SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

DESMOS E A GEOMETRIA ANALÍTICA VETORIAL: Medindo Distâncias e Traçando Retas

Autor: Carlos Eduardo Almeida Santos

Orientador: Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva

CASTANHAL
2024

INTRODUÇÃO

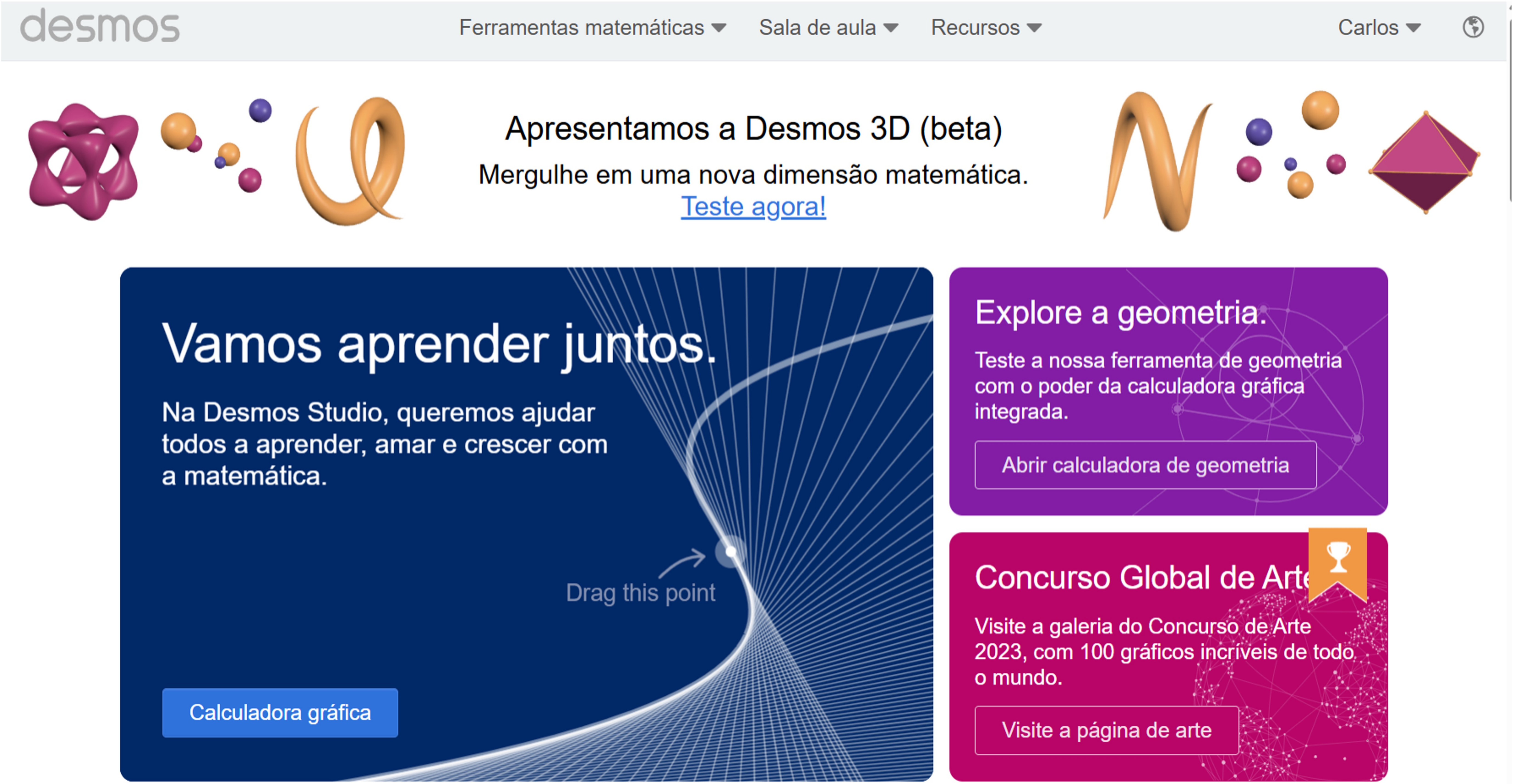
- A Geometria Analítica Vetorial é uma das áreas da Matemática que permite a visualização e compreensão de conceitos complexos através de representações geométricas.
- As representações geométricas são de extrema importância para o entendimento dos conteúdos dessa área.
- O uso de ferramentas digitais para ilustrar essas representações é de grande contribuição, pois permite apresentar e demonstrar representações geométricas complexas, as quais precisam ser ilustradas com bastante cuidado, já que cada aspecto é crucial na representação geométrica de uma equação algébrica.

As TDICs

O uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) é mencionado pela BNCC como uma das competências gerais da educação no seguinte item:

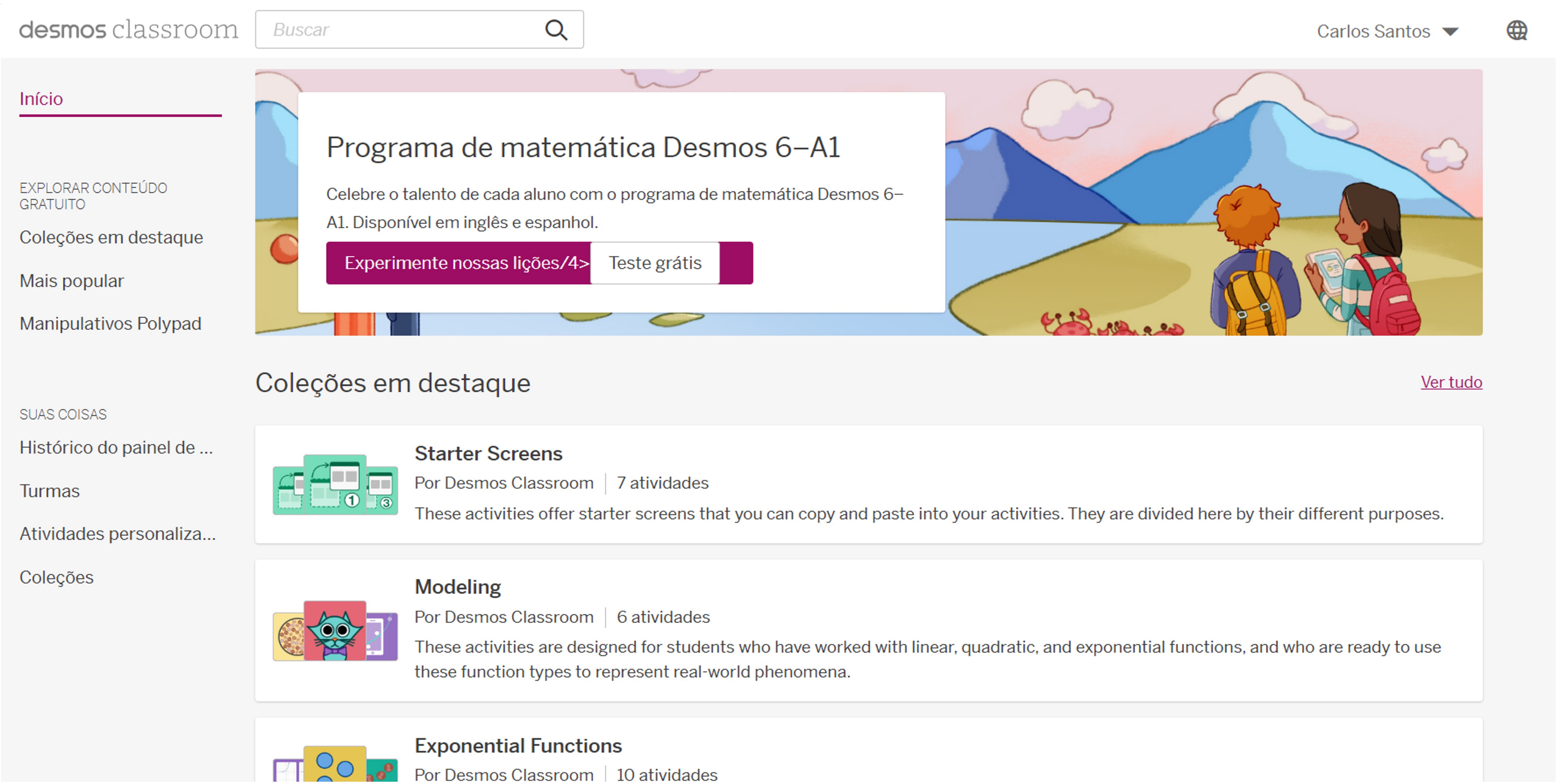
> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p.9).

Página inicial do *Desmos*



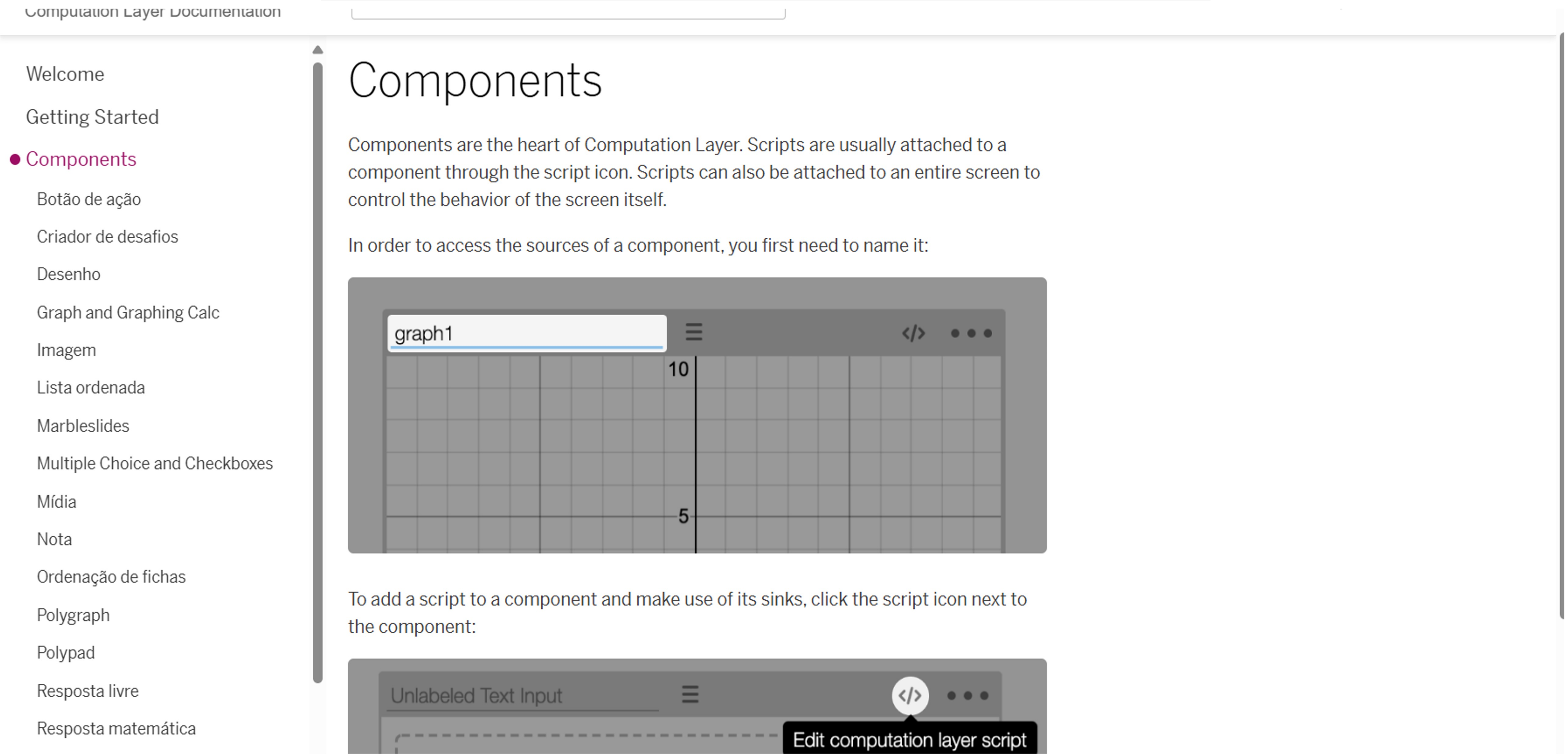
Fonte: Capturada da plataforma *Desmos*

Página inicial do *desmos classroom*



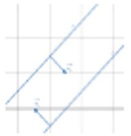
Fonte: Capturada da plataforma *Desmos*

Documentação da Camada de Computação do *Desmos*



Fonte: Capturada da plataforma *Desmos*

Atividades Desenvolvidas



2.3 - Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$

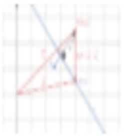
Criado por você

Essa atividade vai tratar sobre o paralelismo de retas e também sobre o perpendicularismo entre elas, além de outros conceitos importantes relacionados a esse tema em Geometria Analítica.

2.4 - Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$

Criado por você

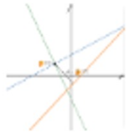
Nesta atividade, está são propostos exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas no plano cartesiano.



2.5 - Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano

Criado por você

Nesta atividade será tratado os conceitos necessários para calcular a distância entre um ponto a uma reta e entre duas retas paralelas no $\mathbb{R}^2$. Além disso, serão abordados conceitos sobre Desigualdades Lineares e Regiões no Plano, complementando assim os conceitos sobre retas no $\mathbb{R}^2$.



2. 6 - Desvendando Distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$ | Exercícios

Criado por você

Atividade voltada para a pratica de conceitos de Geometria Analítica Vetorial em relação a determinação da distância entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$.

Fonte: Autoria própria

Fig.1: Página 1 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"

Prévia da página do aluno

1 de 9 Próximo

Quanto a equação geral

A partir da equação geral da reta, $ax + by + c = 0$, temos que os coeficientes a e b representam as coordenadas de um vetor perpendicular da reta.

A partir dessa interpretação é possível então avaliar quando duas retas são paralelas, perpendiculares, coincidentes ou concorrentes.

Se tivermos duas retas r e s com equações gerais

r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Se $\exists\ t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{n_r} = (a_1,b_1) = t \cdot (a_2,b_2) = t \cdot \vec{n_s}$ então r e s são paralelas $(r//s)$.

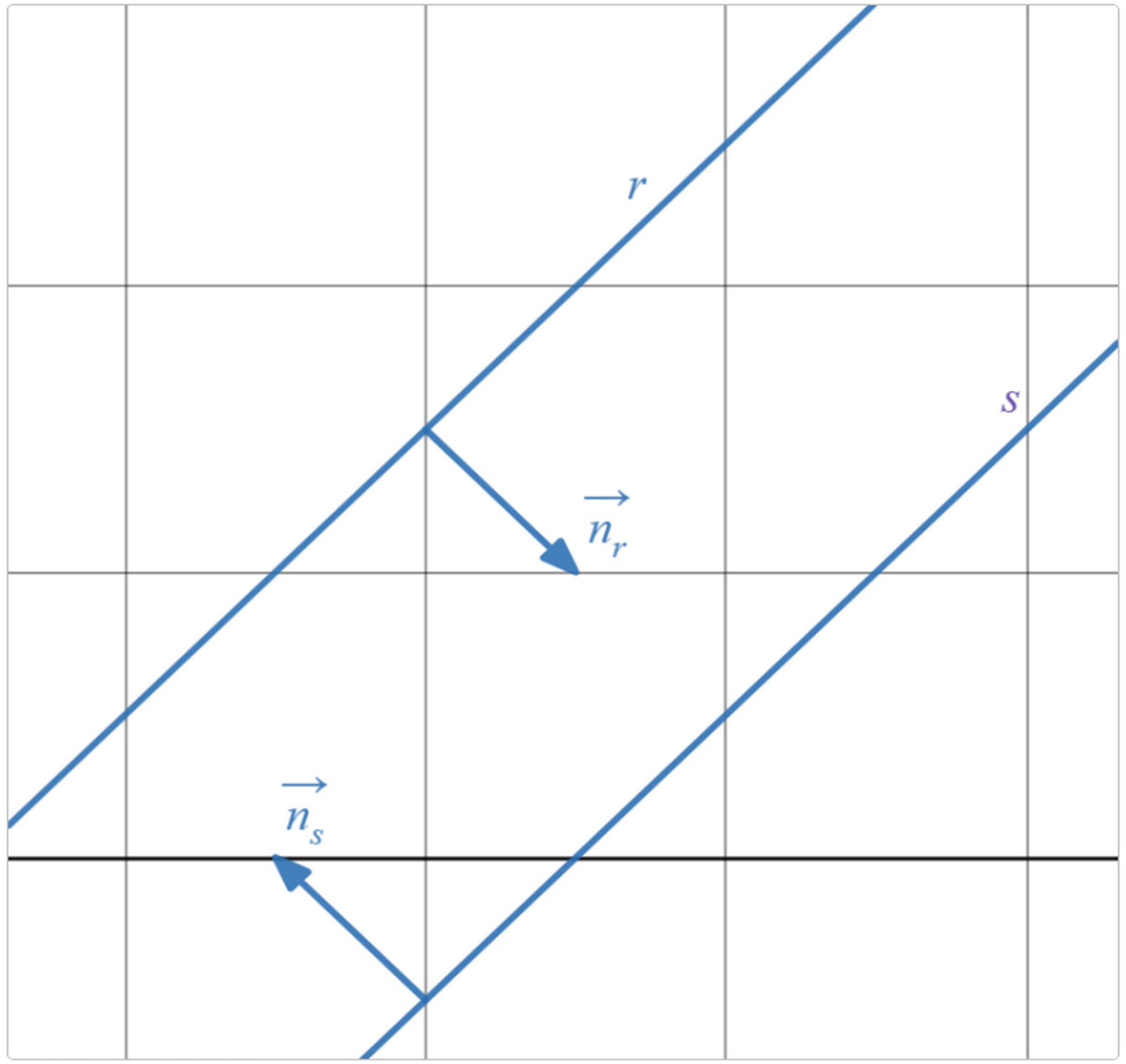
Se além disso tivermos $c_1 = t \cdot c_2$, então r e s são coincidentes

$$a_1x + b_1y + c_1 = t \cdot a_2x + t \cdot b_2y + t \cdot c_2 = t \cdot (a_2x + b_2y + c_2)$$

Exemplo:

As retas r_1: $5x + 15y + 10$ e r_2: $x + 3y + 2 = 0$ são coincidentes, pois temos que $r_1 = t \cdot r_2$

$x + 3y + 2 = t \cdot (x + 3y + 2)$,ou seja, $t = 5$.



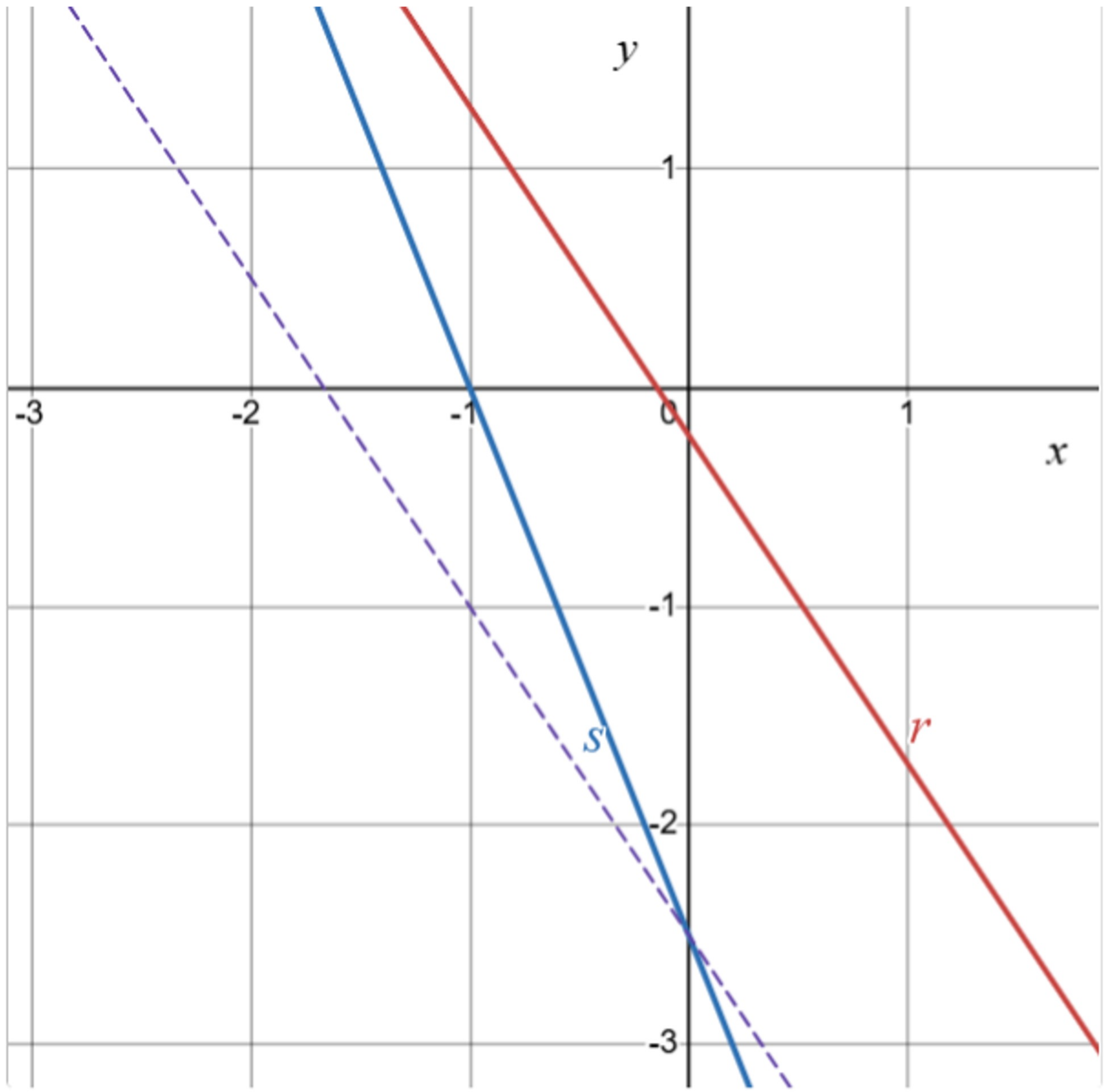
Fonte: Autoria própria

Fig.2: Página 2 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"

Considere as retas r: $21x + 14y + 3 = 0$ e s: $ax + 2y + 5 = 0$. Para que essas retas sejam paralelas, o valor de a deve ser igual a...

- ( ) 7
- ( ) 2
- ( ) 3
- (•) 5

Resposta incorreta😬👀! Como os coeficientes a e b da equação geral da reta representam o vetor normal da reta, neste caso, $\vec{n_r} = (21,14)$ é o vetor normal da reta r. Portanto, para que as retas r e s sejam paralelas, o vetor normal da reta s deve ser tal que $\vec{n_r} = t\vec{n_s}$. Sendo assim, se $a = 3$, já que $\vec{n_s} = (a,2)$ é o vetor normal da reta s, então teremos $\vec{n_s} = (3,2)$. E t é igual a 7, já que $\vec{n_r} = t\vec{n_s} = \vec{n_r} = (21,14) = 7\vec{n_s} = 7(3,2) = (21,14)$.



Fonte: Autoria própria

Fig.4: Página 4 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"

Perpendicularismo entre retas

No caso de equações paramétricas e simétricas de duas retas, basta verificar se

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = 0$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$

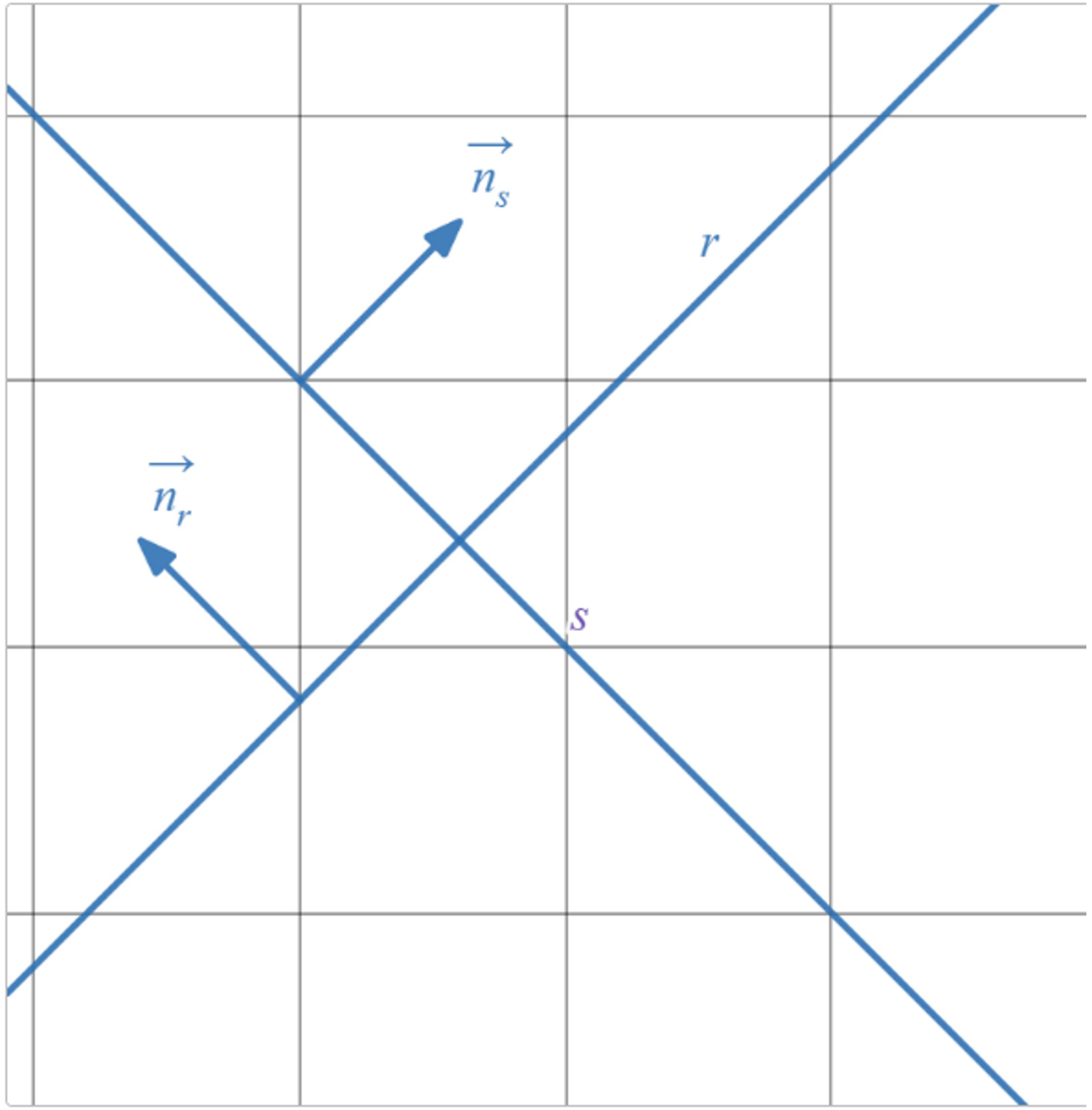
No caso de equações gerais, sendo as equações das retas r e s iguais a

$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$,

logo $\vec{n}_r = (a_1, b_1)$ e $\vec{n}_s = (a_2, b_2)$.

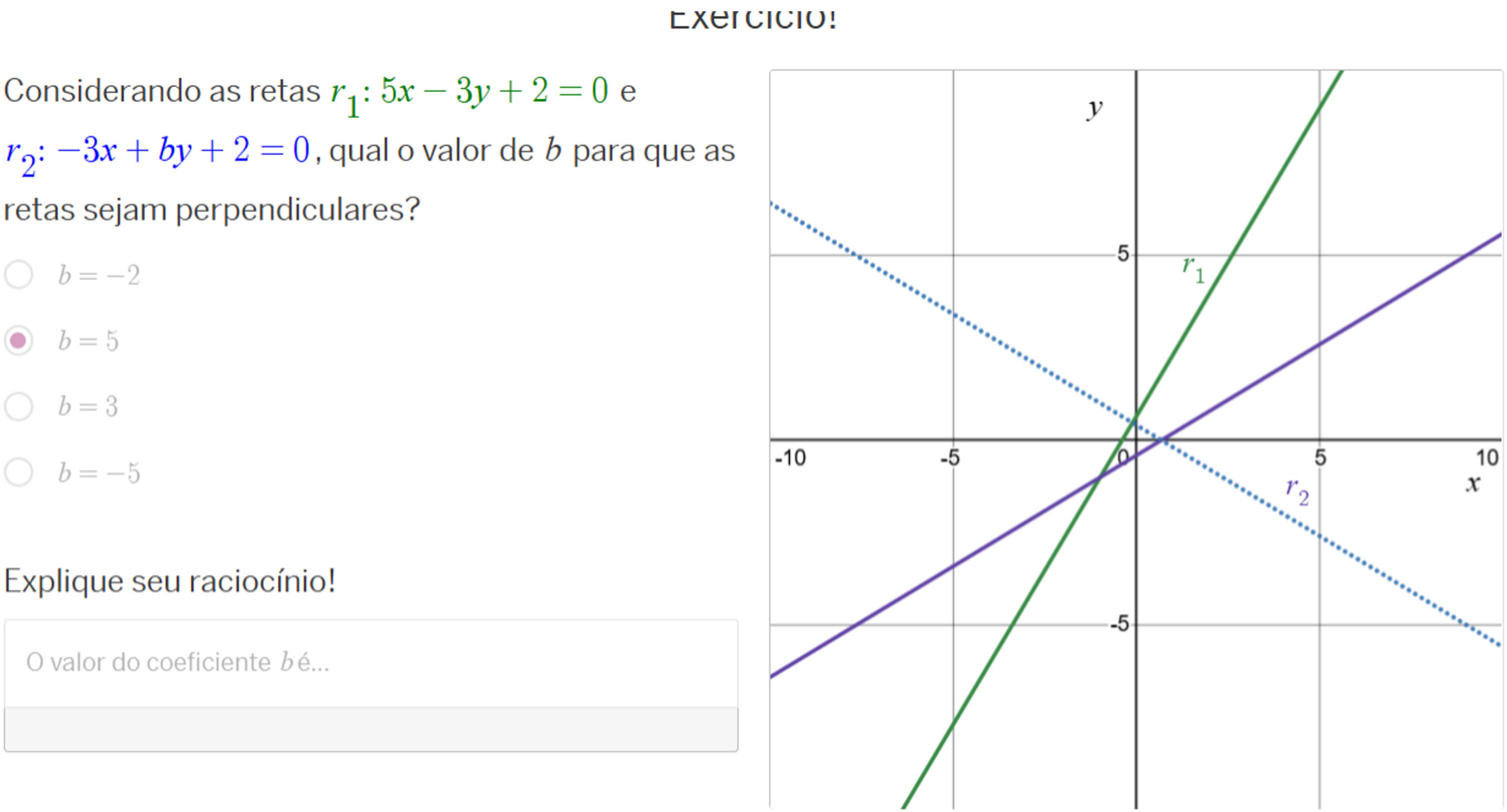
Então r e s serão perpendiculares se

$$\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s = 0$$



Fonte: Autoria própria

Fig.5: Página 5 da atividade “Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$”



Fonte: Autoria própria

Fig.6: Página 6 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"

Equações reduzidas

No caso de equações reduzidas:

$r: y = m_1x + h_1$ e $s: y = m_2x + h_2$

Passamos tais equações para forma geral:

$r: -m_1x + y - h_1 = 0$, $s: -m_2x + y - h_2 = 0$

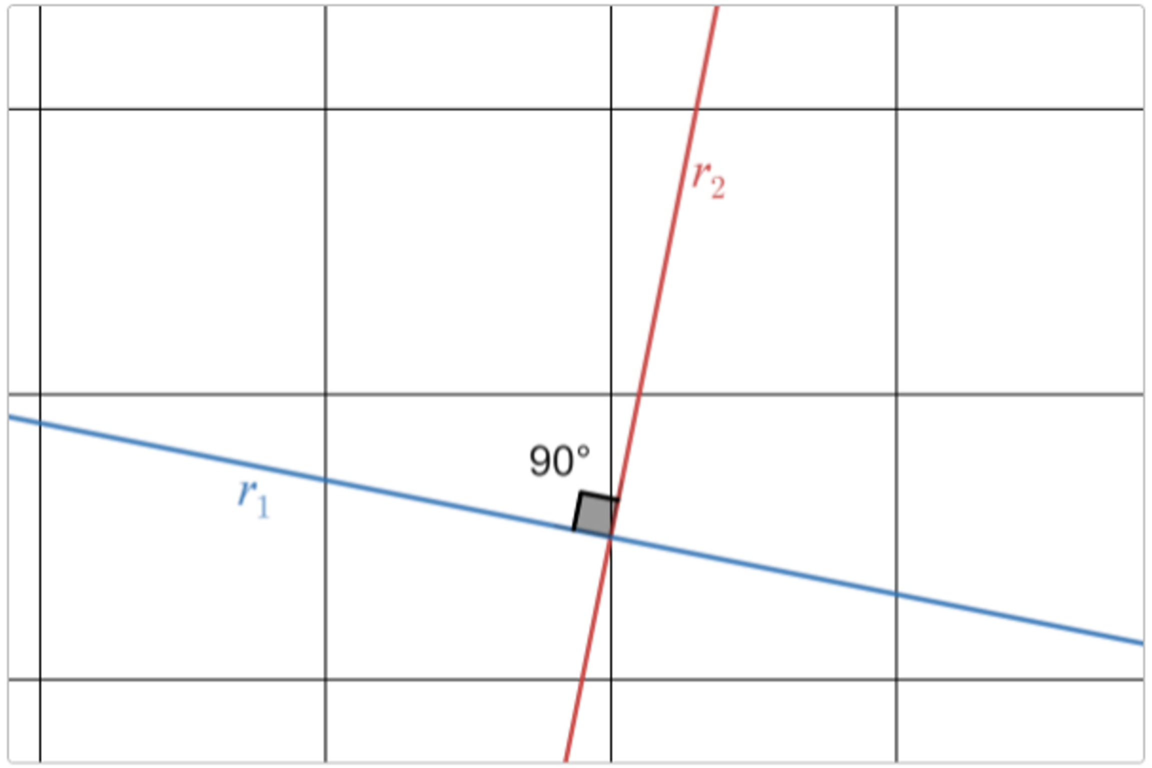
temos que $\vec{n_r} = (-m_1, 1)$ e $\vec{n_s} = (-m_2, 1)$

Se $r \perp s$, então $\vec{n_r} \cdot \vec{n_s} = 0$, ou seja,

$(-m_1, 1) \cdot (-m_2, 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(-m_1) \cdot (-m_2) + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_2 = \frac{-1}{m_1}$



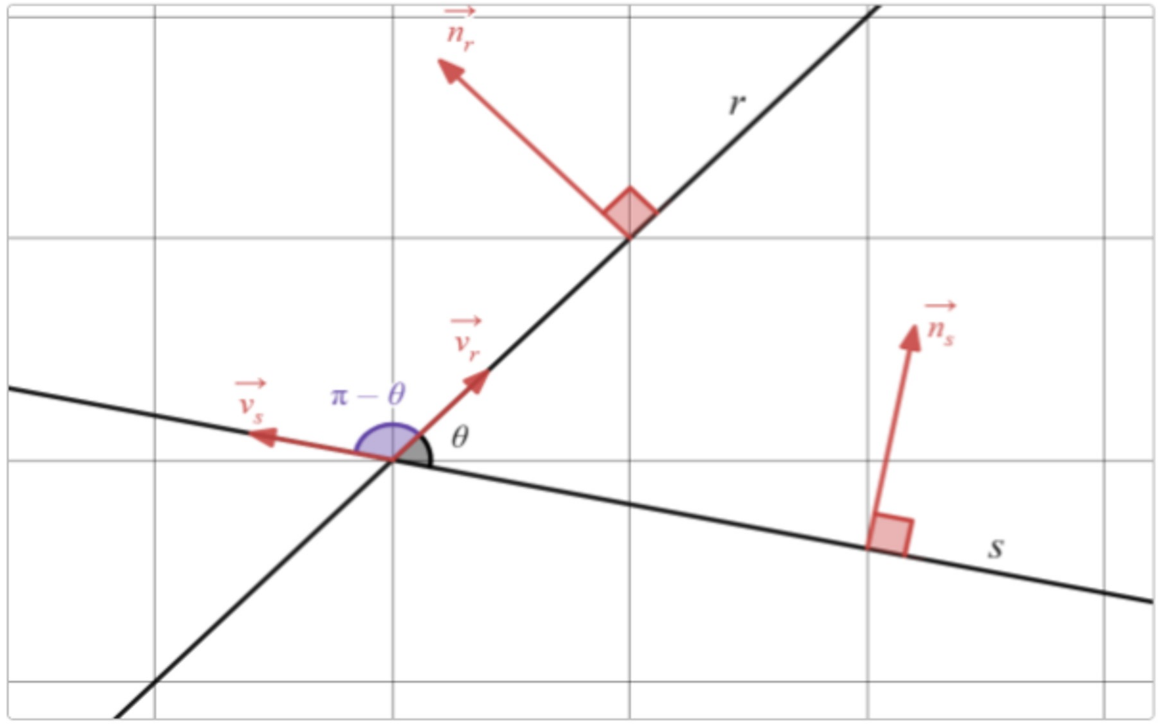
Por exemplo, considere as retas $r_1: y = 5x - 1$ e $r_2: y = -\frac{1}{5}x - 1$. Elas são perpendiculares. Pois como $m_{r_1} = 5$ e $m_{r_2} = -\frac{1}{5}$, logo $m_{r_1} \cdot m_{r_2} = -1$

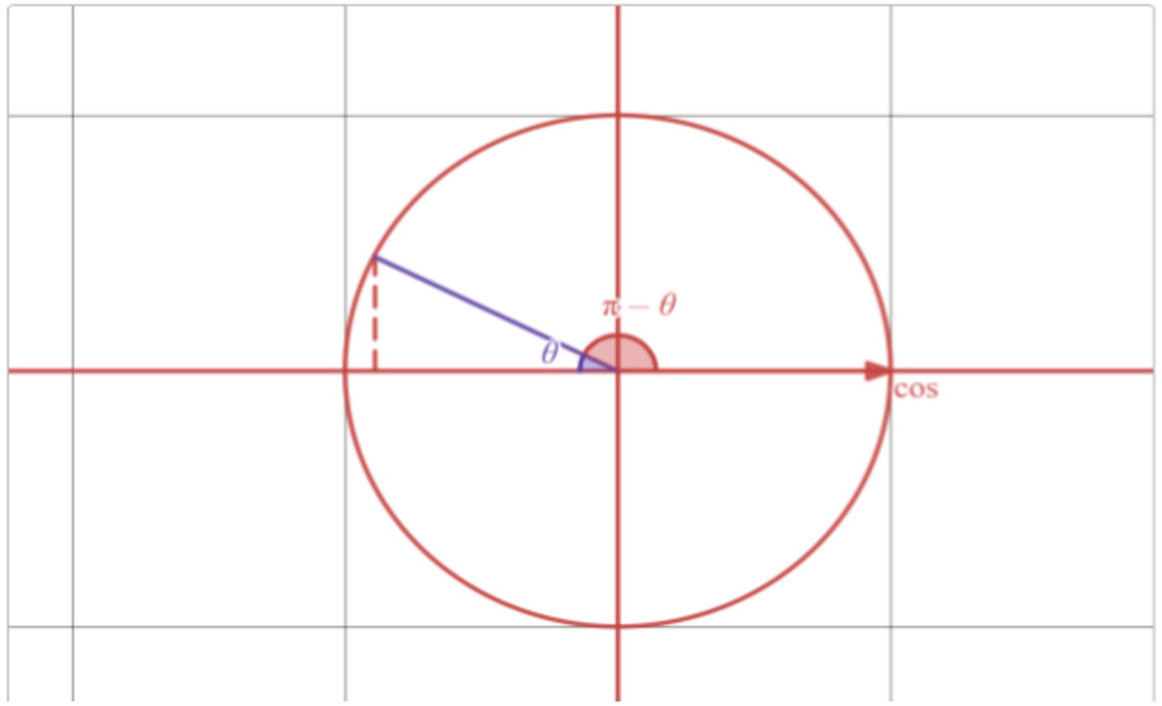
$\Rightarrow 5 \cdot (-\frac{1}{5}) = -1$

Fonte: Autoria própria

Fig.8: Página 8 da atividade “Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$”

Agora, se r e s não são paralelas, coincidentes ou perpendiculares, então são concorrentes, com um ângulo θ entre elas:



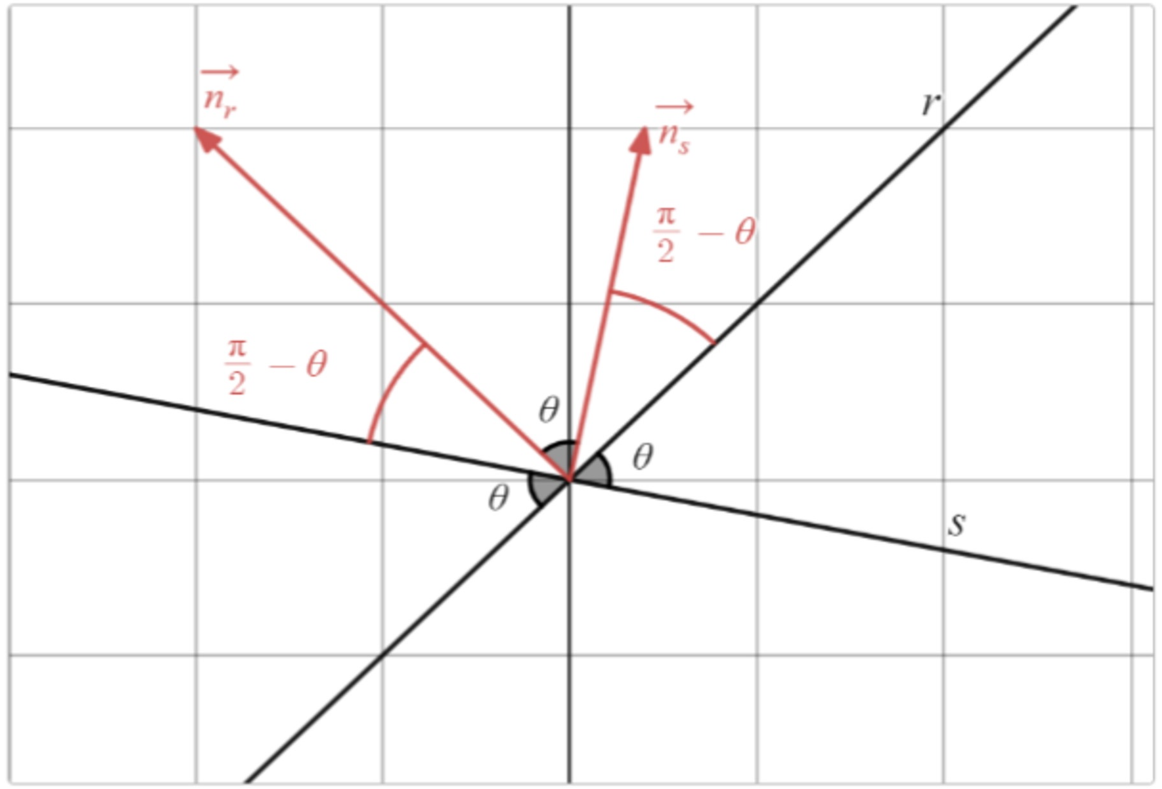


Logo, temos que:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = \|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\| \cdot \cos(\pi - \theta)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = \|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\| \cdot (-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{\|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\|}$$



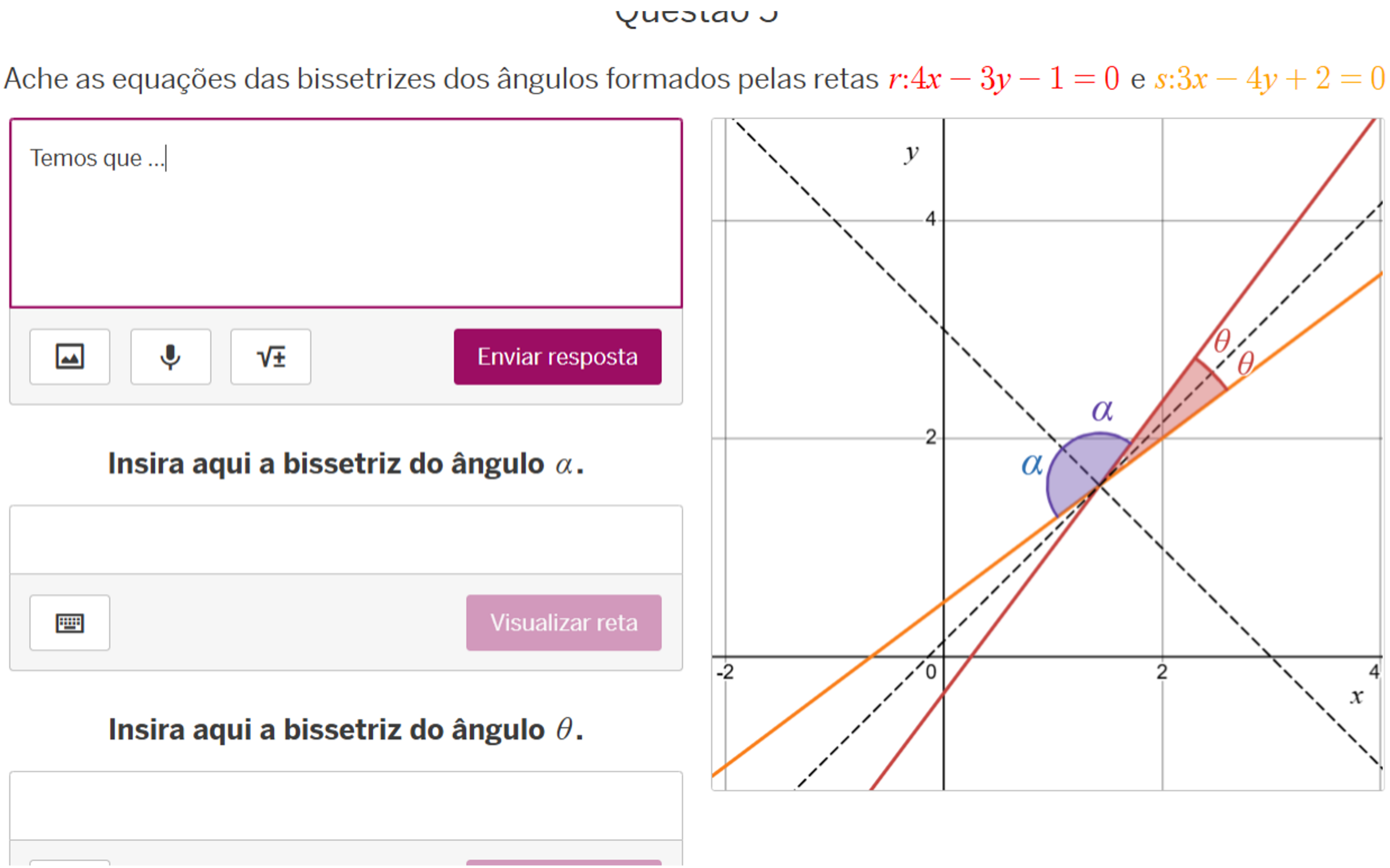
Consequentemente:

$$\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s = \|\vec{n}_r\| \cdot \|\vec{n}_s\| \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{\|\vec{n}_r\| \cdot \|\vec{n}_s\|}$$

Fonte: Autoria própria

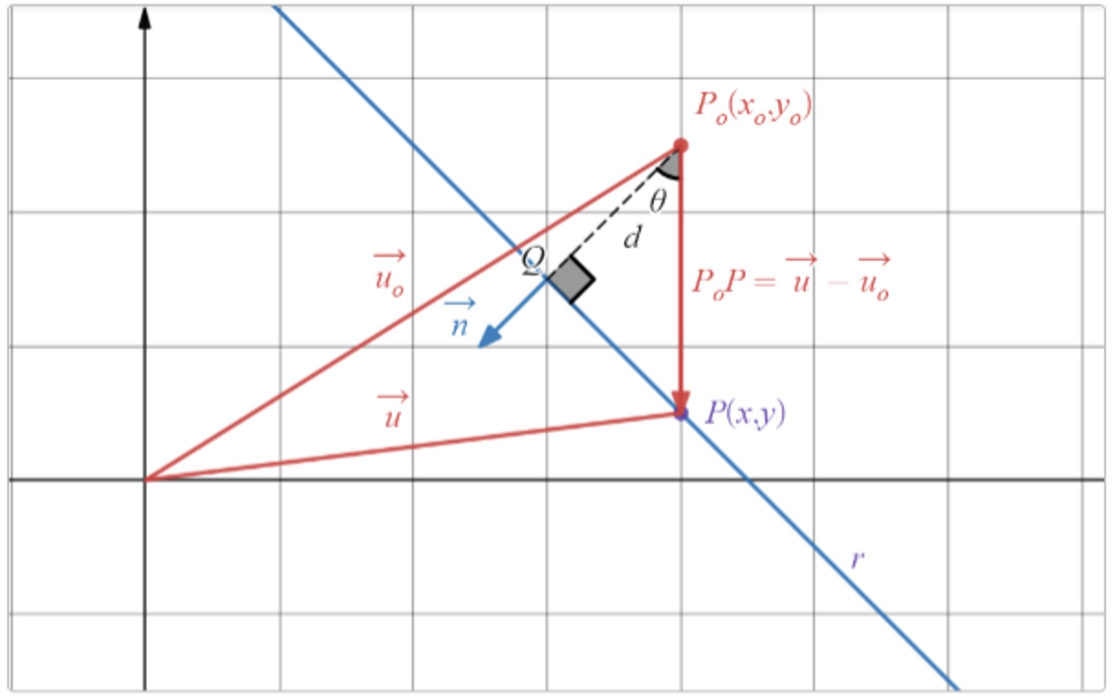
Fig.12: Página 6 da atividade "`Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$"

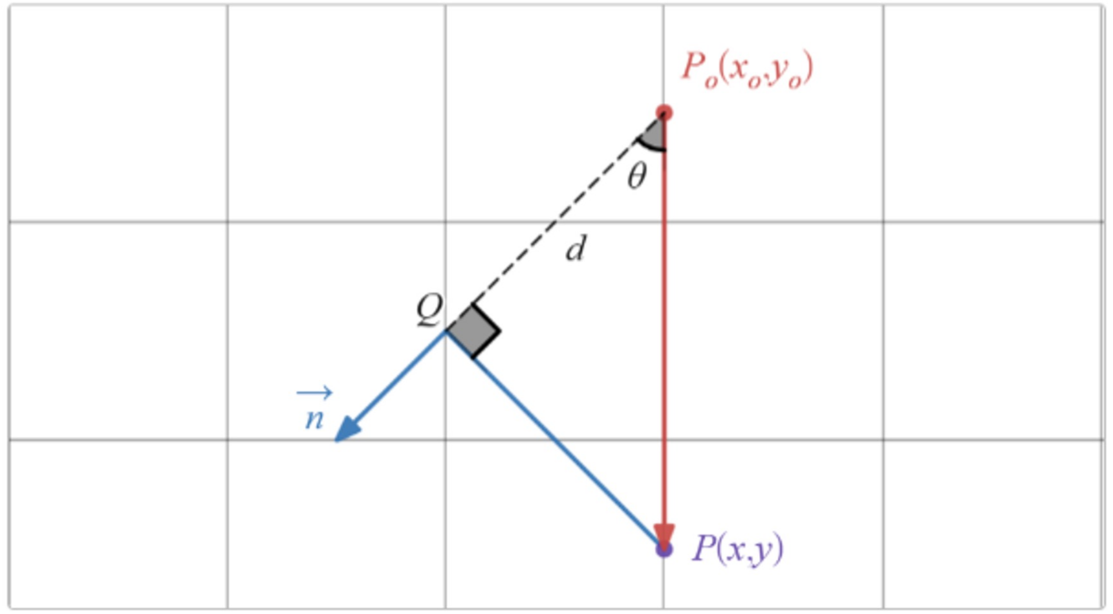


Fonte: Autoria própria

Fig.13: Página 1 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

Sendo a reta r: $ax + by + c = 0$ e ponto $P_o = (x_o, y_o)$, a distância (d) entre esse ponto e a reta r é calculada da seguinte forma:





Visualize esse gráfico mais detalhadamente em

Sendo $\vec{n} = (a,b)$ o vetor normal da reta r, teremos então que:

$$\cos\theta = \frac{d}{\|\vec{u} - \vec{u}_o\|} \Rightarrow d = \|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \cos\theta \ (I)$$

Mas também temos que

$$\cos\theta = \frac{(\vec{u} - \vec{u}_o)\cdot\vec{n}}{\|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \|\vec{n}\|} \ (II). \text{ Daí}$$

$$d = \|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \frac{|(\vec{u} - \vec{u}_o)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u} - \vec{u}_o\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{|(\vec{u} - \vec{u}_o)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

E como

$$(\vec{u} - \vec{u}_o)\cdot\vec{n} = (x - x_o, y - y_o)\cdot(a,b) = a(x - x_o) + b(y - y_o) =$$

$$= ax + by - (ax_o + by_o) =$$

$$= -c - (ax_o + by_o) = -(ax_o + by_o + c). \text{ Vem que}$$

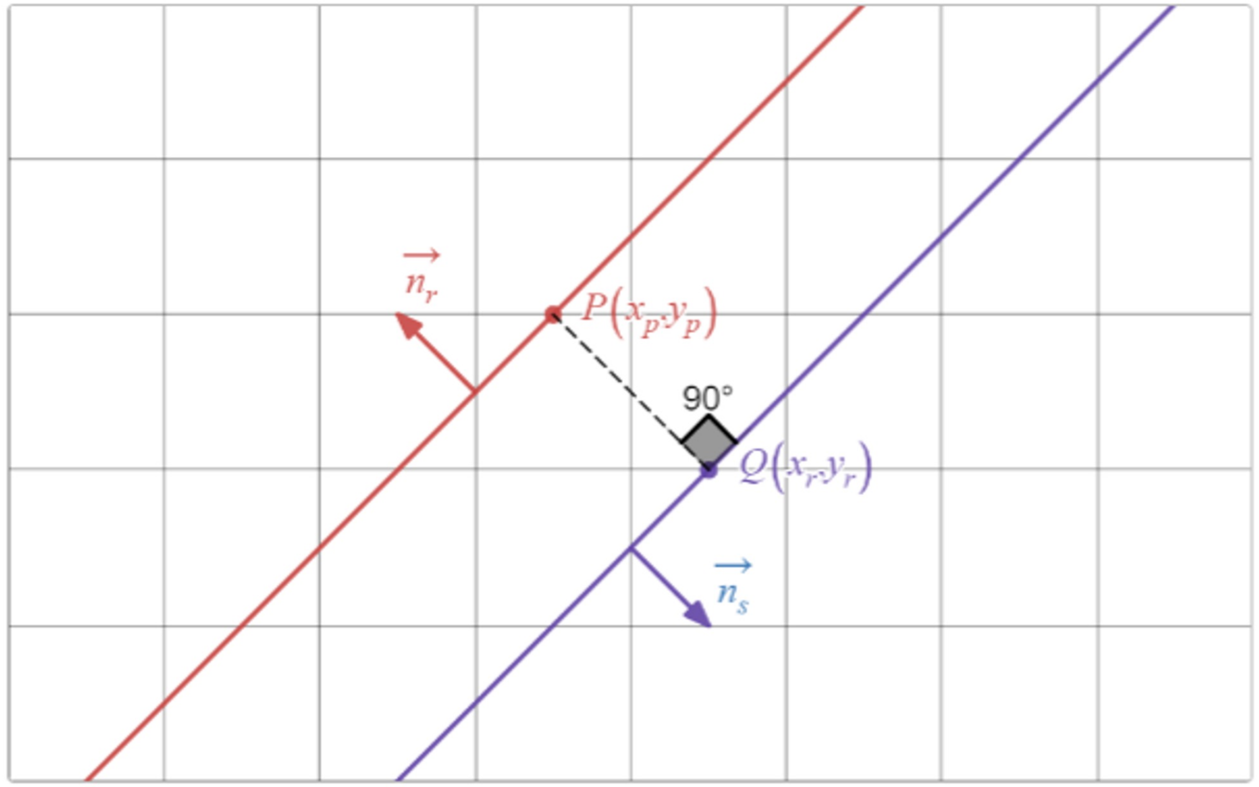
$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Fonte: Autoria própria

Fig.15: Página 3 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

Distância entre duas retas paralelas do $\mathbb{R}^2$

$r: a_r x + b_r y + c_r = 0$ e $s: a_s x + b_s y + c_s = 0$, sendo paralelas. Então temos que $\vec{n_r} = t\vec{n_s}$. Isso nos permite afirmar então que
dividida por uma constante não nula k_r, e a equação de s pode ser dividida por uma constante não nula k_s que nos permita escre



$r: ax + by + \frac{c_r}{k_r} = 0$ e $s: ax + by + \frac{c_s}{k_s} = 0$. Daí

$d_{Ps} = \frac{|ax_p + by_p + \frac{c_s}{k_s}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Mas $P(x_p, y_p) \in r$, logo

$$d_{rs} = \frac{|\frac{c_s}{k_s} - \frac{c_r}{k_r}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Atente-se que a fórmula só é valida quando as equações de r e s têm os mesmos coeficientes a b!

Fonte: Autoria própria

Fig.17: Página 5 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

(*GEOMETRIA ANALÍTICA, Coleção PROFMAT* 2017. *EXEMPLO* 3, *P*.92) Determine as equações das retas paralelas à reta $r: x + 2y = 2$ ques distam 5 unidades de r.

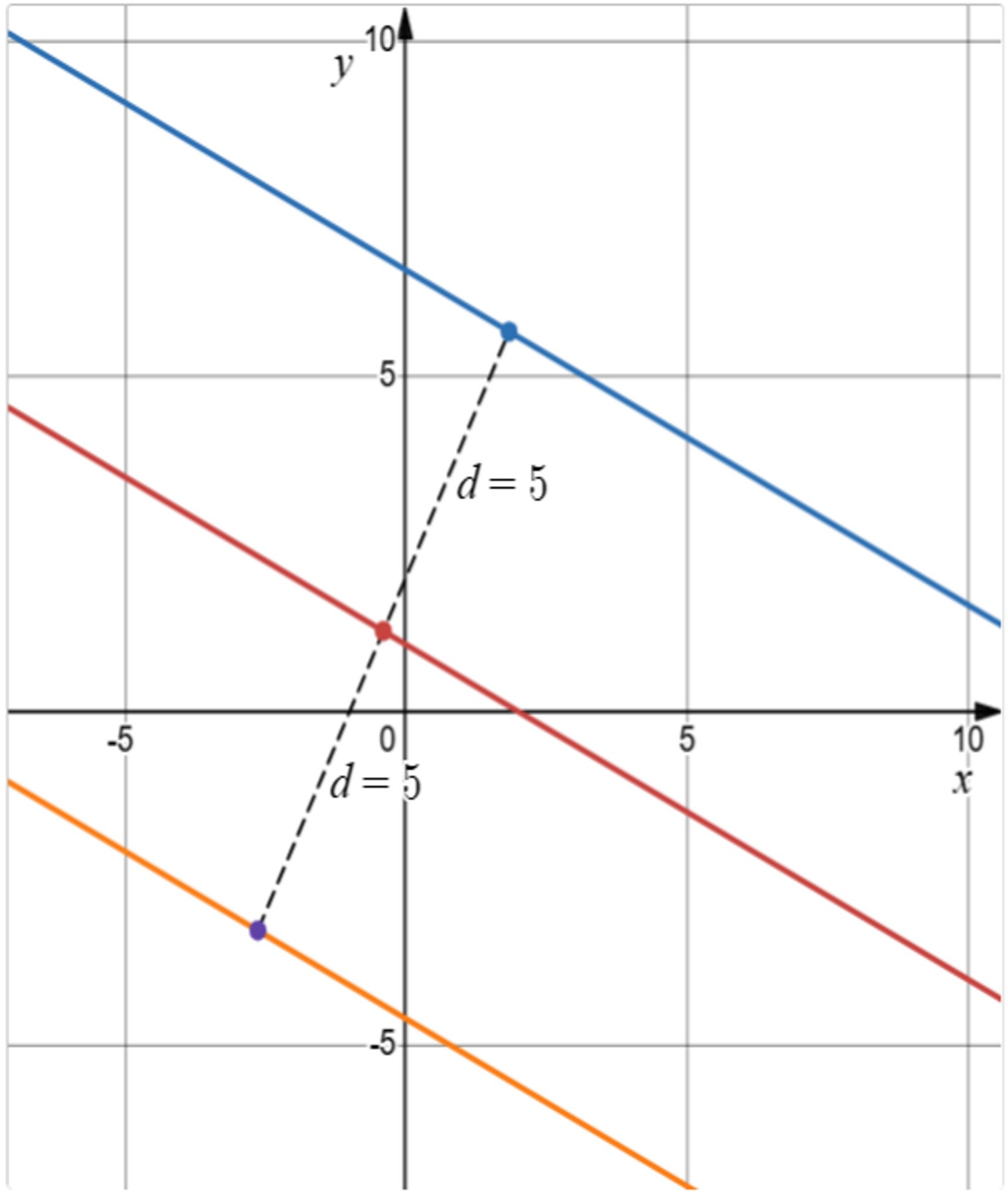
Solução. Seja $s: x + 2y = c$ uma reta paralela à reta r. Temos,

$$d(r,s) = 5 \Leftrightarrow \frac{|c-2|}{\sqrt{2^2+1^1}} = 5 \Leftrightarrow |c-2| = 5\sqrt{5}\,.$$

Logo, $c = 2 + 5\sqrt{5}$ ou $c = 2 - 5\sqrt{5}$, ou seja,

$s_1: x + 2y = 2 + 5\sqrt{5}$ e $s_2: x + 2y = 2 - 5\sqrt{5}$,

são as retas paralelas a r que distam 5 unidades da reta r.



Fonte: Autoria própria

Fig.19: Página 7 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

Desigualdades Lineares e Regiões no Plano

Dado que uma reta particiona $\mathbb{R}^2$ em semiplanos, se temos r: $ax + by > k$, então um semiplano será definido por $ax + by > k$ e o outro por $ax + by < k$.

Sejam $\vec{n} = (a,b)$ o vetor normal de r, a reta

$$s: \begin{cases} x = ta \\ y = tb \end{cases}$$

perpendicular a r, e P o ponto de interseção entre r e s.

Como $P \in r$ e $P \in s$, então

$a \cdot (ta) + b \cdot (tb) = k$

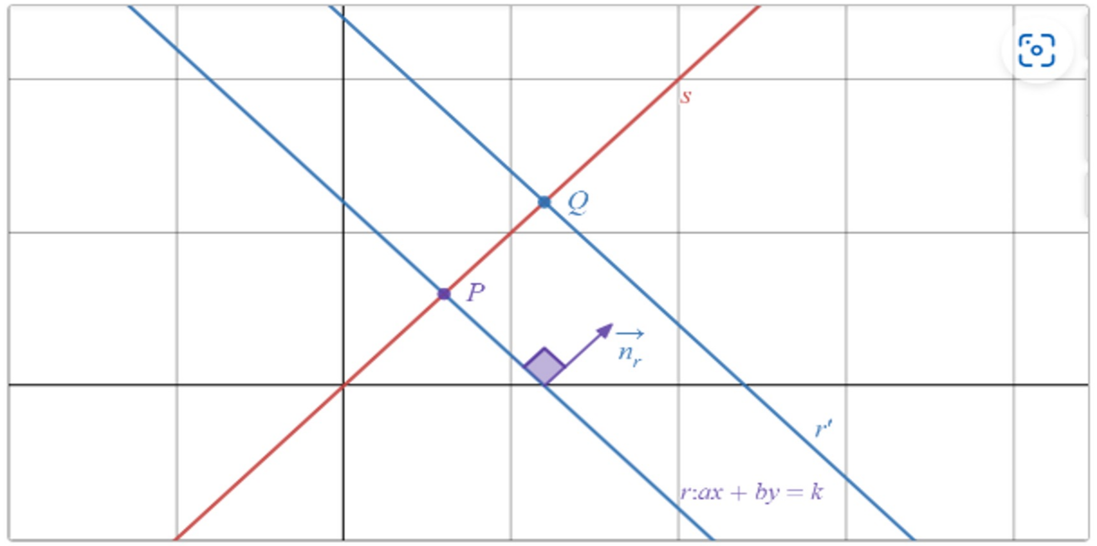
$a^2t + b^2t = k$

$t\left(a^2 + b^2\right) = k \;\Rightarrow\; t = \dfrac{k}{a^2 + b^2}$

Logo $P(x,y) = \left(\dfrac{ka}{a^2 + b^2}, \dfrac{kb}{a^2 + b^2}\right)$

Vamos considerar uma reta r' que é paralela a r. A partir dela, escolhemos um ponto $Q(x',y')$, que representa o ponto de interseção entre r' e s.

Dado que $r'//r$, temos que $ax + by = k'$ onde $(k' \neq k)$.



Como $Q \in r'$ e $Q \in s'$, então

$ax' + by' = k'$ ou ainda

$a \cdot (t'a) + b \cdot (t'b) = k'$

$t' \cdot a^2 + t' \cdot b^2 = k' \Rightarrow t' = \dfrac{k'}{a^2 + b^2}$. Daí

$Q(x',y') = \left(\dfrac{k'a}{a^2 + b^2}, \dfrac{k'b}{a^2 + b^2}\right)$.

Consequentemente o vetor $\overrightarrow{PQ}$ será

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \cdot (k' - k), \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot (k' - k)\right)$$

$$= \frac{k' - k}{a^2 + b^2}(a,b)$$

Fonte: Autoria própria

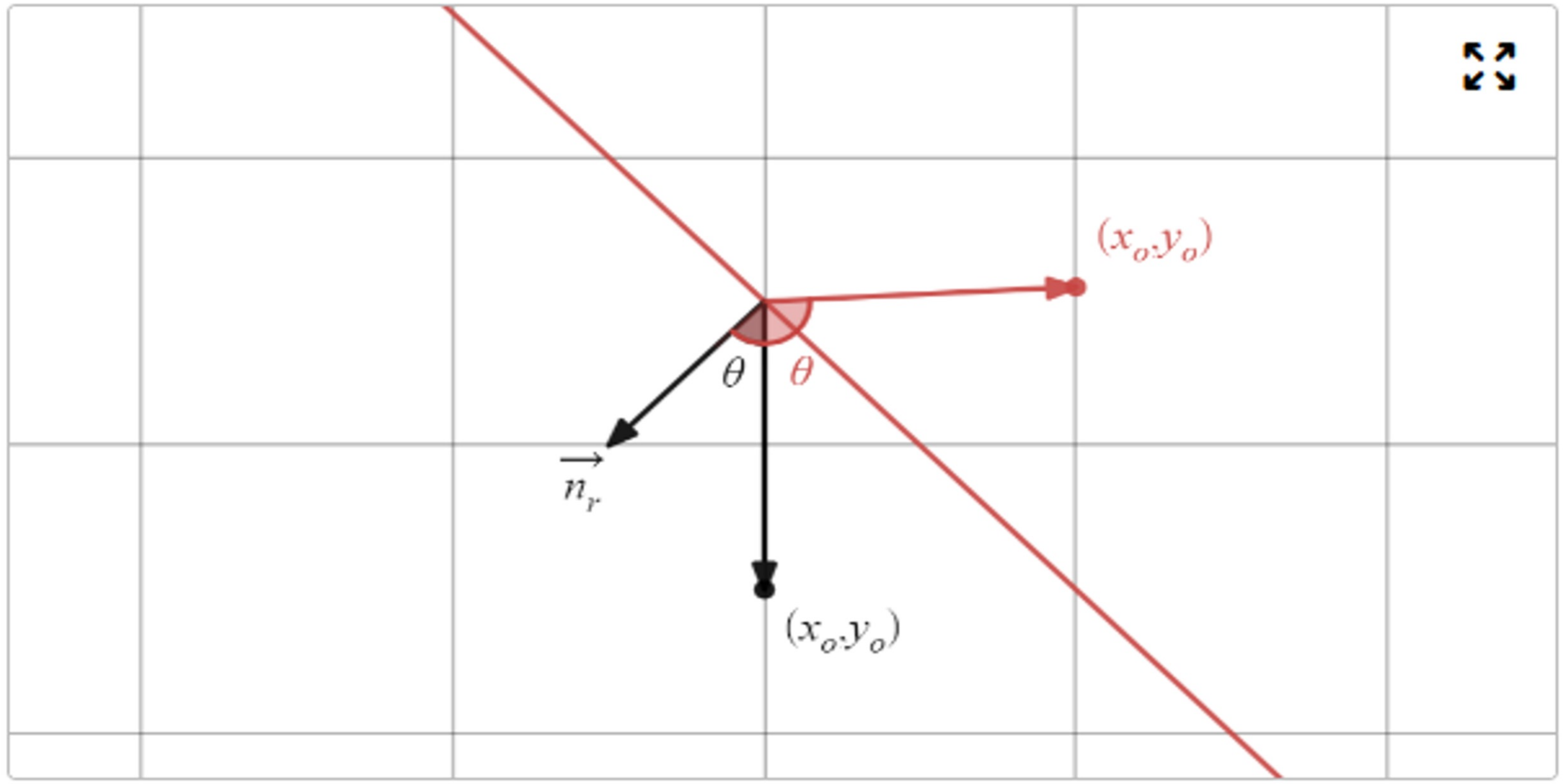
Fig.20: Página 8 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

Prosseguindo com a discussão, observamos anteriormente que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ terá a mesma direção que $\overrightarrow{n_r}$ se $k' > k$. Se não for esse o caso, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ terá a direção oposta. Considerando um ponto (x_o, y_o) no mesmo semiplano que contém k', obtemos

$$a \cdot x_o + b \cdot y_o = \overrightarrow{n_r} \cdot (x_o, y_o) = \|\overrightarrow{n_r}\| \cdot \|(x_o, y_o)\| \cdot \cos\theta$$

$ax + by > k$ ou $ax + by < k$

Se $\overrightarrow{n_r} \cdot (x_o, y_o)$ for positivo e maior que k, então (x_o, y_o) estará no mesmo semi-plano com o sentido de $\overrightarrow{n_r}$. Caso contrário, (x_o, y_o) estará no semi-plano contrário ao sentido de $\overrightarrow{n_r}$. Ou seja, o sentido do vetor normal $\overrightarrow{n_r}$ indica o semi-plano do qual todos os pontos satisfazem a desigualdade $ax + by > k$.



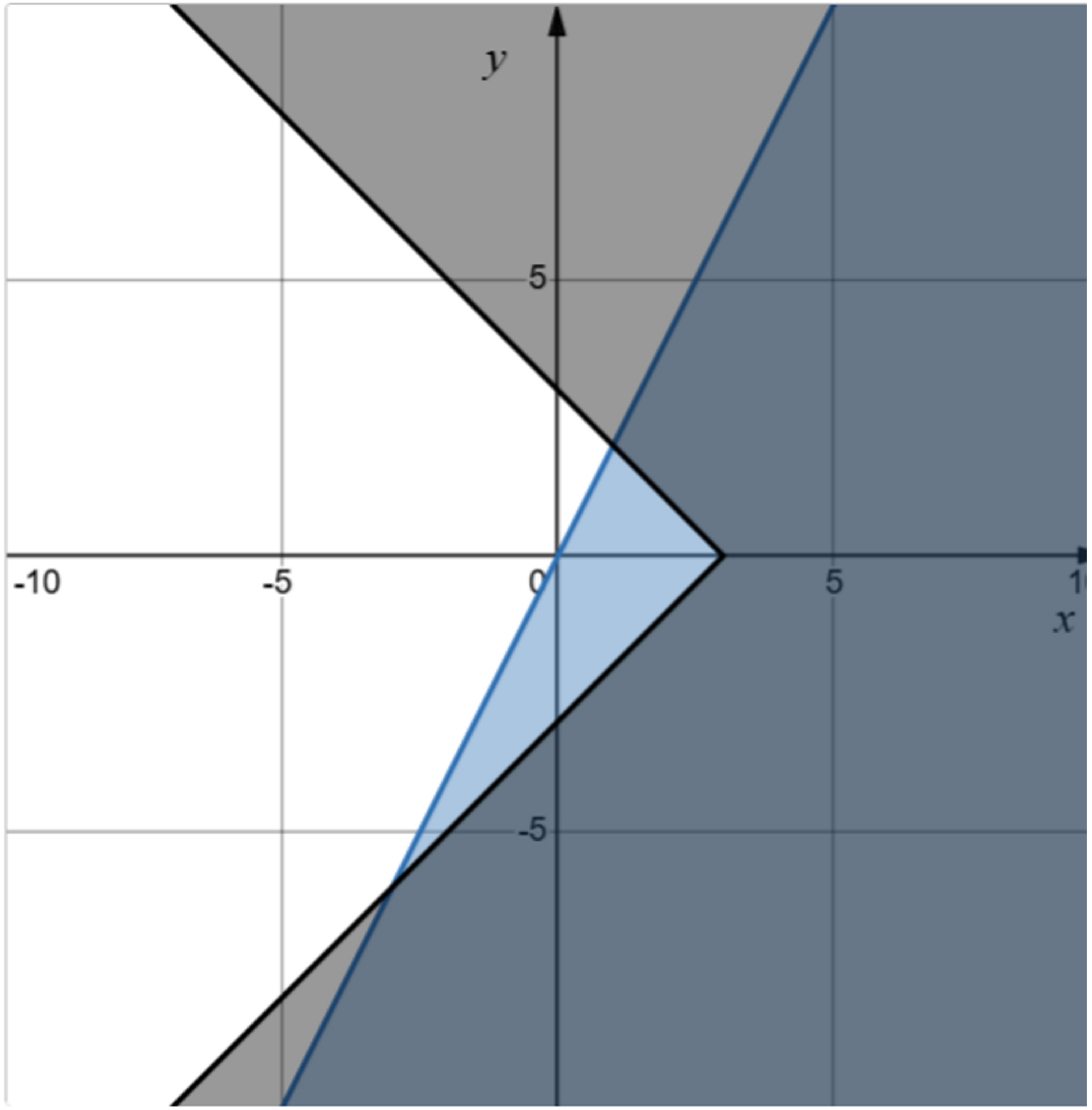
Fonte: Autoria própria

Fig.21: Página 9 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

Alguns exemplos de semiplanos

Selecione uma ou mais das inequações abaixo e visualize o semiplano definido por cada uma delas.

- [x] $y \leq 2x$
- [ ] $y \geq -x + 3$
- [ ] $|y| \leq 2x$
- [x] $|y| \geq -x + 3$



Fonte: Autoria própria

Fig.22: Página 10 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

Insira aqui também uma inequação com $\leq$ ou $\geq$ e visualize o seu semiplano correspondente no gráfico ao lado.

$x + y \geq 3$

Editar!

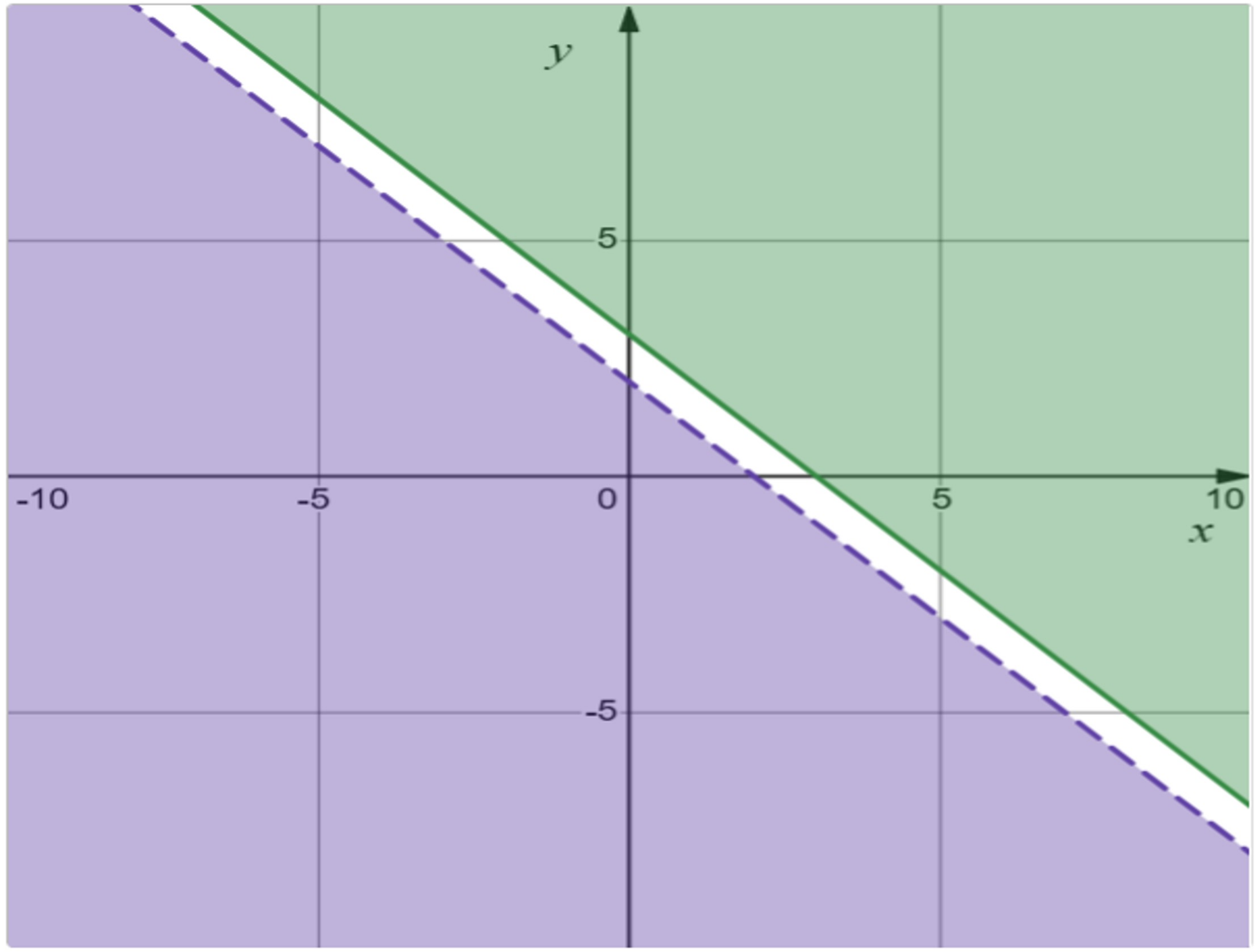
Agora, insira uma inequação com $<$ ou $>$ e observe se há alguma diferença em relação à inequação inserida anteriormente.

$x + y < 2$

Editar!

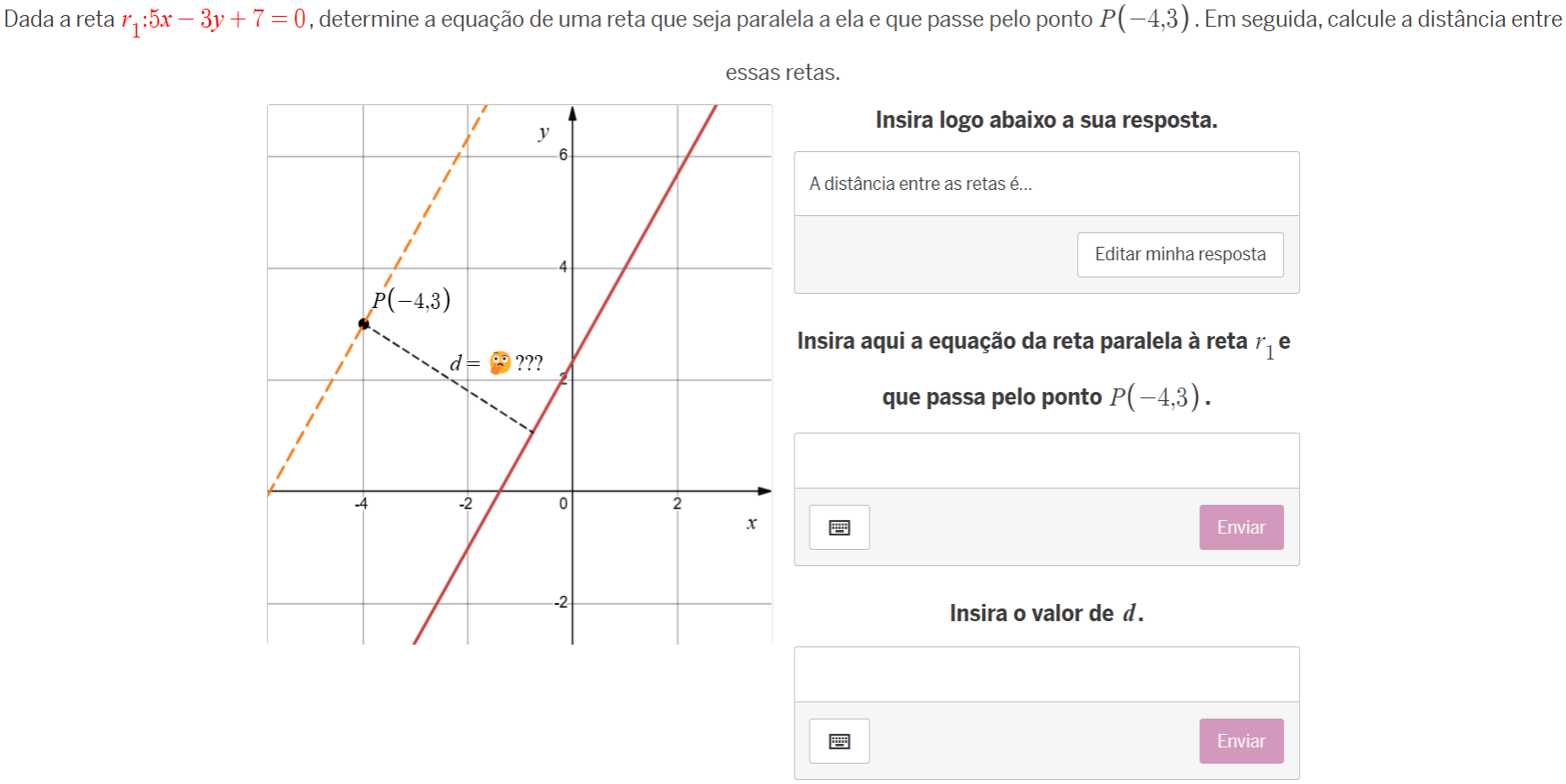
Você conseguiu identificar alguma diferença entre os semiplanos?

Enviar



Fonte: Autoria própria

Fig.25: Página 5 da atividade "Desvendando Distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$"



Fonte: Autoria própria

CONSIDERAÇÕES FINAIS

- As atividades interativas que desenvolvemos e apresentamos, utilizando o *Desmos* e sua *CL*, são uma amostra do potencial dessa ferramenta no ensino da Matemática.
- Essas atividades abordam os conceitos-chave e destacam o que cada elemento algébrico representa na figura geométrica em questão.
- As atividades podem ser exploradas em metodologias ativas de conhecimento, no uso por exemplo em Sala de Aula Invertida, Ensino Híbrido e Aprendizagem Cooperativa.
- A *classroom* possibilita organizar, monitorar e gerenciar qualquer página ou atividade, retornando inclusive que respostas dos alunos estão corretas, ou mesmo socializá-las com os demais colegas.

REFERÊNCIAS

DELGADO, J.; FRENSEI, K; CRISSAF, L. *Geometria Analítica. Coleção PROFMAT*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DESMOS, S. P. *Desmos Classroom, Computation Layer Documentation*. 2011. Disponível em: https://teacher.desmos.com/computation-layer/documentation. Acesso em: 04 de jul. 2024.

LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra Linear,* 2° ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2012

MEDEIROS, Luiz Adauto; DE ANDRADE, Nirzi Gonçalves; WANDERLEY, Augusto Maurício. *Álgebra Vetorial e Geometria.* Rio de Janeiro: EDITORA CAMPUS LTDA, 1981.

OBRIGADO PELA ATENÇÃO!