (xa - yb, xb + ya).$$

Busca por *triplets*

- Números associados ao espaço tridimensional do tipo

$$a + bi + cj.$$

- Vislumbrava muitas aplicações práticas.
- Porém, encontrou obstáculos algébricos.

A criação dos quatérnios

- 16 de outubro de 1843.
- Números da forma

$$a + bi + cj + dk.$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j;$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Multiplicação de quatérnios

- Dados os quatérnios $Q = w + ix + jy + kz$ e $Q' = w' + ix' + jy' + kz$,

$$\begin{gathered} QQ' = ww' - xx' - yy' - zz' \\ i\,(wx' + xw' + yz' - zy') \\ j\,(wy' - xz' + yw'\; zx') \\ k\,(wz' + xy' - yx' + zw'). \end{gathered}$$

- Se $w = w' = 0$, o produto de quatérnios resulta no (oposto do) produto interno somado ao produto vetorial.

Hermann Graßmann

- Matemático alemão Graßmann (1809-1877).
- Escritos a partir de 1840.
- Principal obra: *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*, de 1844 (A_1).
- Reescrita em 1862, em um formato mais tradicional para os matemáticos da época (A_2).

A teoria da extensão

- Muitas ideias da Álgebra Linear já estavam presentes na *Ausdehnungslehre* de Graßmann.
- A partir de inspirações geométricas – Graßmann realizou uma “transposição” das operações aritméticas para operações geométricas – o matemático desenvolveu uma álgebra em *n* dimensões.
- Multiplicações entre as *quantidades extensivas*, “combinações lineares” de *unidades relativas.* Estas últimas seriam unidades básicas, de qualquer natureza, “linearmente independentes”.

Os vários tipos de multiplicação de Graßmann

- Quantidade extensiva: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$
- Sistema de unidades: $e_1, e_2, \ldots e_n$
- Define-se os produtos $e_r e_s$. A partir deles e da distributividade da multiplicação em relação à soma, tem-se e o produto de duas quantidades extensivas.
- Entre as multiplicações estabelecidas por Graßmann estão:
- “Produto interno”;
- Algo parecido com o “produto vetorial”.

Os vários tipos de multiplicação de Graßmann

	Theorie der Ebbe und Flut	A1	*Geometrische Analyse*	Jornal de Crelle	A2
	1840	1844	1847	1855	1862
Produto interno	Sim, *lineären Produkt.*	Sim, no prefácio.	Sim, em detalhe (*innere Produkt*).	Sim, um dos produtos circulares.	Sim.
Produto externo	Sim, *geometrischen Produkt.*	Sim, *äussere Multiplikation.*	Sim, *äussere Produkt.*	Sim, um dos produtos lineales.	Sim, um dos produtos combinatórios.
Produto regressivo	Não.	Sim, *eingewandtes Produkt.*	Não.	Não.	Sim, um dos produtos combinatórios.
Produto entre *Strecke* e ângulo	Sim.	Não.	Não.	Não.	Não.
Produto complexo	Não.	Não.	Não.	Sim, um dos produtos circulares.	Não.
Produto algébrico	Não.	Não.	Não.	Sim, um dos produtos lineales.	Sim.
Produtos simétricos	Não.	Não.	Não.	Sim.	Não.
Produtos circulares	Não.	Não.	Não.	Sim.	Não.
Produtos lineales	Não.	Não.	Não.	Sim.	Não.
Produtos combinatórios	Não.	Não.	Não.	Não.	Sim.

As biografias principais

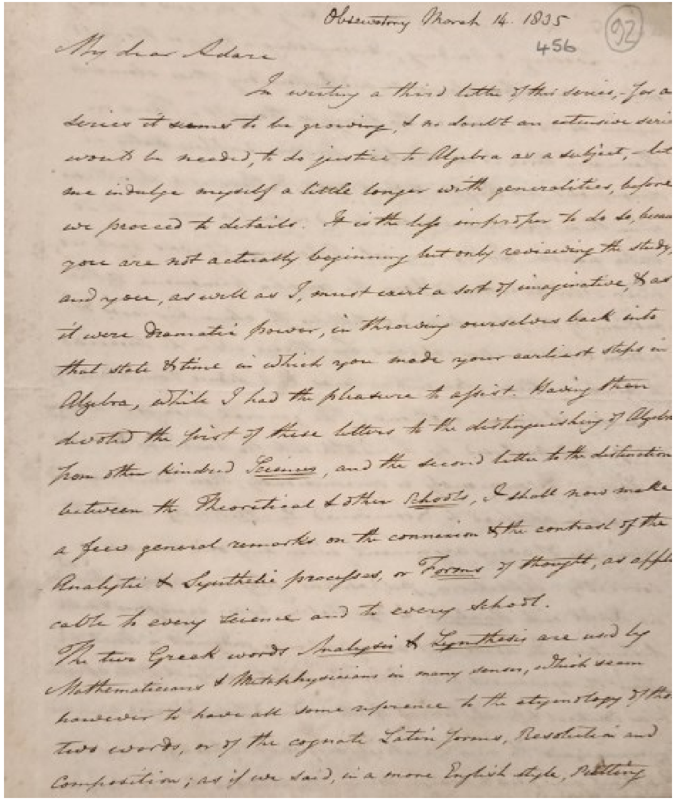
- Graßmann

  Duas biografias: Schlegel (1878) e Engel (1911).
- Hamilton

  Também duas biografias: Graves (em três volumes: 1882, 1885 e 1889) e Hankins (1980).
- Há transcrições de uma grande quantidade de cartas remetidas por ou destinadas a Hamilton. A ausência de trechos nos motivou a buscar os originais.

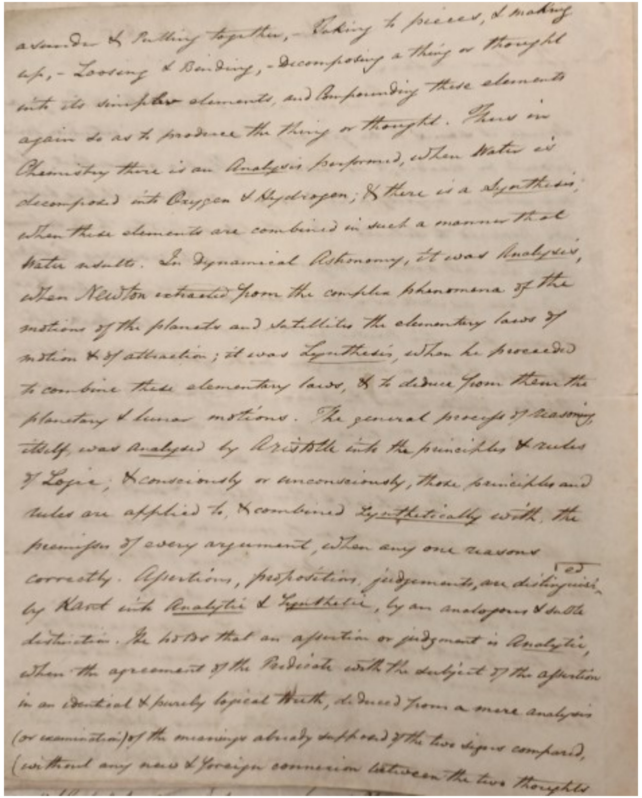
Acesso aos documentos

- Seção de manuscritos do Trinity College Dublin.
- Arquivos acessados: coleções MSS 1492, MSS 2172-3, MSS 7243-46 e MSS 7762-76.
- Várias cartas não transcritas em Hamilton.
- O assunto dessas cartas é variado, sendo algumas de cunho pessoal e outras relativas à vida profissional do matemático.



Observatory March 14. 1835
456
92

My dear Adare
In writing a third letter of this series, – for a
series it seems to be growing, & no doubt an extensive series
would be needed, to do justice to Algebra as a subject, – let
me indulge myself a little longer with generalities, before
we proceed to details. It is the less improper to do so, because
you are not actually beginning but only reviewing the study;
and you, as well as I, must exert a sort of imaginative, & as
it were dramatic power, in throwing ourselves back into
that state & time in which you made your earliest steps in
Algebra, while I had the pleasure to assist. Having then
devoted the first of these letters to the distinguishing of Algebra
from other kindred Sciences, and the second letter to the distinction
between the Theoretical & other Schools, I shall now make
a few general remarks on the connexion & the contrast of the
Analytic & Synthetic processes, or Forms of thought, as applicable to every science and to every school.
The two Greek words Analysis & Synthesis are used by
Mathematicians & Metaphysicians in many senses, which seem
however to have all some reference to the etymology of those
two words, or of the cognate Latin forms, Resolution and
Composition; as if we said, in a more English style, Putting



asunder & Putting together, – Taking to pieces, & making
up, – Loosing & Binding, – Decomposing a thing or thought
into its simpler elements, and Compounding these elements
again so as to produce the thing or thought. Thus in
Chemistry there is an Analysis performed, when Water is
decomposed into Oxygen & Hydrogen; & there is a Synthesis,
when these elements are combined in such a manner that
Water results. In Dynamical Astronomy, it was Analysis,
when Newton extracted from the complex phenomena of the
motions of the planets and satellites the elementary laws of
motion & of attraction; it was Synthesis, when he proceeded
to combine these elementary laws, & to deduce from them the
planetary & lunar motions. The general process of reasoning
itself, was Analysed by Aristotle into the principles & rules
of Logic; & consciously or unconsciously, those principles and
rules are applied to, & combined Synthetically with, the
premises of every argument, when any one reasons
correctly. Assertions, propositions, judgements, are distinguished
by Kant into Analytic & Synthetic, by an analogous & subtle
distinction. He holds that an assertion or judgment is Analytic,
when the agreement of the Predicate with the subject of the assertion
is an identical & purely logical truth, deduced from a mere analysis
(or examination) of the meanings already supposed of the two signs compared,
(without any new & foreign connexion between the two thoughts

Fonte: Arquivos da seção de manuscritos do Trinity College Dublin, The University of Dublin.

Os desdobramentos: Hüseyin Tevfik

- Hüseyin Tevfik (1832-1901) foi um matemático turco (Império Otomano). Seu livro, *Linear Algebra* (1882), foi o primeiro a utilizar a denominação “linear algebra” com significado similar ao praticado atualmente.
- Este constitui um dos casos de contribuições inovadoras das “periferias” das metrópoles da época.
- Ampliou a representação geométrica dos números complexos de Argand, desenvolvendo operações entre segmentos orientados em duas ou três dimensões.
- *A Álgebra Linear, conforme tratada neste livreto, assemelha-se muito aos “Quatérnios”, uma ciência que o mundo deve ao extraordinário gênio de Sir William Hamilton. Tem todas as potencialidades desta última ciência e é muito menos difícil. A ciência dos quatérnios é ensinada nas universidades e é uma ciência reconhecida e bem aceita. Não consigo ver por que a mesma acolhida não deveria ser concedida à Álgebra Linear, ou por que, até mesmo, ela não deveria tomar o lugar da primeira.* (Tevfik, 1882, p. 1)

Os desdobramentos: Peano

- *Calcolo geometrico: secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica dedutiva* (1888), Giuseppe Peano.
- Peano defende que a teoria presente no livro logo será ensinada no ensino superior, enfatizando que a Geometria Analítica constitui um caso particular deste então denominado Cálculo Geométrico.
- Apresenta a definição de "*sistemi lineari*", precursora da definição atual de espaço vetorial: um conjunto de entidades munido de duas operações, a soma entre elas e a multiplicação por escalar.

Sistemi lineari

72. Existem sistemas de instituições sobre os quais são dadas as seguintes definições:

1. A **igualdade de duas entidades** *a* e *b* do sistema é definida, ou seja, uma proposição é definida, indicada por $a = b$, que expressa uma condição entre duas entidades do sistema, satisfeita por certos pares de entidades, e não por outros, e que satisfaz as equações lógicas:

$$(a = b) = (b = a), (a = b) \cap (b = c) < (a = c).$$

2. A **soma de duas entidades** *a* e *b* é definida, ou seja, uma entidade é definida, indicada por $a + b$, que também pertence ao sistema dado e que satisfaz as condições:

$$(a = b) < (a + c = b + c), a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c,$$

e o valor comum dos dois membros da última igualdade será indicado por $a + b + c$.

3. Como *a* é uma entidade do sistema, e *m* é um número inteiro e positivo, **com a escrita *ma* queremos dizer a soma de *m* entes iguais a *a***. É fácil reconhecer, sendo *a, b,* ... entidades do sistema, *m, n,* ... inteiros e positivos, que

$$(a = b) < (ma = mb); m(a + b) = ma + mb; (m + n)a = ma + na; m(na) = (mn)a; 1a = a.$$

4. Finalmente vamos supor que existe uma entidade do sistema, que chamaremos de **entidade nula**, e que denotaremos por 0, tal que, qualquer que seja a entidade *a*, o produto do número 0 pela entidade a sempre dá *a* entidade 0, isto é,

$$0a = 0.$$

Se o **significado *a* + (–1)*b*** for atribuído à escrita $a - b$, deduzimos: $a - a = 0, a + 0 = a.$

(Peano, 1888, p. 141-142, grifos nossos)

Outros desdobramentos

- *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867), Hankel.
- *Remarks on the mathematical classification of physical quantities* (1871), Maxwell.
- *Applications of Grassmann's extensive algebra* (1878), Clifford.
- *Elements of vector analysis* (1881), Gibbs.
- *The relations between magnetic force and electric current* (1882-1883), Heaviside.
- *A survey of modern algebra* (1941), Birkhoff e MacLane.

Conclusão

- As multiplicações desenvolvidas independentemente por Graßmann e Hamilton quebraram um paradigma fortemente estabelecido na matemática: o da comutatividade da multiplicação.
- Esses novos produtos tiveram grande influência no surgimento de novas álgebras e cálculos.
- Os desdobramentos de seus conceitos deram origem a pelo menos duas disciplinas: o cálculo vetorial e a álgebra linear.

Referências

- CROWE, Michael (1994). **A history of vector analysis**. The evolution of the idea of a vectorial system. New York: Dover Publications.
- GRASSMANN, Hermann (1844). **Die Wissenschaft der extensiven Grösse, oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin, etc**. Leipzig: Otto Wigand.
- HAMILTON, William Rowan (1853). **Lectures on Quaternions: Containing a Systematic Statement of a New Mathematical Method; of which the Principles Were Communicated in 1843 to the Royal Irish Academy; and which Has Since Formed the Subject of Successive Courses of Lectures, Delivered in 1848 and Subsequent Years, in the Halls of Trinity College, Dublin: with Numerous Illustrative Diagrams, and with Some Geometrical and Physical Applications**. Dublin: Hodges and Smith.
- PEANO, Giuseppe (1888). **Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann: preceduto dalla operazioni della logica deduttiva**. Turim: Fratelli Bocca.
- TEVFIK, Hüseyin Pacha (1882). **Linear Algebra**. Constantinople: A. H. Boyajian.