XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

COMUNICAÇÃO ORAL

Desmos e a Geometria Analítica Vetorial

Medindo Distâncias e Traçando Retas

Santos, Carlos[1] Silva, Valdelírio[2]

Resumo: *Neste trabalho objetivamos demonstrar a aplicação da Camada de Computação (CL) do Desmos na criação de atividades interativas de Geometria Analítica Vetorial. São abordados os temas como paralelismo e perpendicularismo entre retas, distância entre pontos e retas, além de determinação de regiões do plano. As atividades foram desenvolvidas com o propósito não só de explorar as funcionalidades do Desmos, como também sugerir uma sequência didática para auxiliar professores e alunos no desenvolvimento da geometria analítica com abordagem vetorial, incluindo-se nelas exercícios interativos que abordam conceitos-chave relacionados aos temas. Com este trabalho buscamos contribuir para o ensino da Matemática, apresentando o Desmos e divulgando sua CL como uma poderosa ferramenta educacional. Esperamos que alunos, professores e futuros educadores possam conhecer, utilizar e aplicar as funcionalidades que a plataforma oferece.*

Palavras-chave:*Atividades Interativas, Camada de Computação, Desmos, Ensino da Matemática, Geometria Analítica Vetorial.*

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica Vetorial é uma das áreas da Matemática que permite a visualização e compreensão de conceitos complexos através de representações geométricas. Tais representações são de extrema importância para o entendimento dos conteúdos dessa área. O uso de ferramentas digitais para ilustrar essas representações é de grande contribuição, pois permite apresentar e demonstrar representações geométricas complexas,

[1]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: carlosedsantos77@gmail.com
[2]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: valdel@ufpa.br

as quais precisam ser ilustradas com bastante cuidado, já que cada aspecto é crucial na representação geométrica de uma equação algébrica.

Nesse sentido, ao utilizar ferramentas digitais para o ensino de Geometria Analítica, é importante observar e destacar cada aspecto que deduz a representação geométrica, para que possa ficar entendido o que cada elemento algébrico representa na figura geométrica. Neste trabalho, exploramos o potencial da *CL* (*Computation Layer*) do *Desmos*, uma plataforma digital interativa de Ensino de Matemática. Confeccionamos atividades interativas que abordam conceitos de Geometria Analítica Vetorial, como paralelismo e perpendicularismo entre retas, distância entre pontos e retas, e a análise de regiões do plano.

As atividades incluem exercícios interativos que exploram conceitos-chave utilizando as funcionalidades interativas do *Desmos*. Essa abordagem dinâmica visa contribuir para o ensino da Matemática, destacando o *Desmos* e sua *CL* como ferramentas educacionais de grande potencial, associando os recursos de desenvolvimento teórico da geometria analítica a uma perspectiva de construção vetorial. Nosso objetivo é enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, inspirando outros a explorar o potencial dessas ferramentas.

2 Atividades Desenvolvidas

Primeiramente, para criar uma atividade dentro do *Desmos*, é necessário criar uma conta no Desmos Teacher. Após isso, teremos acesso à plataforma e poderemos confeccionar nossas próprias atividades, além de poder acessar, copiar e editar atividades pré-elaboradas disponíveis na plataforma.

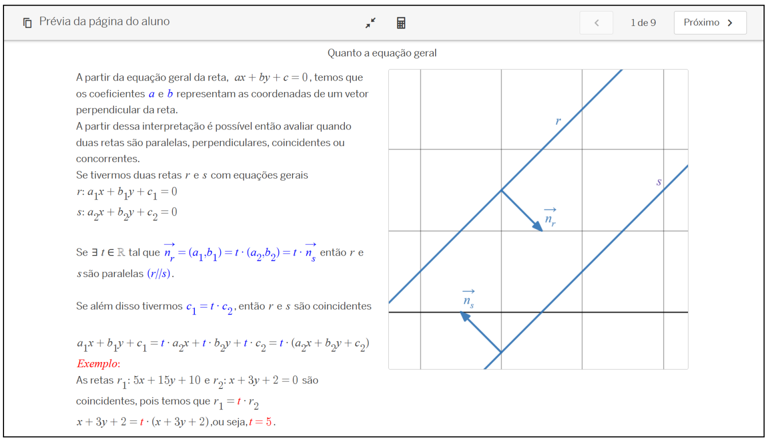
2.1 Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$

Nesta atividade abordamos os conceitos de paralelismo e perpendicularismo entre retas no $\mathbb{R}^2$, além de outros conceitos fundamentais relacionados a esse tema em Geometria Analítica. Utilizamos as funcionalidades do *Desmos* para tornar a atividade interativa. A primeira página desta atividade aborda a definição e interpretação de retas paralelas e coincidentes através da equação geral. Exploramos também o vetor normal da reta, determinado pelos coeficientes a e b da equação geral da reta. Além disso, apresentamos um exemplo que ilustra o motivo pelo qual duas retas específicas são coincidentes. A página 1 da atividade está ilustrada na figura 1.

Na página 2 da atividade é proposto um exercício que pede a seleção do valor do coeficiente a para que as retas sejam paralelas. Se a opção escolhida for incorreta, uma reta com o coeficiente a selecionado é plotada, acompanhada de uma explicação sobre porque a opção selecionada não é correta. Se a opção correta for selecionada, a reta correspondente também é plotada no gráfico, criando assim um ambiente de aprendizado interativo e reforçador. Esta página tem como objetivo avaliar o conhecimento obtido na página anterior e esclarecer eventuais dúvidas que ainda possam existir sobre o conteúdo apresentado. A página 2 da atividade está configurando-se na figura 2 abaixo.

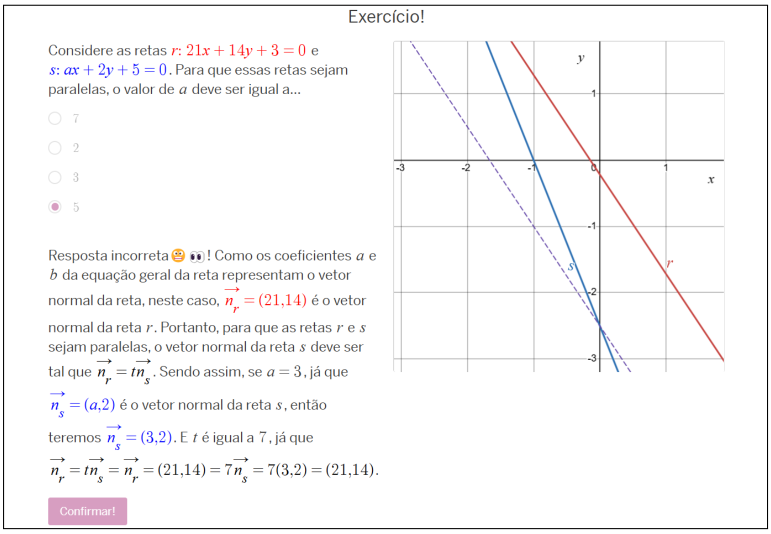
Prosseguindo com a apresentação da atividade, a página 3 (figura 3) demonstra as condições sob as quais as retas serão paralelas ou coincidentes, mediante avaliações das

Fig. 1: Página 1 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"



Fonte: Autoria própria

Fig. 2: Página 2 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"



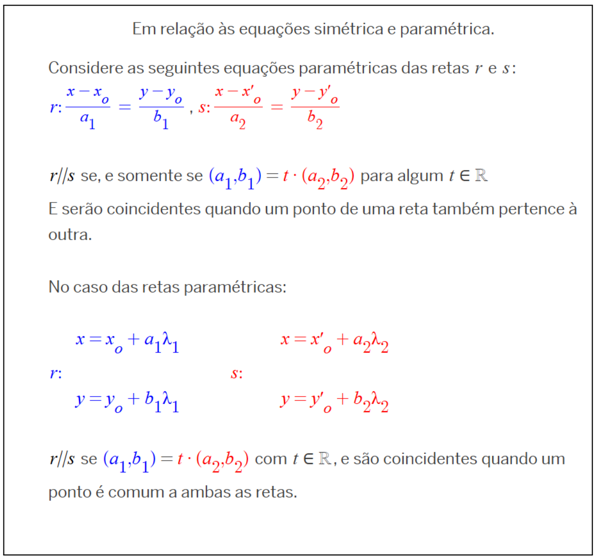
Fonte: Autoria própria

equações simétricas e paramétricas da reta. Já na página 4, é visto quando as retas serão perpendiculares entre si, usando outra vez os vetores normais da reta, além de ilustrar em um gráfico as representações geométricas, conforme ilustra a figura 4.

Para praticar o conteúdo apresentado na página anterior, a quinta página da atividade propõe um exercício. Este exercício consiste em selecionar a alternativa que apresenta o valor correto do coeficiente b, de modo que as retas r_1 e r_2 sejam perpendiculares. Ao escolher uma das opções, uma caixa de resposta será aberta para que o aluno possa explicar seu raciocínio. Após clicar em "Enviar", uma reta será plotada com o valor selecionado para o coeficiente b. Isso permitirá ao aluno verificar se a opção que ele escolheu está correta ou não. A página que contém este exercício pode ser visualizada na figura 5.

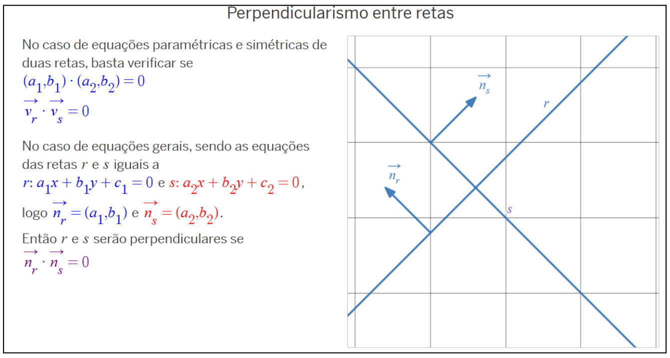
A página 6 da atividade apresenta a definição de retas perpendiculares a partir da equação reduzida. Segundo essa definição, duas retas serão perpendiculares se o produto escalar entre os vetores normais da reta for igual a zero. Ao desenvolver a equação reduzida, concluimos que duas retas serão perpendiculares se o produto dos coeficientes angulares das retas resultar em -1. A página também inclui um exemplo de duas retas

Fig. 3: Página 3 da atividade “Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$”



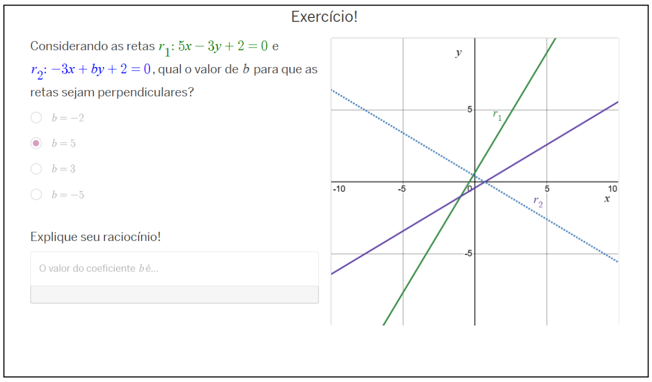
Fonte: Autoria própria

Fig. 4: Página 4 da atividade “Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$”



Fonte: Autoria própria

Fig. 5: Página 5 da atividade “Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$”

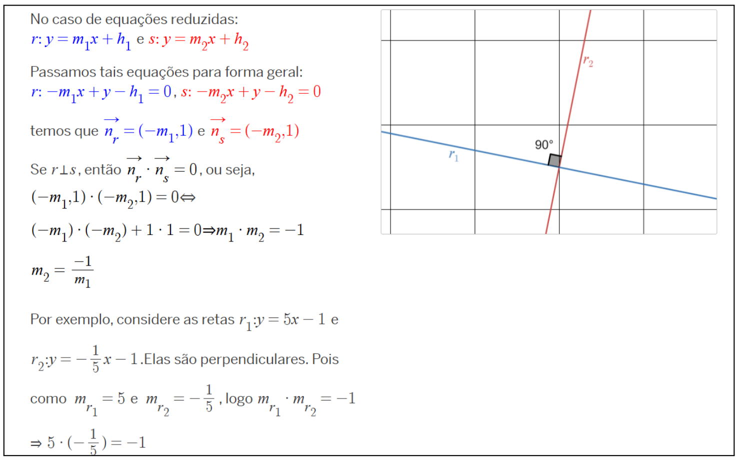


Fonte: Autoria própria

perpendiculares derivadas da equação reduzida, além de uma ilustração dessas retas perpendiculares, como ilustra a figura 6. Para exercitar os conceitos apresentados na página anterior, a sétima página da atividade propõe um exercício para determinar o valor do coeficiente angular m, de modo que a reta seja perpendicular à outra. Após submeter o valor do coeficiente, o aluno poderá inserir a equação com o valor encontrado.

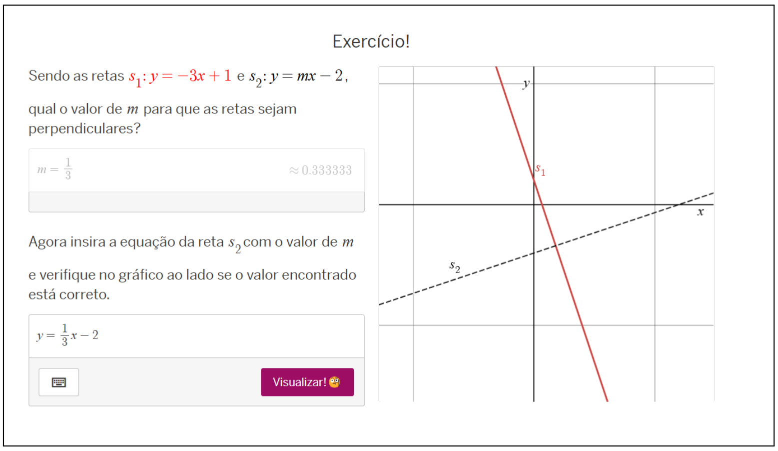
Ao clicar em "Visualizar", será plotada uma reta de cor preta correspondente à equação inserida. Dessa forma, o estudante poderá verificar instantaneamente se a sua resposta está correta ou não. A página 7 da atividade está ilustrada na figura 7.

Fig. 6: Página 6 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"



Fonte: Autoria própria

Fig. 7: Página 7 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"



Fonte: Autoria própria

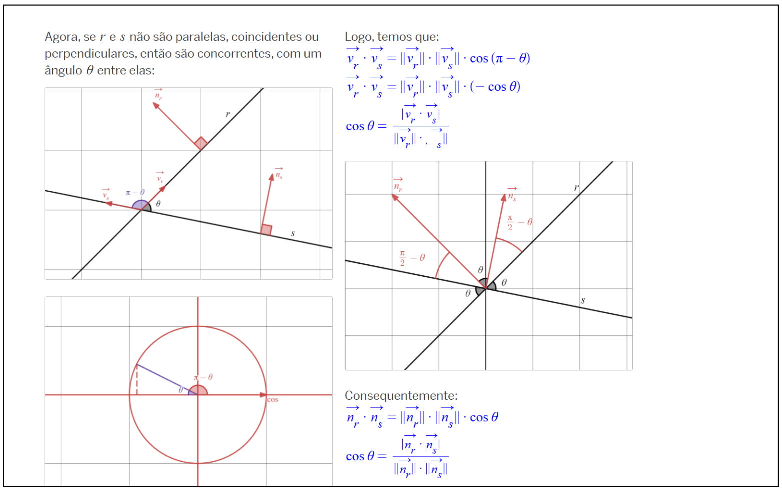
A página 8 da atividade aborda o caso em que duas retas não são paralelas, coincidentes ou perpendiculares, sendo então concorrentes, com um ângulo θ entre elas. A página apresenta gráficos com essas representações geométricas, além de demonstrações algébricas de como determinar o valor de um ângulo entre duas retas, conforme ilustrado na figura 8. A nona página da atividade apresenta um exercício sobre a determinação do valor do ângulo entre duas retas, conceito que foi abordado anteriormente na página 8. A página da atividade é ilustrada na figura 9.

A atividade completa está disponível em Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$.

2.2 Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo no $\mathbb{R}^2$

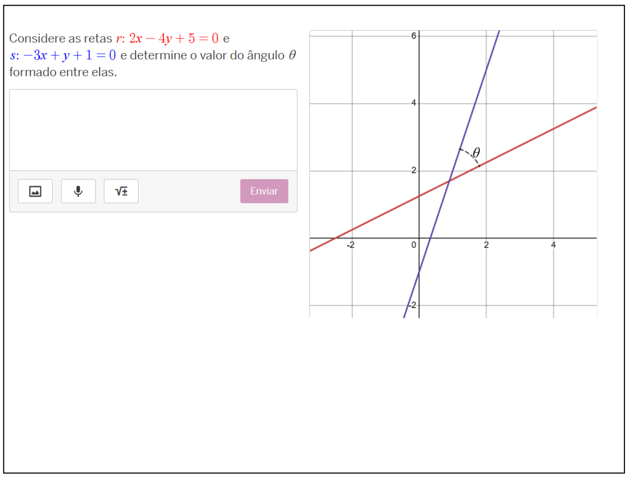
Para aplicar e avaliar o conhecimento adquirido na atividade anterior, elaboramos uma atividade complementar intitulada "Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo

Fig. 8: Página 8 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"



Fonte: Autoria própria

Fig. 9: Página 9 da atividade "Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$"



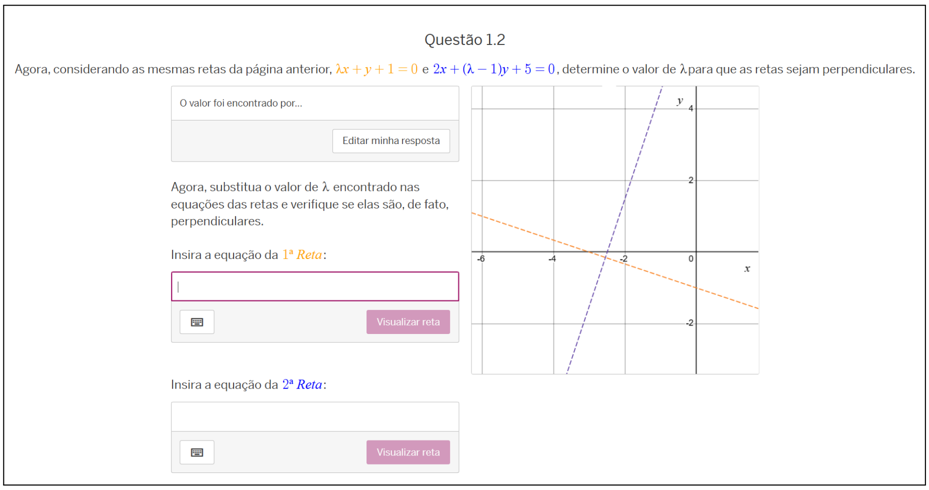
Fonte: Autoria própria

entre retas do $\mathbb{R}^2$". Esta atividade consiste em uma lista de exercícios que exploram os conceitos de paralelismo e perpendicularismo entre retas no plano cartesiano. A atividade é dinâmica e interativa. Na segunda página da atividade, é proposto um exercício para determinar o valor de λ para que as duas retas sejam perpendiculares. Após enviar a resposta, que pode ser enviada tanto pela forma escrita com equações fornecidas pelo *Desmos*, como por imagem ou até por áudio (oferecendo ao aluno mais opções para enviar sua resposta), aparecerão duas caixas de "Resposta matemática" para que os alunos possam inserir as equações já com o valor de λ encontrado, visualizando instantaneamente as retas referentes às equações inseridas ao clicar no botão de visualizar a reta. Essa página da atividade está ilustrada na figura 10.

Na página 5 da atividade, uma questão pede para determinar os demais vértices de um retângulo e a equação da reta que representa sua diagonal. Após resolver, o aluno pode inserir a equação da reta encontrada, que será plotada, possibilitando verificar se a solução está correta, como mostra a figura 11 a seguir.

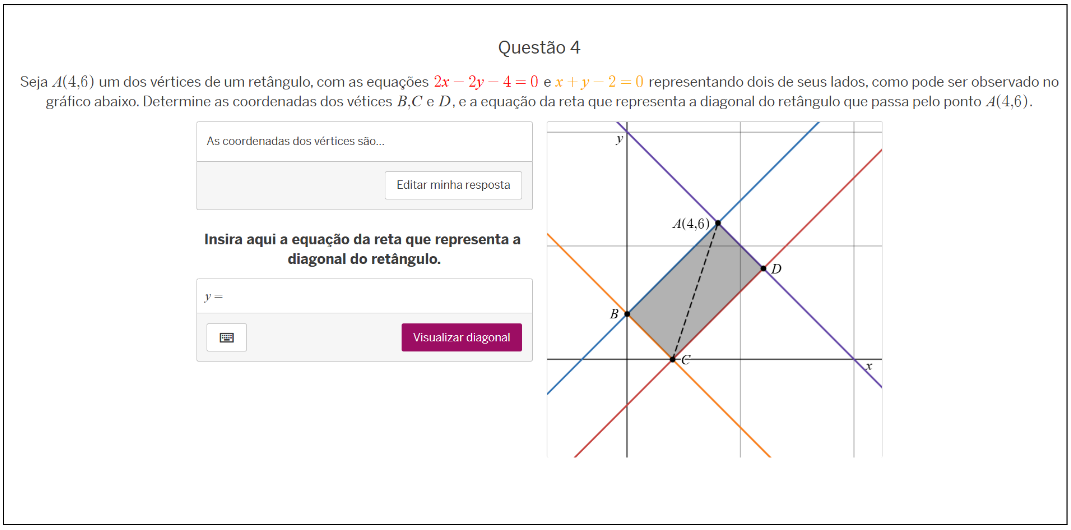
Na página 6 da atividade, a questão proposta solicita a determinação das equações das

Fig. 10: Página 2 da atividade "Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$"



Fonte: Autoria própria

Fig. 11: Página 5 da atividade "Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$"



Fonte: Autoria própria

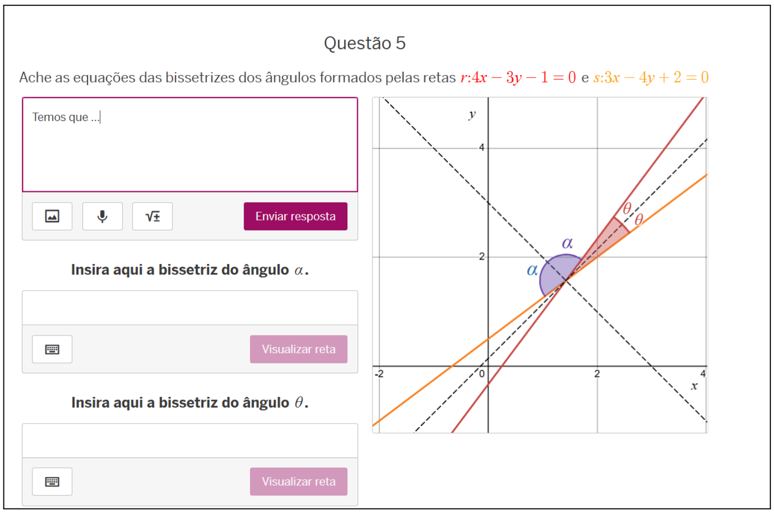
retas que são bissetrizes dos ângulos α e β. Logo após o envio da resposta, o estudante deve inserir as equações encontradas. Ao clicar nos botões "*visualizar reta*", a reta correspondente à equação inserida será plotada. Se estas forem coincidentes com as retas tracejadas que estão no gráfico, significa que a resposta está correta. A sexta página da atividade pode ser visualizada na figura 12 abaixo.

A atividade completa está disponível em Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$.

2.3 Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano

Nesta atividade, continuamos com os conceitos de retas no $\mathbb{R}^2$, agora com o foco na distância entre ponto e reta no plano cartesiano. A atividade apresenta o mesmo nível de interatividade que caracterizou as atividades anteriores.

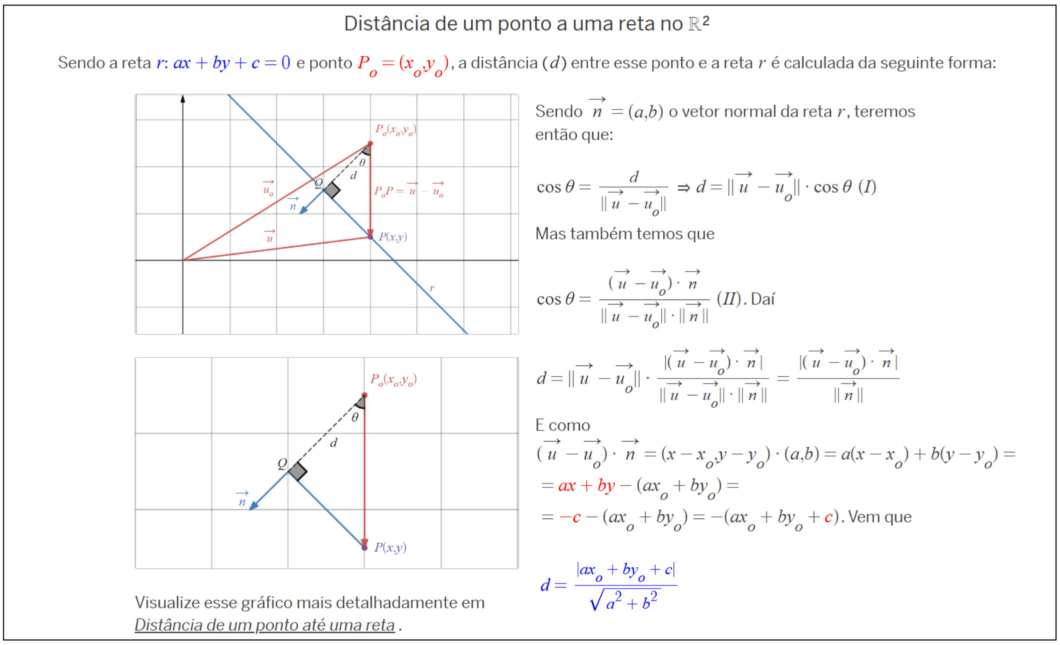
Fig. 12: Página 6 da atividade “Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$”



Fonte: Autoria própria

De início, na primeira página da atividade, representada na figura 13, mostra como calcular a distância de um ponto até uma reta usando conceitos vetoriais. Na página seguinte (figura 14), é proposto um exercício para colocar em prática o que foi aprendido na página anterior. Isso contribui para que o aluno fixe o conteúdo, pois logo após a teoria, já é possível ver como ela é aplicada na prática, favorecendo o aprendizado e o desenvolvimento do estudante.

Fig. 13: Página 1 da atividade “Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano”

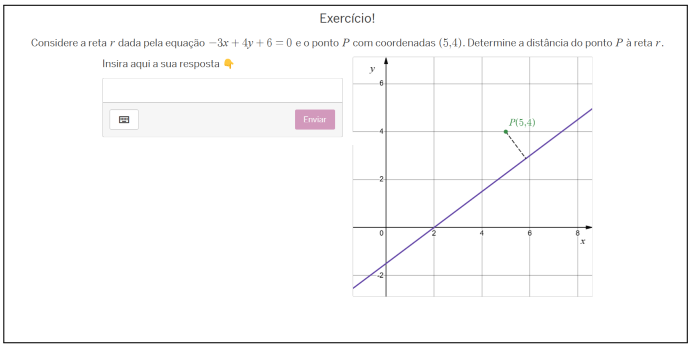


Fonte: Autoria própria

Prosseguindo com a atividade, na página 3 é discutido como se determina a distância entre duas retas paralelas sob abordagem vetorial, conforme ilustra a figura 15.

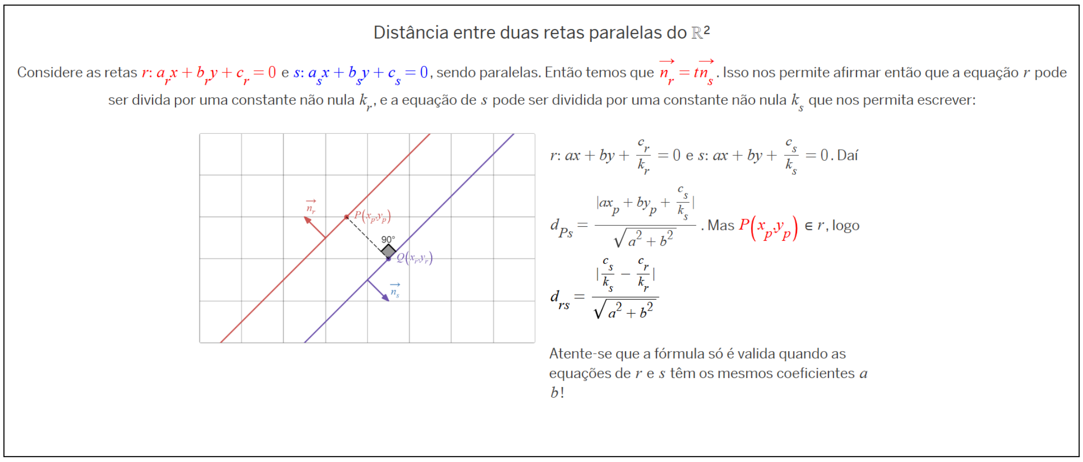
Nas duas páginas seguintes são apresentados dois exemplos de aplicação com exercícios resolvidos sobre o cálculo da distância entre retas paralelas, permitindo aos alunos verem

Fig. 14: Página 2 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

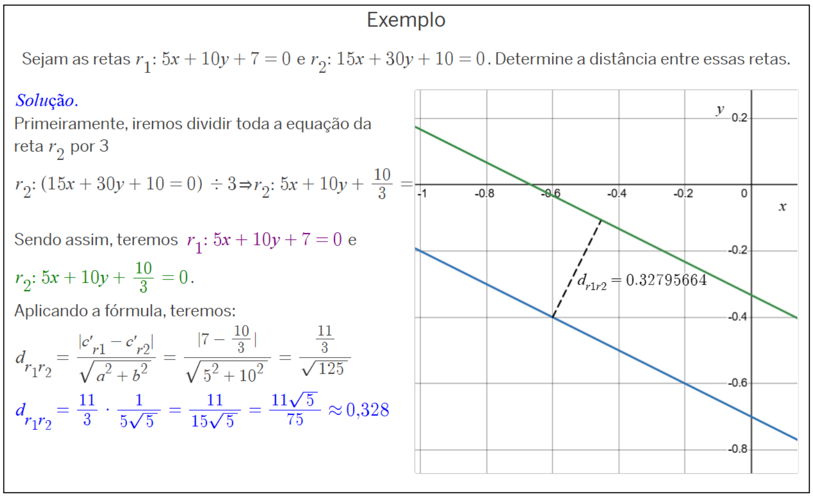
Fig. 15: Página 3 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

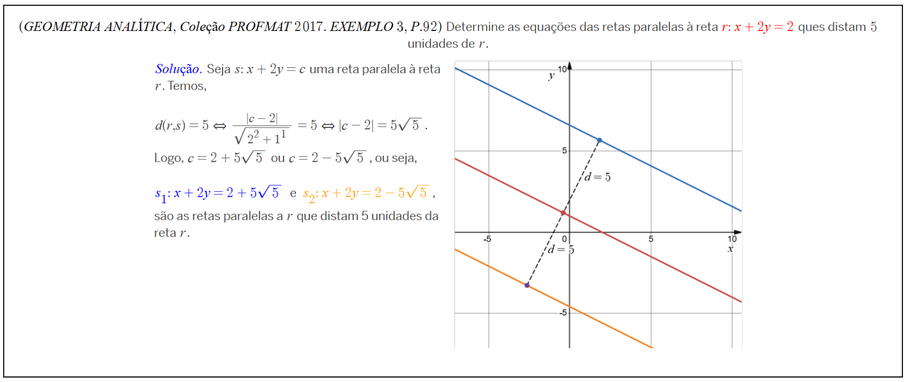
a teoria em ação, e oferecendo uma compreensão prática do conteúdo. Esses exemplos estão ilustrados nas figuras 16 e 17. Esses exemplos servirão de base para resolver o exercício proposto na página 6 da atividade (figura 18), proporcionando exercitar uma aplicação direta dos conceitos abordados.

Fig. 16: Página 4 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



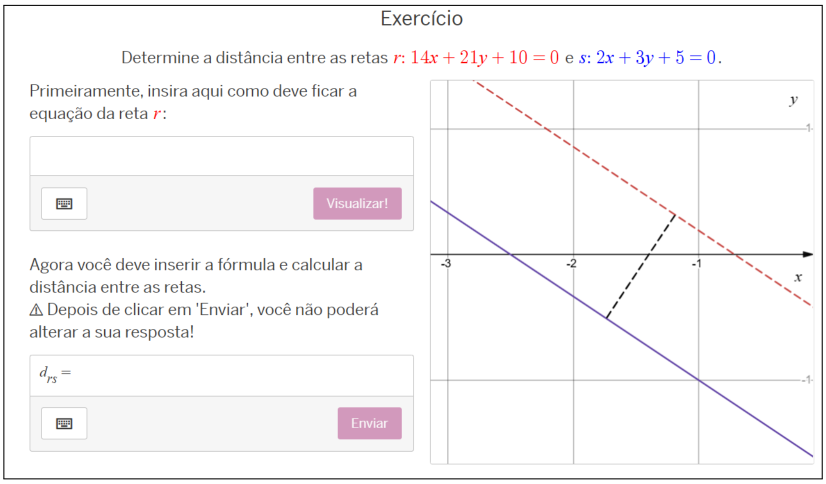
Fonte: Autoria própria

Fig. 17: Página 5 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

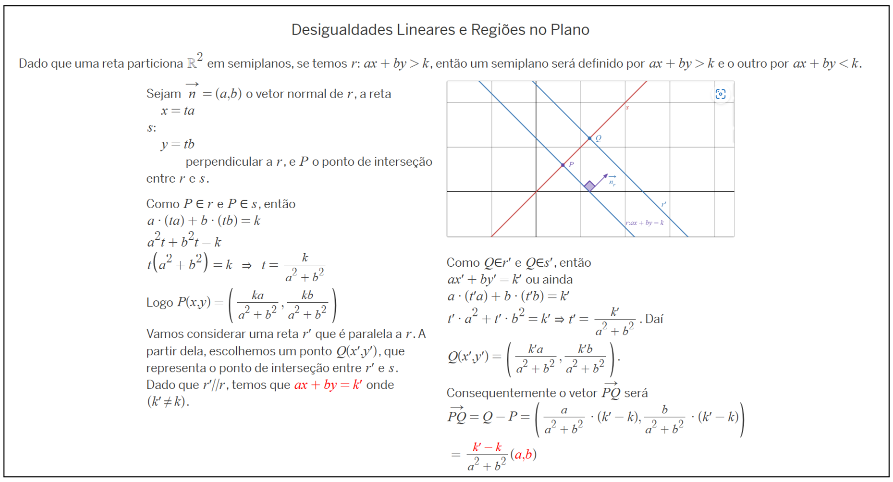
Fig. 18: Página 6 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

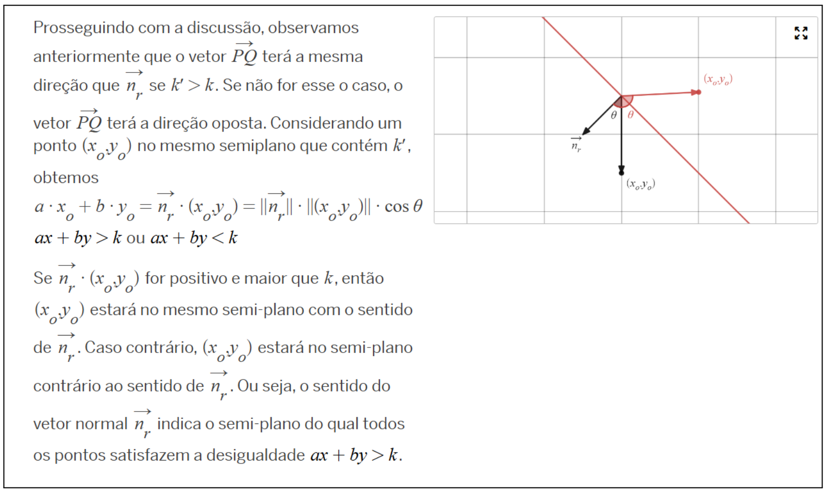
Nas figuras 19 e 20 estão ilustradas as definições sobre desigualdades lineares e regiões no plano. Assim como nas demonstrações anteriores, essa definição também é baseada em conceitos vetoriais.

Fig. 19: Página 7 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

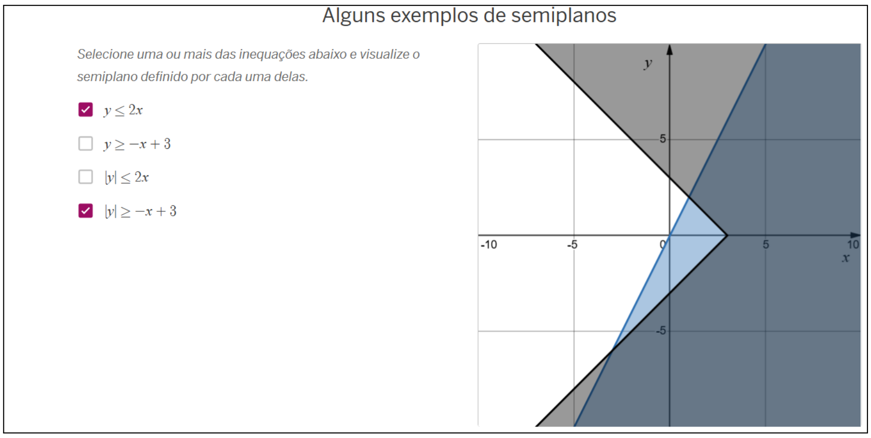
Fig. 20: Página 8 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

Na página 9 da atividade (figura 21), o aluno pode inserir uma inequação e visualizar no gráfico ao lado o semiplano correspondente à inequação selecionada, permitindo uma compreensão visual do conceito. A página seguinte aborda uma temática semelhante, mas com um enfoque mais interativo: o aluno pode inserir suas próprias inequações. Após a inserção da segunda inequação, é feita uma pergunta para que o aluno observe e comente sobre as diferenças entre os semiplanos ilustrados no gráfico, conforme mostra a figura 22. Isso estimula a reflexão e a compreensão mais profunda do impacto das diferentes inequações no plano cartesiano.

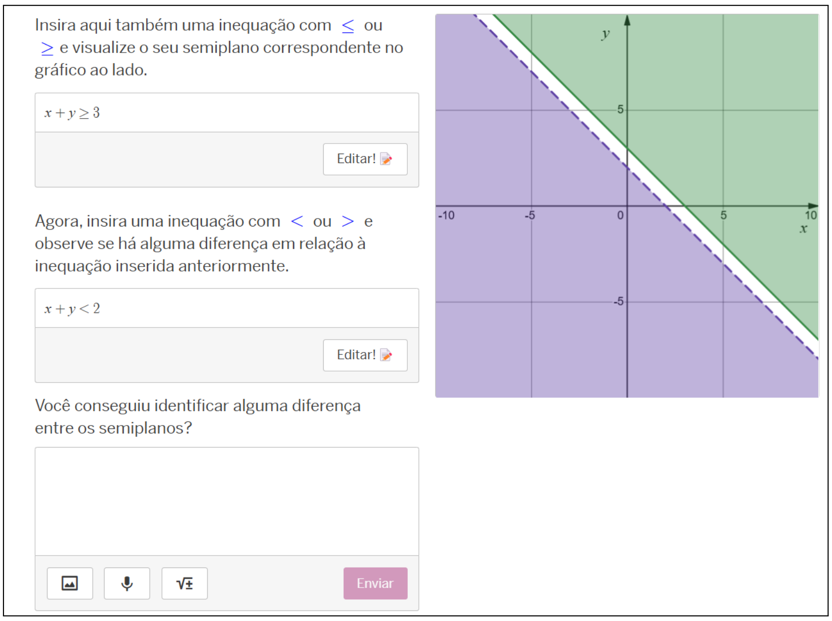
Fig. 21: Página 9 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

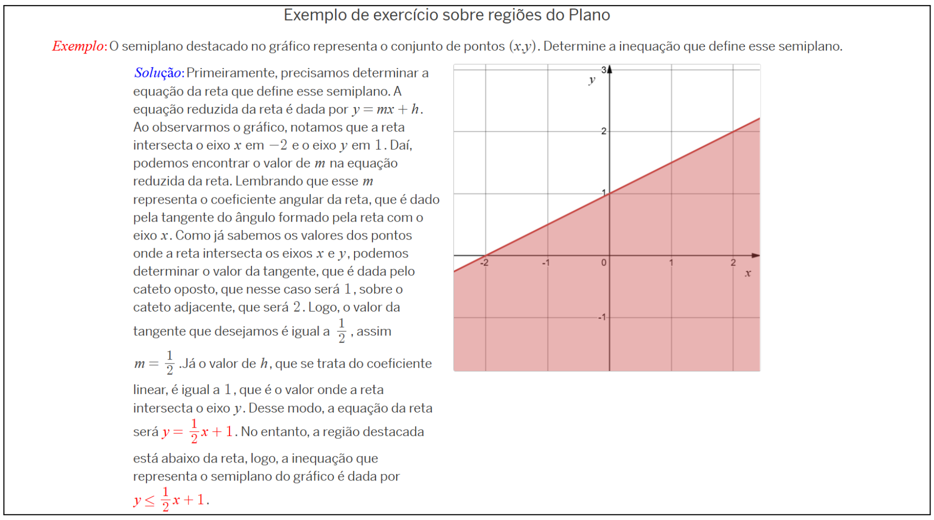
Para complementar, na página 11 da atividade, é apresentado um exemplo de aplicação dos conceitos vistos. O exemplo trata de determinar a inequação que define o semiplano ilustrado no gráfico. Com esse exemplo, é possível entender como determinar a inequação de um semiplano na prática. A página da atividade contendo esse exemplo está ilustrada na figura 23. A atividade completa está disponível em Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano

Fig. 22: Página 10 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"



Fonte: Autoria própria

Fig. 23: Página 11 da atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano"

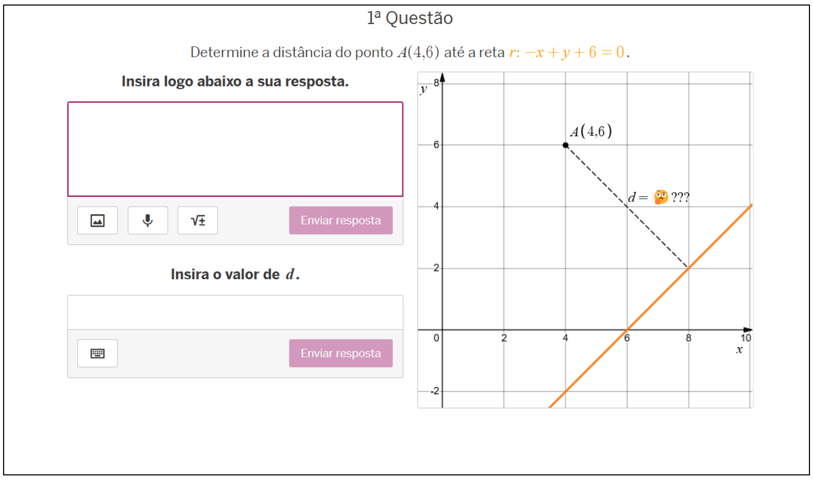


Fonte: Autoria própria

2.4 Desvendando distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$

Esta atividade é uma continuação da atividade apresentada anteriormente, mas agora focando em exercícios sobre a distância entre pontos e retas no plano cartesiano. O objetivo é permitir a prática e a avaliação do conhecimento adquirido na atividade anterior, mantendo a mesma interatividade das atividades já apresentadas. Por exemplo, logo na primeira página da atividade (figura 24), o estudante é solicitado a determinar a distância de um ponto específico até uma reta dada. Após enviar a resposta, ele poderá visualizar o valor correto e verificar se acertou, pois o valor da distância será exibido logo após clicar no botão de envio de resposta.

Fig. 24: Página 1 da atividade “Desvendando Distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$



Fonte: Autoria própria

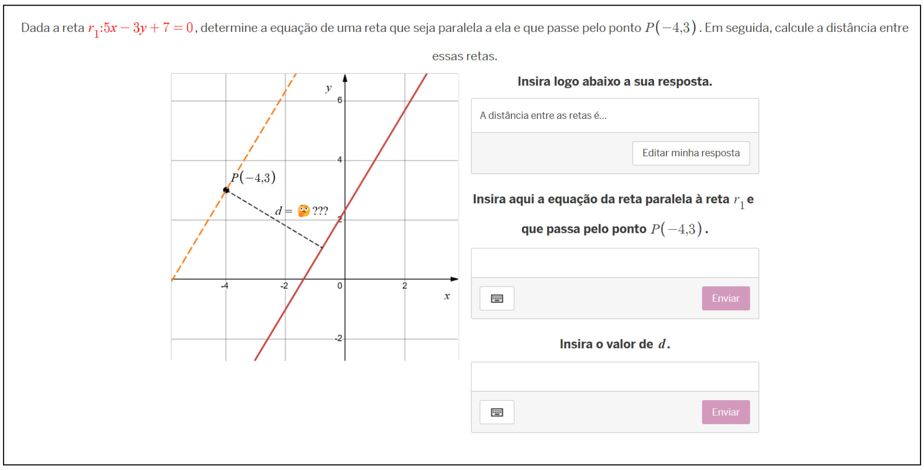
Outra interatividade interessante é proporcionada na quinta página da atividade, onde a questão pede para determinar a equação de uma reta que passa por um ponto e possui uma distância dada. Ao enviar a resposta, duas caixas serão abertas: uma para inserir a equação da reta que satisfaz a questão e outra para o valor da distância. Após clicar no botão de envio, a reta correspondente à equação inserida será plotada no gráfico ao lado, permitindo ao aluno visualizar se sua resposta está correta. A reta correta deve passar exatamente sobre a reta tracejada que está no gráfico, conforme ilustrado na figura 25. A atividade completa está disponível em Desvendando distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades interativas que desenvolvemos e apresentamos, utilizando o *Desmos* e sua *CL*, são uma amostra do potencial dessa ferramenta no ensino da Matemática. Conseguimos elaborar atividades com exercícios que exploram uma variedade de conceitos relacionados às retas na Geometria Analítica Vetorial de forma atrativa e interativa. Essas atividades abordam os conceitos-chave e destacam o que cada elemento algébrico representa na figura geométrica em questão.

Podemos dizer que tais atividades podem ser exploradas em metodologias ativas de conhecimento, no uso por exemplo em Sala de Aula Invertida, Ensino Híbrido e

Fig. 25: Página 5 da atividade "Desvendando Distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$



Fonte: Autoria própria

Aprendizagem Cooperativa, como estão, ou mediante adequação e acréscimos de exercícios ou problemas. O *Desmos* permite criar tais elementos e sua *classroom* possibilita organizar, monitorar e gerenciar qualquer página ou atividade, retornando inclusive que respostas dos alunos estão corretas, ou mesmo socializá-las com os demais colegas.

Essas atividades não são apenas meios eficazes de aprendizado, mas também uma forma prática e envolvente de adquirir conhecimento. Elas têm o potencial de despertar a curiosidade e o entusiasmo dos alunos pela Matemática, contribuindo para tornar o processo de aprendizagem mais atrativo e interessante.

Agradecimento:

O primeiro autor deste trabalho agradece o auxílio de fomento de bolsa de IC do PIBIC – UFPA, para o desenvolvimento do plano de trabalho *Confecção de Atividades Interativas de Geometria Analítica Vetorial com a Camada de Computação do Desmos*, iniciado em setembro de 2023.

Bibliografia

[1] LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**, 2° ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[2] MEDEIROS, Luiz Adauto; DE ANDRADE, Nirzi Gonçalves; WANDERLEY, Augusto Maurício. **Álgebra Vetorial e Geometria**. Rio de Janeiro: EDITORA CAMPUS LTDA, 1981.