



DESMOS E A GEOMETRIA ANALÍTICA VETORIAL: Medindo Distâncias e Traçando Retas

Autor: Carlos Eduardo Almeida Santos

Orientador: Prof. Dr. Valdelírio da Silva e

Silva
CASTANHAL
2024

INTRODUÇÃO

- ☐ A Geometria Analítica Vetorial é uma das áreas da Matemática que permite a visualização e compreensão de conceitos complexos através de representações geométricas.
- ☐ As representações geométricas são de extrema importância para o entendimento dos conteúdos dessa área.
- ☐ O uso de ferramentas digitais para ilustrar essas representações é de grande contribuição, pois permite apresentar e demonstrar representações geométricas complexas, as quais precisam ser ilustradas com bastante cuidado, já que cada aspecto é crucial na representação geométrica de uma equação algébrica.

As TDICs

O uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) é mencionado pela BNCC como uma das competências gerais da educação no seguinte item:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p.9).

Página inicial do *Desmos*

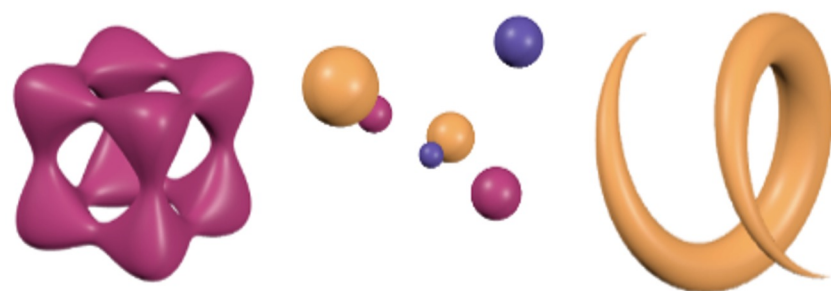
desmos

Ferramentas matemáticas ▾

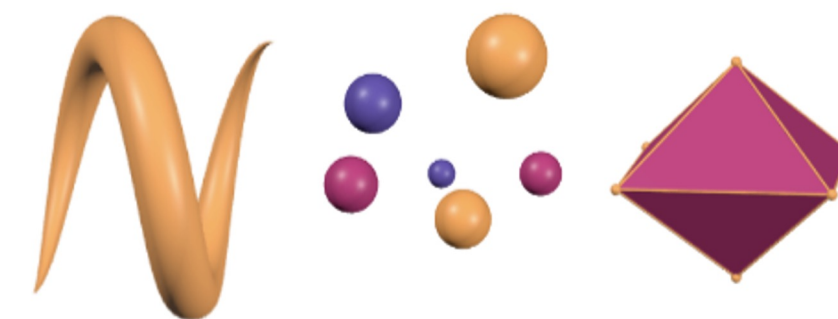
Sala de aula ▾

Recursos ▾

Carlos ▾



Apresentamos a Desmos 3D (beta)
Mergulhe em uma nova dimensão matemática.
[Teste agora!](#)



Vamos aprender juntos.

Na Desmos Studio, queremos ajudar todos a aprender, amar e crescer com a matemática.

Drag this point

Calculadora gráfica

Explore a geometria.

Teste a nossa ferramenta de geometria com o poder da calculadora gráfica integrada.

Abrir calculadora de geometria

Concurso Global de Arte

Visite a galeria do Concurso de Arte 2023, com 100 gráficos incríveis de todo o mundo.

Visite a página de arte

Página inicial do *desmos classroom*

desmos classroom

Buscar



Carlos Santos ▾



Início

EXPLORAR CONTEÚDO
GRATUITO

Coleções em destaque

Mais popular

Manipulativos Polypad

SUAS COISAS

Histórico do painel de ...

Turmas

Atividades personaliza...

Coleções

Programa de matemática Desmos 6–A1

Celebre o talento de cada aluno com o programa de matemática Desmos 6–A1. Disponível em inglês e espanhol.

Experimente nossas lições/4> Teste grátis

Coleções em destaque

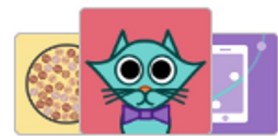
[Ver tudo](#)



Starter Screens

Por Desmos Classroom | 7 atividades

These activities offer starter screens that you can copy and paste into your activities. They are divided here by their different purposes.



Modeling

Por Desmos Classroom | 6 atividades

These activities are designed for students who have worked with linear, quadratic, and exponential functions, and who are ready to use these function types to represent real-world phenomena.



Exponential Functions

Por Desmos Classroom | 10 atividades

Fonte: Capturada da plataforma *Desmos*

Documentação da Camada de Computação do *Desmos*

Computation Layer Documentation

Welcome

Getting Started

● **Components**

Botão de ação

Criador de desafios

Desenho

Graph and Graphing Calc

Imagem

Lista ordenada

Marbleslides

Multiple Choice and Checkboxes

Mídia

Nota

Ordenação de fichas

Polygraph

Polypad

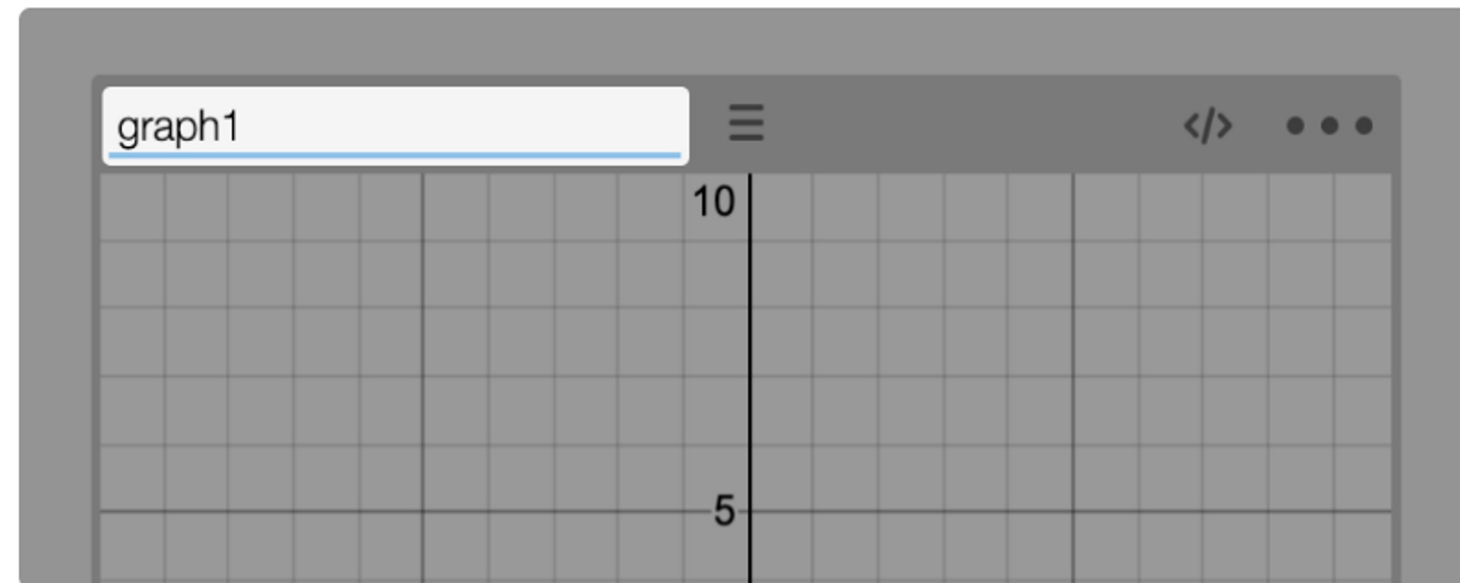
Resposta livre

Resposta matemática

Components

Components are the heart of Computation Layer. Scripts are usually attached to a component through the script icon. Scripts can also be attached to an entire screen to control the behavior of the screen itself.

In order to access the sources of a component, you first need to name it:

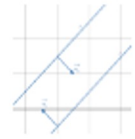


To add a script to a component and make use of its sinks, click the script icon next to the component:



Fonte: Capturada da plataforma *Desmos*

Atividades Desenvolvidas



2.3 - Análise de paralelismo de retas do \mathbb{R}^2

Criado por você

Essa atividade vai tratar sobre o paralelismo de retas e também sobre o perpendicularismo entre elas, além de outros conceitos importantes relacionados a esse tema em Geometria Analítica.



2.4 - Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do \mathbb{R}^2

Criado por você

Nesta atividade, estão propostos exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas no plano cartesiano.



2.5 - Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano

Criado por você

Nesta atividade será tratado os conceitos necessários para calcular a distância entre um ponto a uma reta e entre duas retas paralelas no \mathbb{R}^2 . Além disso, serão abordados conceitos sobre Desigualdades Lineares e Regiões no Plano, complementando assim os conceitos sobre retas no \mathbb{R}^2 .



2.6 - Desvendando Distâncias entre pontos e retas no \mathbb{R}^2 | Exercícios

Criado por você

Atividade voltada para a prática de conceitos de Geometria Analítica Vetorial em relação a determinação da distância entre pontos e retas no \mathbb{R}^2 .

Fig.1: Página 1 da atividade “Análise de paralelismo de retas do \mathbb{R}^2 ”

Quanto a equação geral

A partir da equação geral da reta, $ax + by + c = 0$, temos que os coeficientes a e b representam as coordenadas de um vetor perpendicular da reta.

A partir dessa interpretação é possível então avaliar quando duas retas são paralelas, perpendiculares, coincidentes ou concorrentes.

Se tivermos duas retas r e s com equações gerais

$$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Se $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n}_r = (a_1, b_1) = t \cdot (a_2, b_2) = t \cdot \vec{n}_s$ então r e s são paralelas ($r//s$).

Se além disso tivermos $c_1 = t \cdot c_2$, então r e s são coincidentes

$$a_1x + b_1y + c_1 = t \cdot a_2x + t \cdot b_2y + t \cdot c_2 = t \cdot (a_2x + b_2y + c_2)$$

Exemplo:

As retas $r_1: 5x + 15y + 10$ e $r_2: x + 3y + 2 = 0$ são

coincidentes, pois temos que $r_1 = t \cdot r_2$

$$x + 3y + 2 = t \cdot (x + 3y + 2), \text{ ou seja, } t = 5.$$

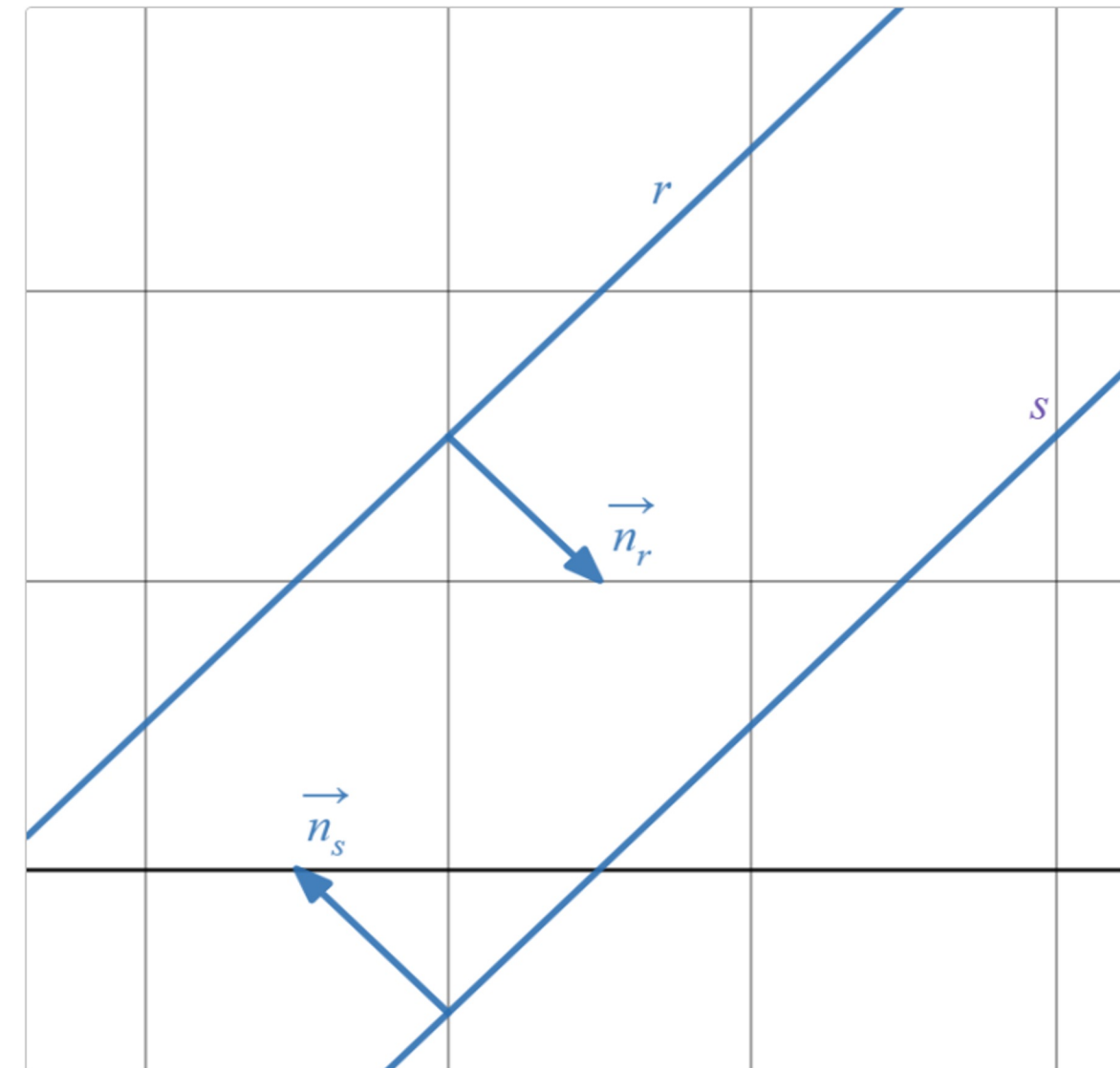


Fig.2: Página 2 da atividade “Análise de paralelismo de retas do \mathbb{R}^2 ”

Considere as retas $r: 21x + 14y + 3 = 0$ e $s: ax + 2y + 5 = 0$. Para que essas retas sejam paralelas, o valor de a deve ser igual a...

- 7
- 2
- 3
- 5

Resposta incorreta 😞 👁️! Como os coeficientes a e b da equação geral da reta representam o vetor normal da reta, neste caso, $\vec{n}_r = (21, 14)$ é o vetor normal da reta r . Portanto, para que as retas r e s sejam paralelas, o vetor normal da reta s deve ser tal que $\vec{n}_r = t\vec{n}_s$. Sendo assim, se $a = 3$, já que

$\vec{n}_s = (a, 2)$ é o vetor normal da reta s , então

teremos $\vec{n}_s = (3, 2)$. E t é igual a 7, já que

$$\vec{n}_r = t\vec{n}_s = \vec{n}_r = (21, 14) = 7\vec{n}_s = 7(3, 2) = (21, 14).$$

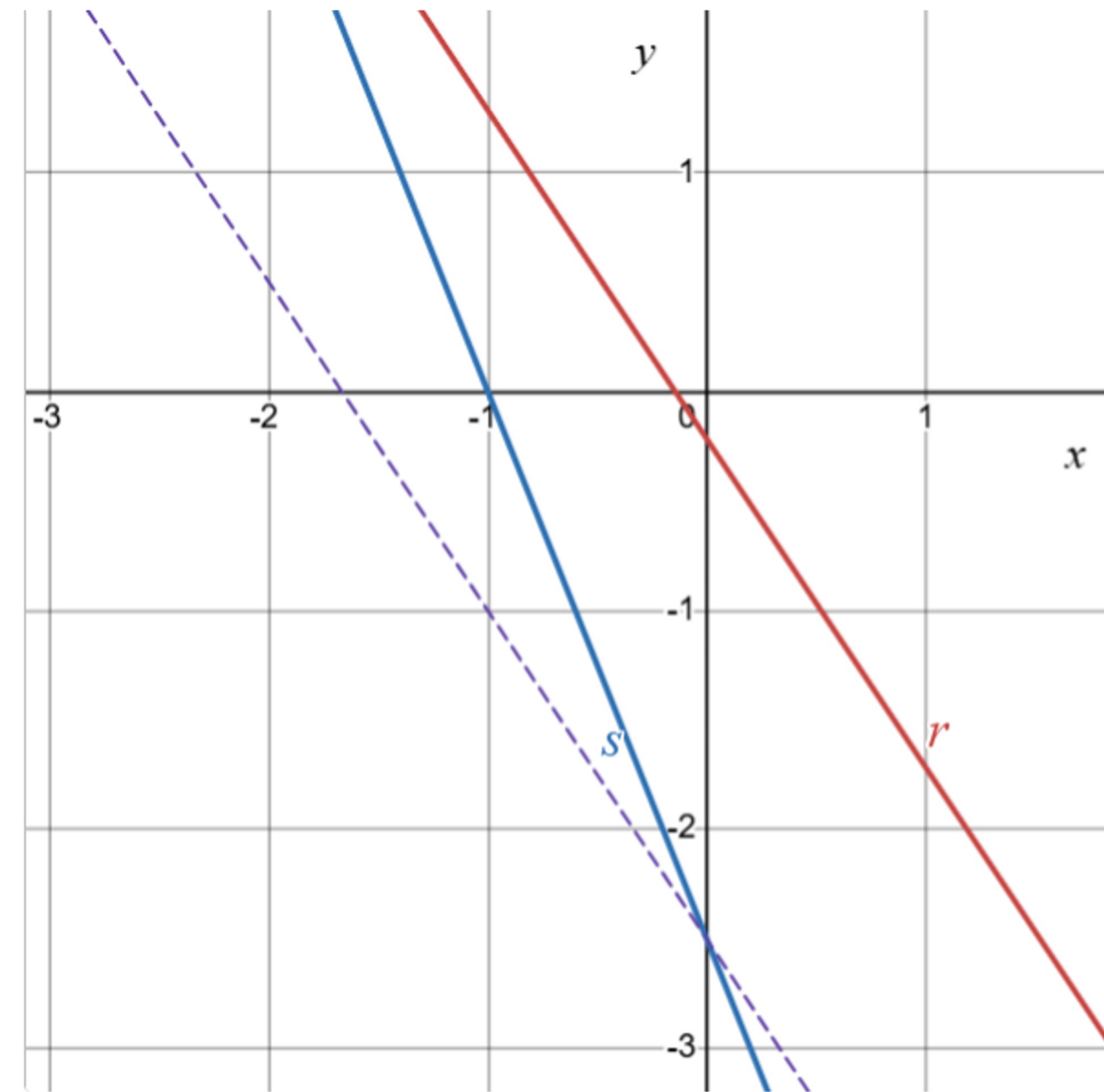


Fig.4: Página 4 da atividade “Análise de paralelismo de retas do \mathbb{R}^2 ”

Perpendicularismo entre retas

No caso de equações paramétricas e simétricas de duas retas, basta verificar se

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = 0$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$

No caso de equações gerais, sendo as equações das retas r e s iguais a

$$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ e } s: a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$\text{logo } \vec{n}_r = (a_1, b_1) \text{ e } \vec{n}_s = (a_2, b_2).$$

Então r e s serão perpendiculares se

$$\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s = 0$$

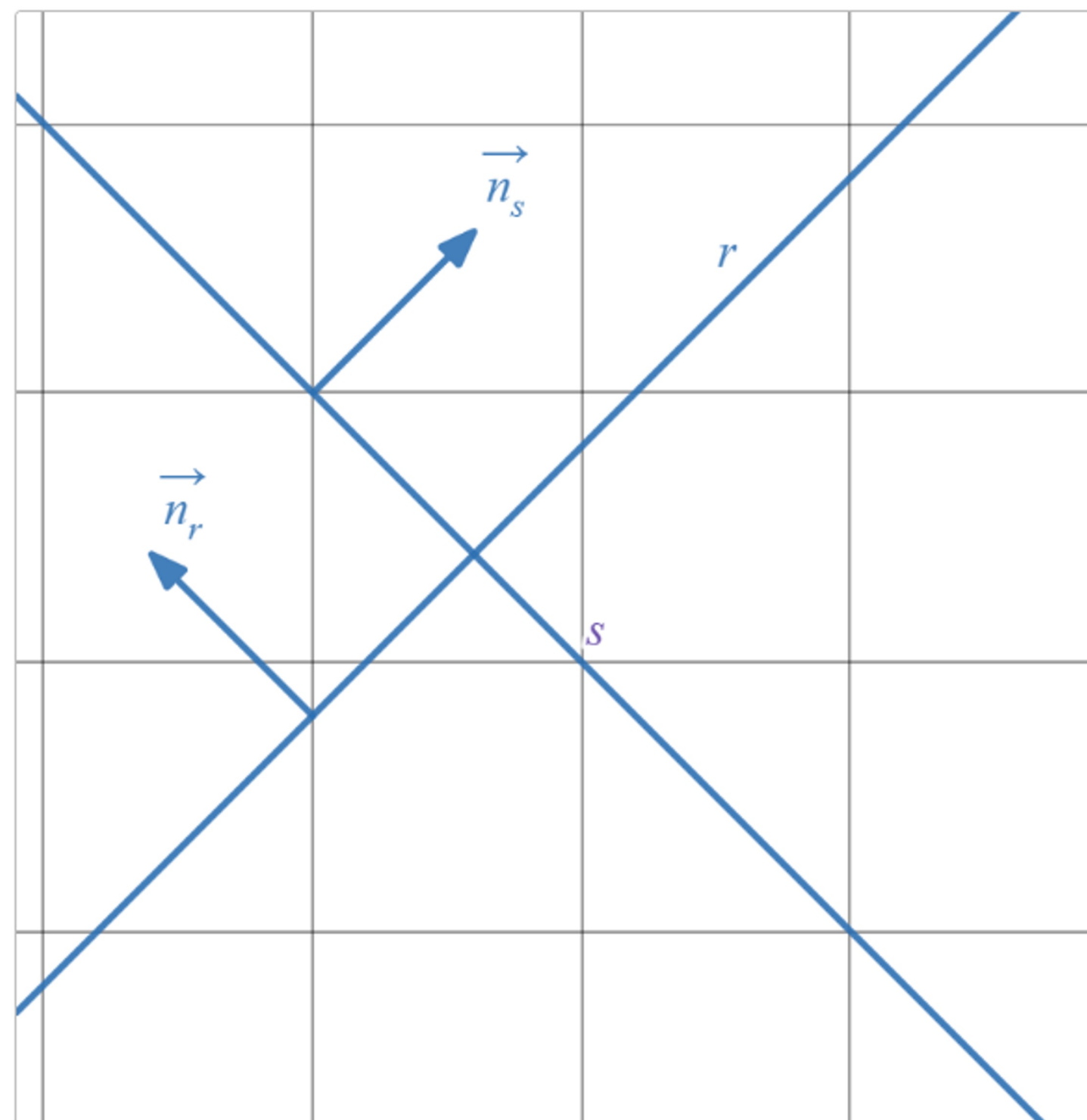


Fig.5: Página 5 da atividade “Análise de paralelismo de retas do \mathbb{R}^2 ”

EXERCÍCIO!

Considerando as retas $r_1: 5x - 3y + 2 = 0$ e $r_2: -3x + by + 2 = 0$, qual o valor de b para que as retas sejam perpendiculares?

- $b = -2$
- $b = 5$
- $b = 3$
- $b = -5$

Explique seu raciocínio!

O valor do coeficiente b é...

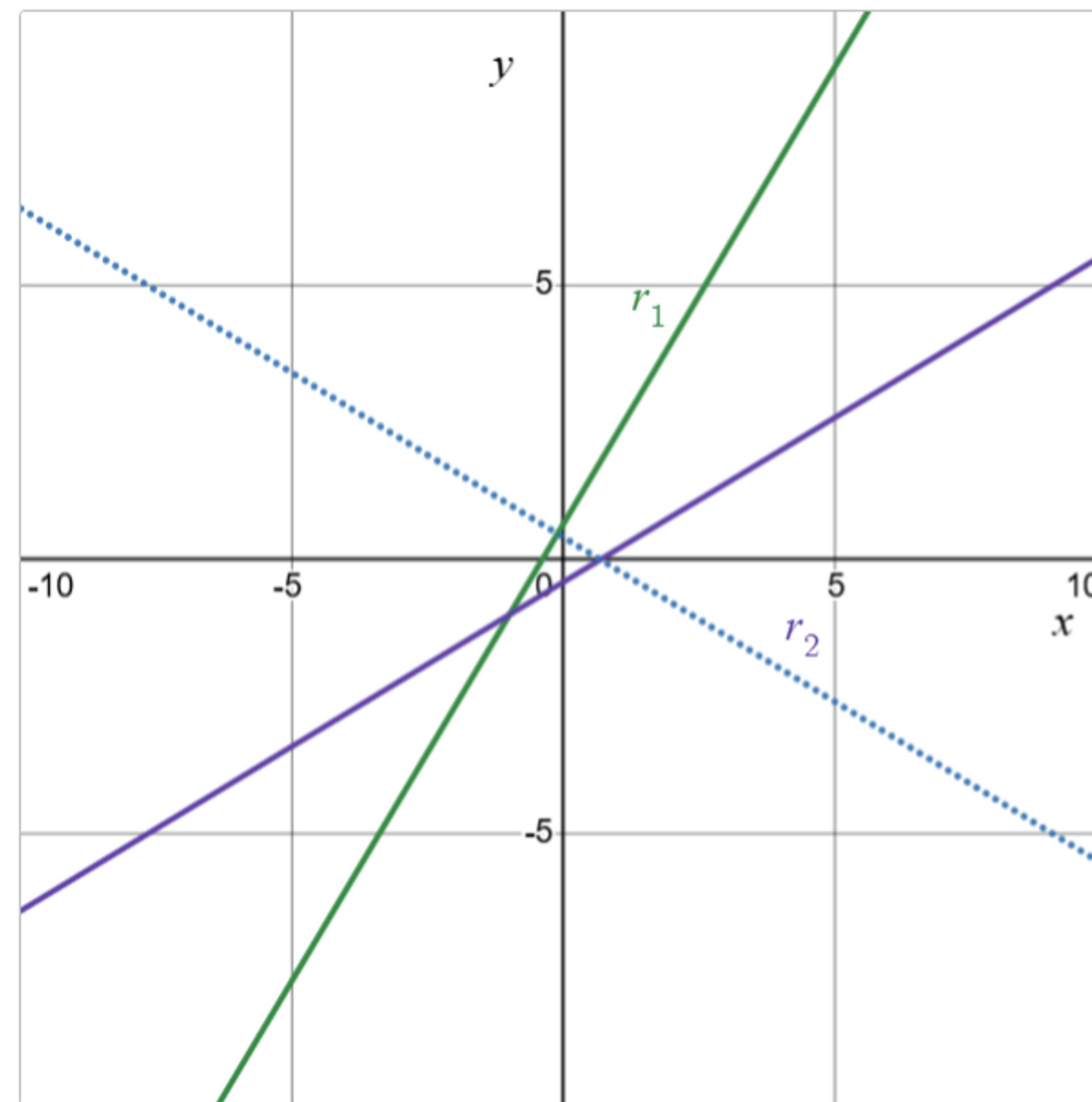


Fig.6: Página 6 da atividade “Análise de paralelismo de retas do \mathbb{R}^2 ”

Equações reduzidas

No caso de equações reduzidas:

$$r: y = m_1x + h_1 \text{ e } s: y = m_2x + h_2$$

Passamos tais equações para forma geral:

$$r: -m_1x + y - h_1 = 0, \quad s: -m_2x + y - h_2 = 0$$

temos que $\vec{n}_r = (-m_1, 1)$ e $\vec{n}_s = (-m_2, 1)$

Se $r \perp s$, então $\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s = 0$, ou seja,

$$(-m_1, 1) \cdot (-m_2, 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-m_1) \cdot (-m_2) + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

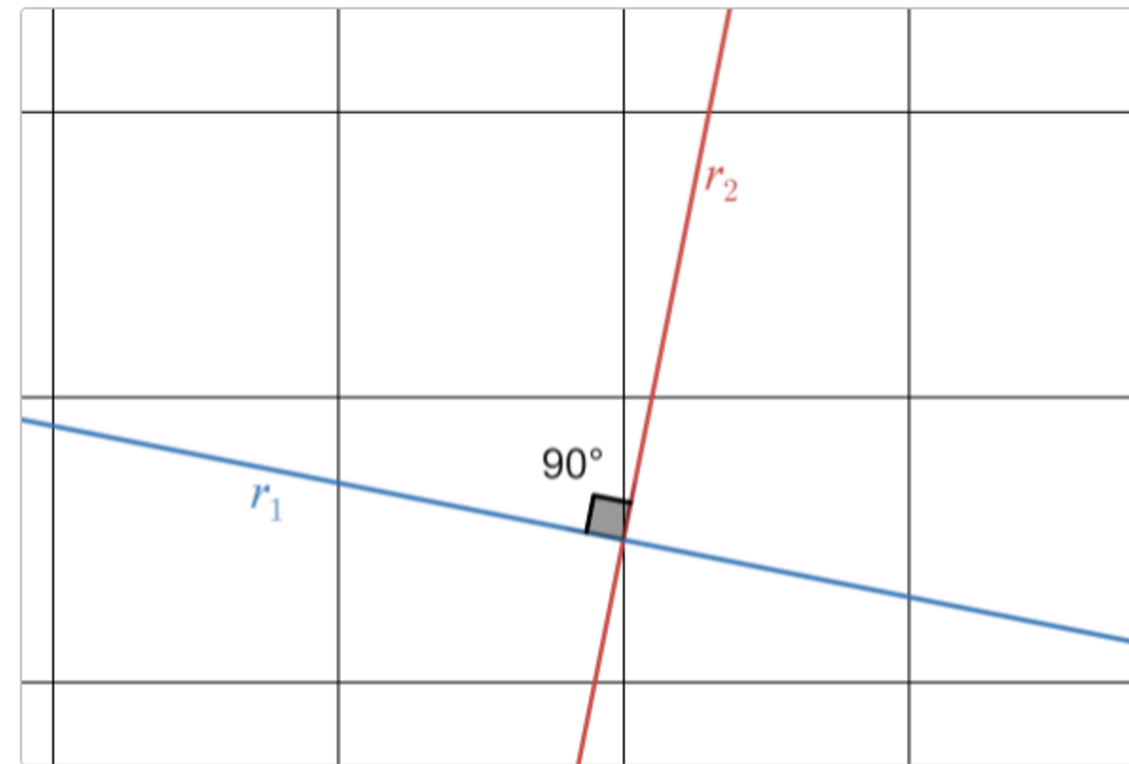
$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Por exemplo, considere as retas $r_1: y = 5x - 1$ e

$r_2: y = -\frac{1}{5}x - 1$. Elas são perpendiculares. Pois

como $m_{r_1} = 5$ e $m_{r_2} = -\frac{1}{5}$, logo $m_{r_1} \cdot m_{r_2} = -1$

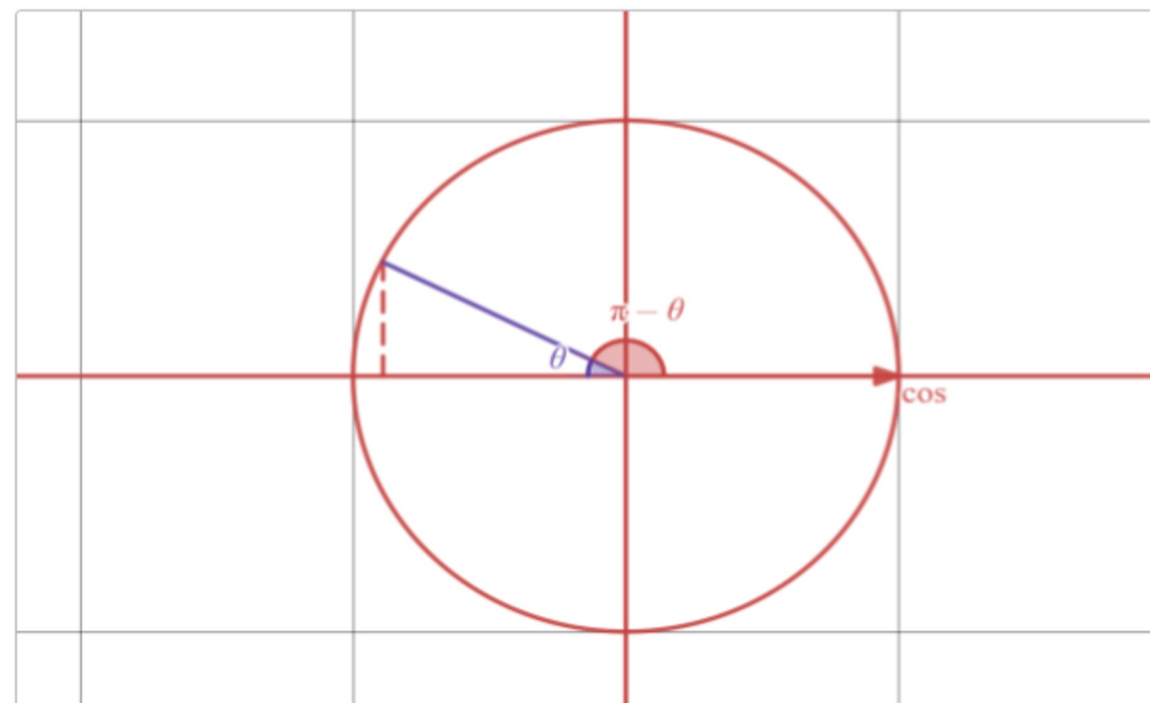
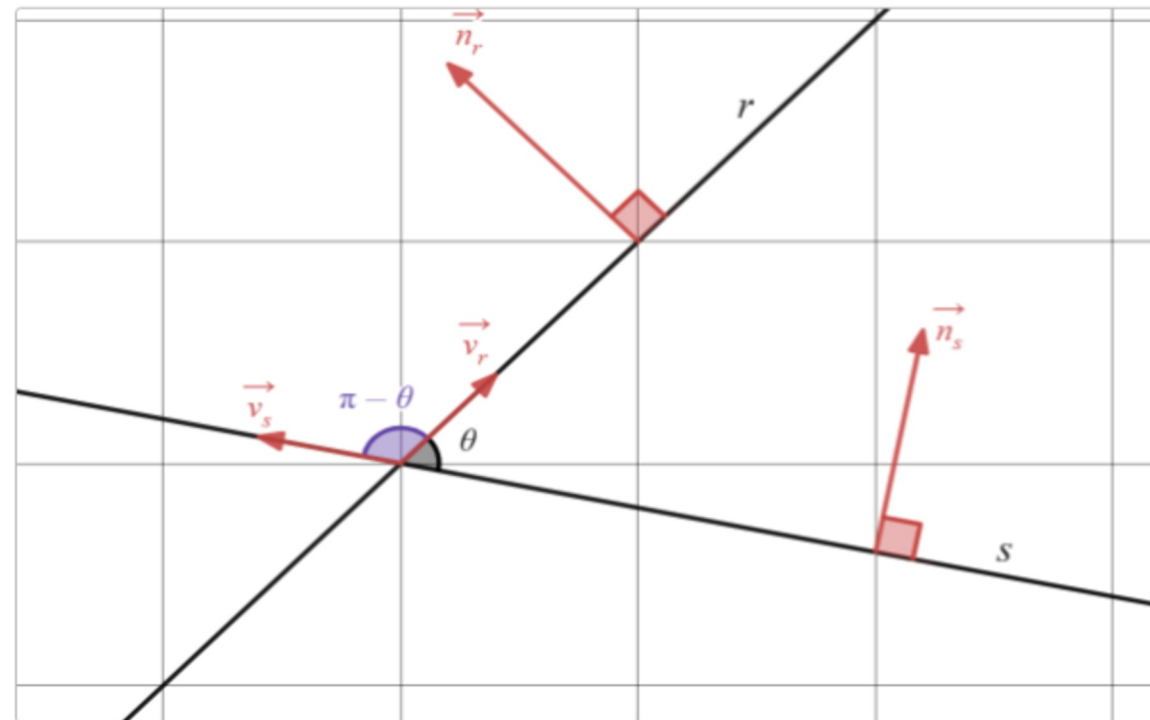
$$\Rightarrow 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$$



Fonte: Autoria própria

Fig.8: Página 8 da atividade “Análise de paralelismo de retas do \mathbb{R}^2 ”

Agora, se r e s não são paralelas, coincidentes ou perpendiculares, então são concorrentes, com um ângulo θ entre elas:

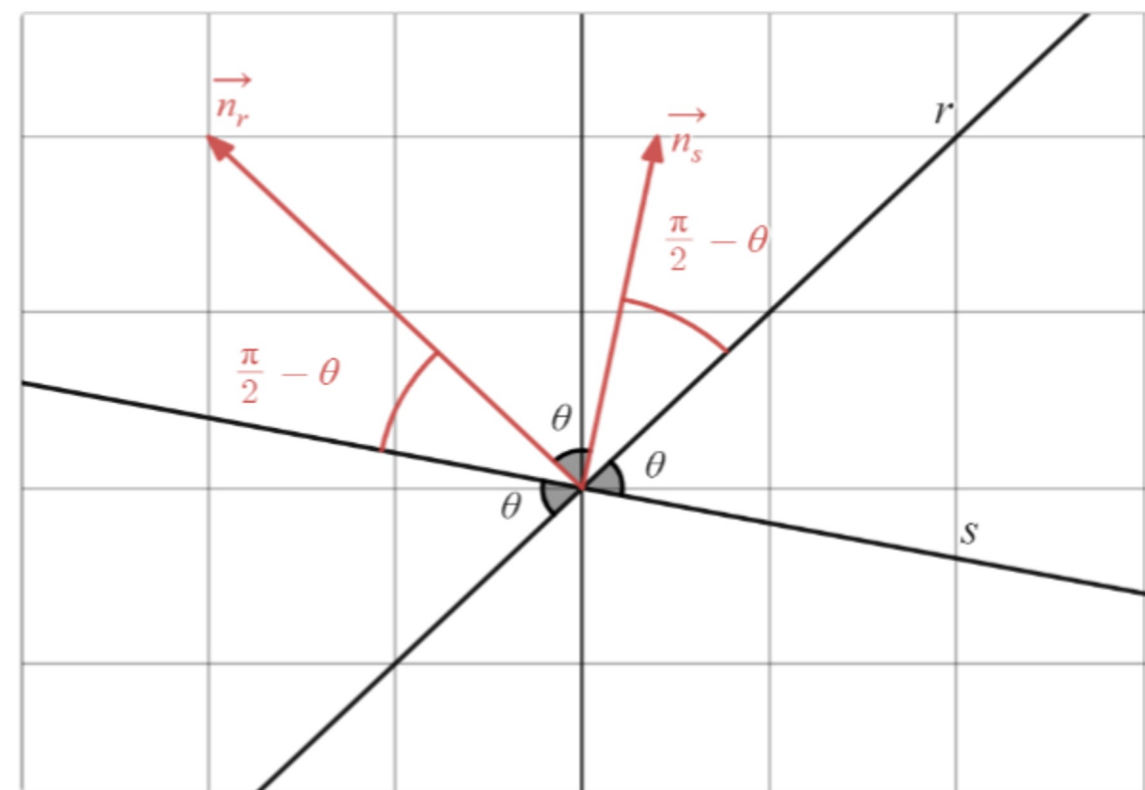


Logo, temos que:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = \|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\| \cdot \cos(\pi - \theta)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = \|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\| \cdot (-\cos \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{\|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\|}$$



Consequentemente:

$$\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s = \|\vec{n}_r\| \cdot \|\vec{n}_s\| \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{\|\vec{n}_r\| \cdot \|\vec{n}_s\|}$$

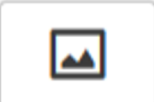

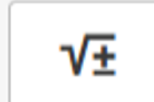
Fonte: Autoria própria

Fig.12: Página 6 da atividade “Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do \mathbb{R}^2 ”

Questão 3


Ache as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas $r:4x - 3y - 1 = 0$ e $s:3x - 4y + 2 = 0$

Temos que ...|

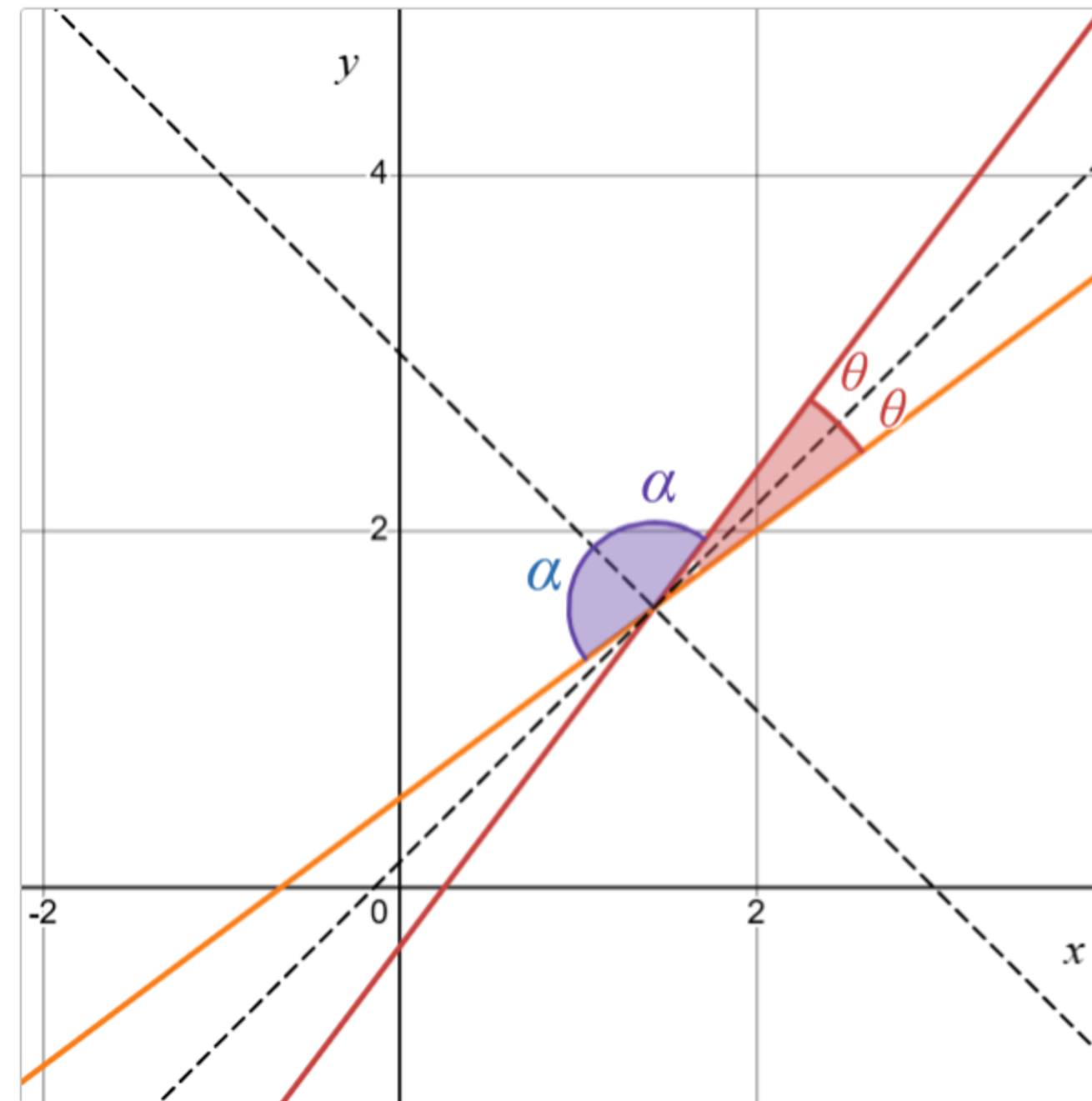
Enviar resposta

Insira aqui a bissetriz do ângulo α .



Visualizar reta

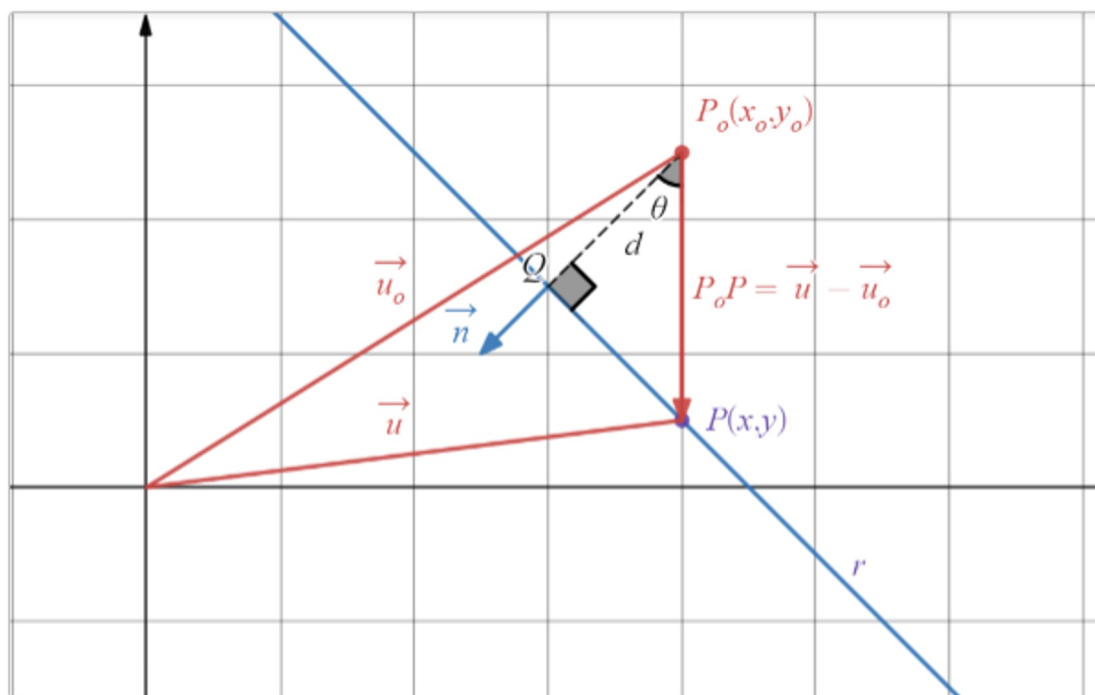
Insira aqui a bissetriz do ângulo θ .



Fonte: Autoria própria

Fig.13: Página 1 da atividade “Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano”

Sendo a reta $r: ax + by + c = 0$ e ponto $P_o = (x_o, y_o)$, a distância (d) entre esse ponto e a reta r é calculada da seguinte forma:



Sendo $\vec{n} = (a, b)$ o vetor normal da reta r , teremos então que:

$$\cos \theta = \frac{d}{\|\vec{u} - \vec{u}_o\|} \Rightarrow d = \|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \cos \theta \quad (I)$$

Mas também temos que

$$\cos \theta = \frac{(\vec{u} - \vec{u}_o) \cdot \vec{n}}{\|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \|\vec{n}\|} \quad (II). \text{ Daí}$$

$$d = \|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \frac{|(\vec{u} - \vec{u}_o) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{|(\vec{u} - \vec{u}_o) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

E como

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{u}_o) \cdot \vec{n} &= (x - x_o, y - y_o) \cdot (a, b) = a(x - x_o) + b(y - y_o) = \\ &= ax + by - (ax_o + by_o) = \\ &= -c - (ax_o + by_o) = -(ax_o + by_o + c). \text{ Vem que} \end{aligned}$$

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

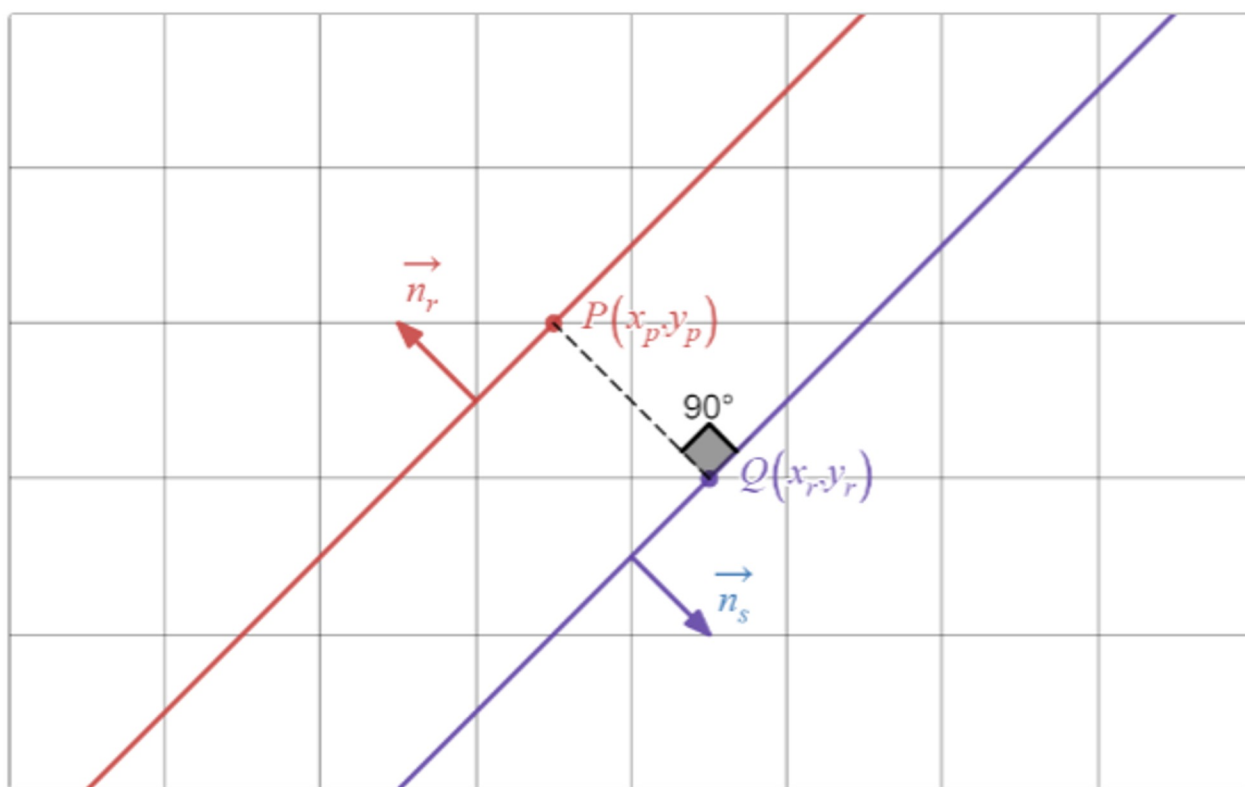
Visualize esse gráfico mais detalhadamente em

Fonte: Autoria própria

Fig.15: Página 3 da atividade “Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano”

Distância entre duas retas paralelas do \mathbb{R}^2

Sejam as retas $r: a_r x + b_r y + c_r = 0$ e $s: a_s x + b_s y + c_s = 0$, sendo paralelas. Então temos que $\vec{n}_r = t \vec{n}_s$. Isso nos permite afirmar então que a equação de r pode ser dividida por uma constante não nula k_r , e a equação de s pode ser dividida por uma constante não nula k_s que nos permita escrever



as equações $r: ax + by + \frac{c_r}{k_r} = 0$ e $s: ax + by + \frac{c_s}{k_s} = 0$. Daí

$$d_{Ps} = \frac{|ax_p + by_p + \frac{c_s}{k_s}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Mas } P(x_p, y_p) \in r, \text{ logo}$$

$$d_{rs} = \frac{|\frac{c_s}{k_s} - \frac{c_r}{k_r}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Atente-se que a fórmula só é válida quando as equações de r e s têm os mesmos coeficientes a e b !

Fig.17: Página 5 da atividade “Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano”

(*GEOMETRIA ANALÍTICA, Coleção PROFMAT 2017. EXEMPLO 3, P.92*) Determine as equações das retas paralelas à reta $r: x + 2y = 2$ que distam 5 unidades de r .

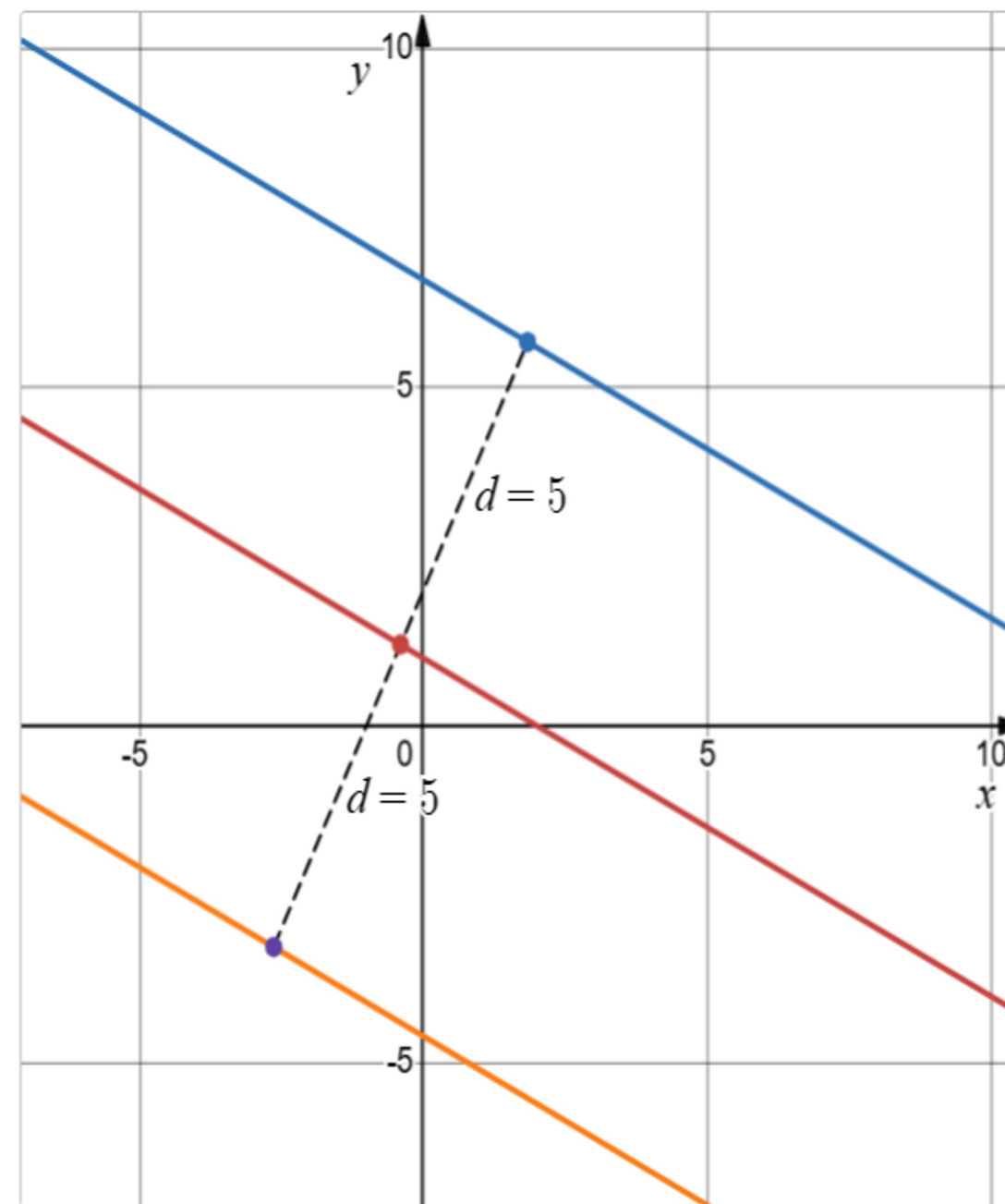
Solução. Seja $s: x + 2y = c$ uma reta paralela à reta r . Temos,

$$d(r,s) = 5 \Leftrightarrow \frac{|c - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5 \Leftrightarrow |c - 2| = 5\sqrt{5}.$$

Logo, $c = 2 + 5\sqrt{5}$ ou $c = 2 - 5\sqrt{5}$, ou seja,

$$s_1: x + 2y = 2 + 5\sqrt{5} \text{ e } s_2: x + 2y = 2 - 5\sqrt{5},$$

são as retas paralelas a r que distam 5 unidades da reta r .



Fonte: Autoria própria

Fig.19: Página 7 da atividade “Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano”

Desigualdades Lineares e Regiões no Plano

Dado que uma reta particiona \mathbb{R}^2 em semiplanos, se temos $r: ax + by > k$, então um semiplano será definido por $ax + by > k$ e o outro por $ax + by < k$.

Sejam $\vec{n} = (a, b)$ o vetor normal de r , a reta
 $x = ta$
 $s:$
 $y = tb$
 perpendicular a r , e P o ponto de interseção
 entre r e s .

Como $P \in r$ e $P \in s$, então

$$a \cdot (ta) + b \cdot (tb) = k$$

$$a^2t + b^2t = k$$

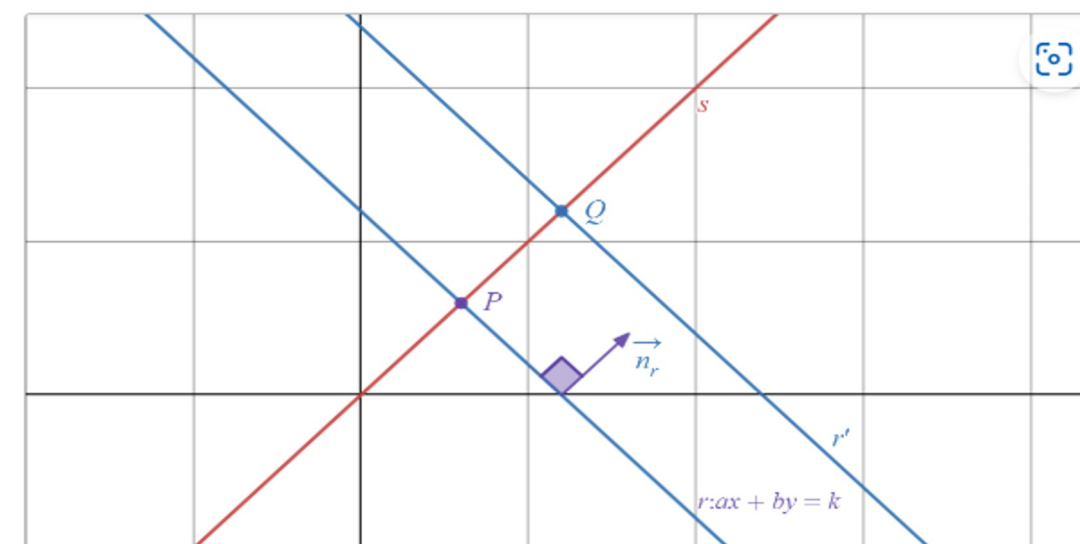
$$t(a^2 + b^2) = k \Rightarrow t = \frac{k}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Logo } P(x, y) = \left(\frac{ka}{a^2 + b^2}, \frac{kb}{a^2 + b^2} \right)$$

Vamos considerar uma reta r' que é paralela a r . A

partir dela, escolhamos um ponto $Q(x', y')$, que representa o ponto de interseção entre r' e s .

Dado que $r' \parallel r$, temos que $ax + by = k'$ onde $(k' \neq k)$.



Como $Q \in r'$ e $Q \in s'$, então

$$ax' + by' = k' \text{ ou ainda}$$

$$a \cdot (t'a) + b \cdot (t'b) = k'$$

$$t' \cdot a^2 + t' \cdot b^2 = k' \Rightarrow t' = \frac{k'}{a^2 + b^2} \cdot \text{Daí}$$

$$Q(x', y') = \left(\frac{k'a}{a^2 + b^2}, \frac{k'b}{a^2 + b^2} \right)$$

Conseqüentemente o vetor \vec{PQ} será

$$\vec{PQ} = Q - P = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \cdot (k' - k), \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot (k' - k) \right)$$

$$= \frac{k' - k}{a^2 + b^2} (a, b)$$

Fonte: Autoria própria

Fig.20: Página 8 da atividade “Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano”

Prosseguindo com a discussão, observamos anteriormente que o vetor \vec{PQ} terá a mesma direção que \vec{n}_r se $k' > k$. Se não for esse o caso, o vetor \vec{PQ} terá a direção oposta. Considerando um ponto (x_o, y_o) no mesmo semiplano que contém k' , obtemos

$$a \cdot x_o + b \cdot y_o = \vec{n}_r \cdot (x_o, y_o) = \|\vec{n}_r\| \cdot \|(x_o, y_o)\| \cdot \cos \theta$$

$$ax + by > k \text{ ou } ax + by < k$$

Se $\vec{n}_r \cdot (x_o, y_o)$ for positivo e maior que k , então (x_o, y_o) estará no mesmo semi-plano com o sentido de \vec{n}_r . Caso contrário, (x_o, y_o) estará no semi-plano contrário ao sentido de \vec{n}_r . Ou seja, o sentido do vetor normal \vec{n}_r indica o semi-plano do qual todos os pontos satisfazem a desigualdade $ax + by > k$.

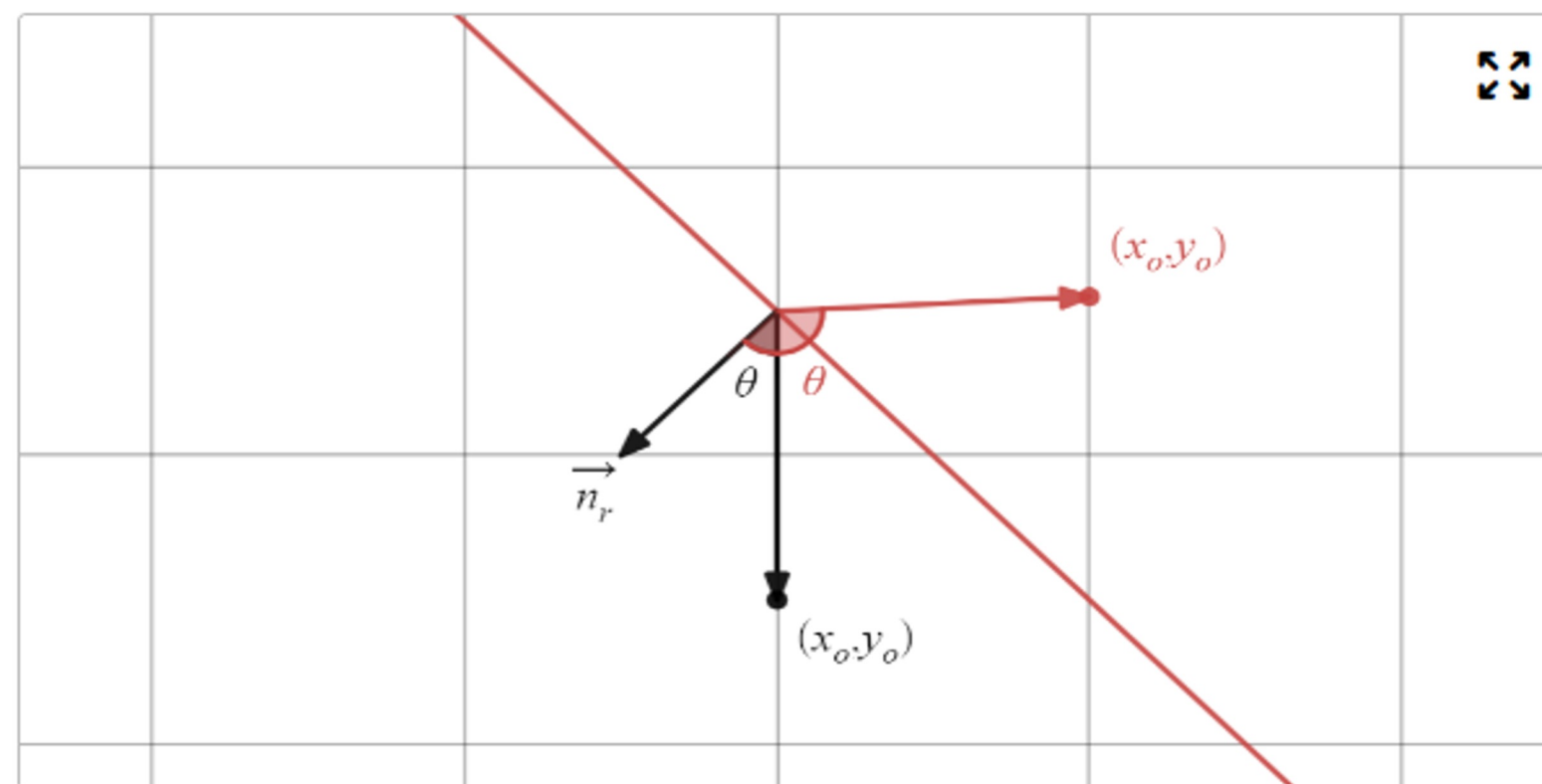
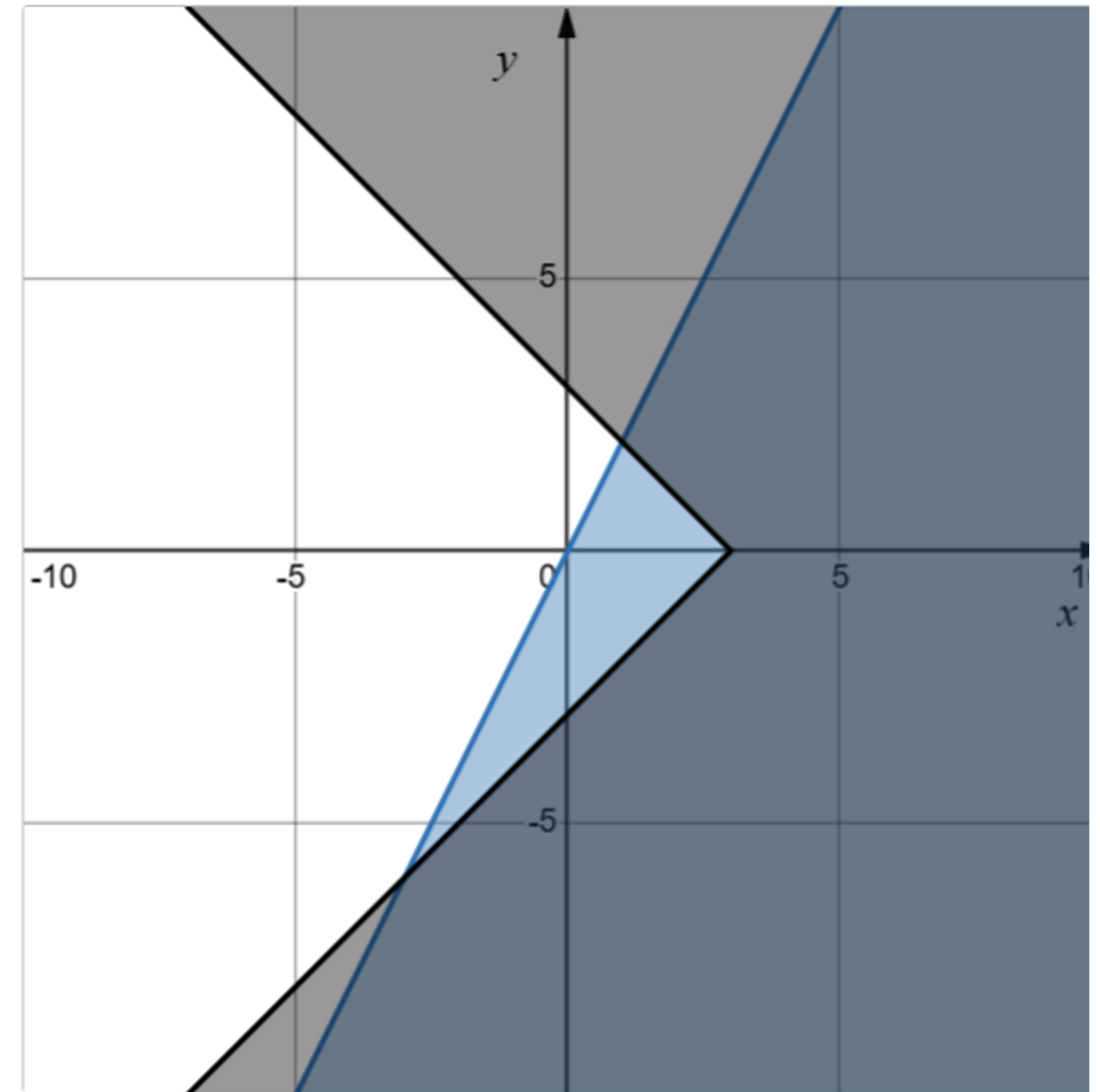


Fig.21: Página 9 da atividade “Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano”

Alguns exemplos de semiplanos

Selecione uma ou mais das inequações abaixo e visualize o semiplano definido por cada uma delas.

- $y \leq 2x$
- $y \geq -x + 3$
- $|y| \leq 2x$
- $|y| \geq -x + 3$



Fonte: Autoria própria

Fig.22: Página 10 da atividade “Distância entre ponto e reta no \mathbb{R}^2 e regiões do plano”

Insira aqui também uma inequação com \leq ou \geq e visualize o seu semiplano correspondente no gráfico ao lado.

$$x + y \geq 3$$



Editar! 

Agora, insira uma inequação com $<$ ou $>$ e observe se há alguma diferença em relação à inequação inserida anteriormente.

$$x + y < 2$$

Editar! 

Você conseguiu identificar alguma diferença entre os semiplanos?

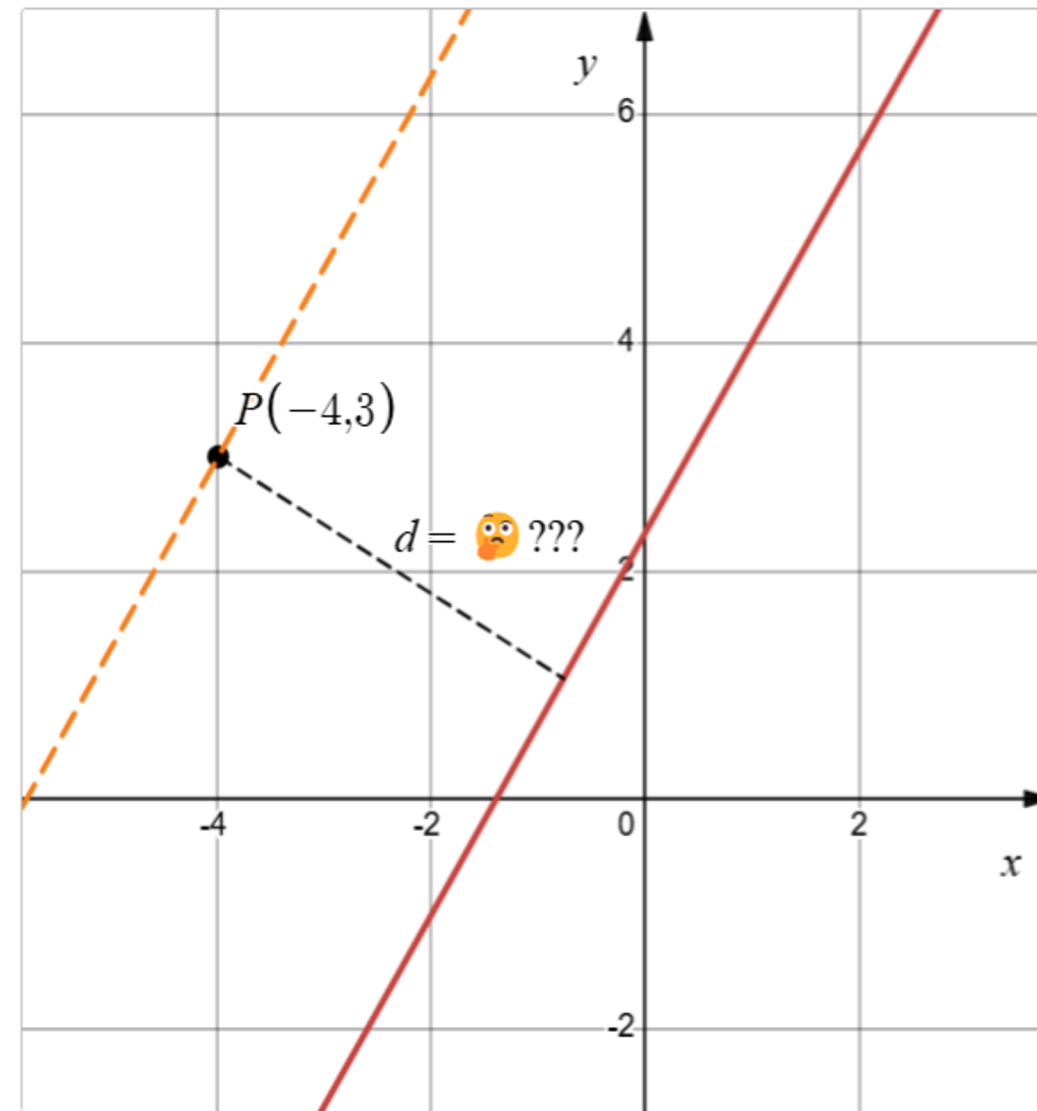
 \sqrt{x}

Enviar



Fig.25: Página 5 da atividade “Desvendando Distâncias entre pontos e retas no \mathbb{R}^2 ”

Dada a reta $r_1: 5x - 3y + 7 = 0$, determine a equação de uma reta que seja paralela a ela e que passe pelo ponto $P(-4,3)$. Em seguida, calcule a distância entre essas retas.



Insira logo abaixo a sua resposta.

A distância entre as retas é...

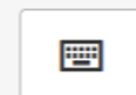
Editar minha resposta

Insira aqui a equação da reta paralela à reta r_1 e que passa pelo ponto $P(-4,3)$.



Enviar

Insira o valor de d .



Enviar

Fonte: Autoria própria

CONSIDERAÇÕES FINAIS

- As atividades interativas que desenvolvemos e apresentamos, utilizando o *Desmos* e sua *CL*, são uma amostra do potencial dessa ferramenta no ensino da Matemática.
- Essas atividades abordam os conceitos-chave e destacam o que cada elemento algébrico representa na figura geométrica em questão.
- As atividades podem ser exploradas em metodologias ativas de conhecimento, no uso por exemplo em Sala de Aula Invertida, Ensino Híbrido e Aprendizagem Cooperativa.
- A *classroom* possibilita organizar, monitorar e gerenciar qualquer página ou atividade, retornando inclusive que respostas dos alunos estão corretas, ou mesmo socializá-las com os demais colegas.

REFERÊNCIAS

DELGADO, J.; FRENSEI, K; CRISSAF, L. *Geometria Analítica. Coleção PROFMAT*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DESMOS, S. P. *Desmos Classroom, Computation Layer Documentation*. 2011. Disponível em: <https://teacher.desmos.com/computation-layer/documentation>. Acesso em: 04 de jul. 2024.

LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2º ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2012

MEDEIROS, Luiz Adauto; DE ANDRADE, Nirzi Gonçalves; WANDERLEY, Augusto Maurício. *Álgebra Vetorial e Geometria*. Rio de Janeiro: EDITORA CAMPUS LTDA, 1981.

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!

