

Introdução as superfícies mínimas

Anthony Rocha Barbieri

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Agosto 2024

Considerações iniciais

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ onde U é um aberto do \mathbb{R}^2 tal que

1. X é diferenciável, isto é, se escrevermos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ com } (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ tem derivadas contínuas de todas as ordens em U .

Considerações iniciais

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ onde U é um aberto do \mathbb{R}^2 tal que

1. X é diferenciável, isto é, se escrevermos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ com } (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ tem derivadas contínuas de todas as ordens em U .

2. (condição de regularidade) Para cada $q \in U$, temos que $\|X_u \times X_v\| \neq 0$.

Considerações iniciais

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ onde U é um aberto do \mathbb{R}^2 tal que

1. X é diferenciável, isto é, se escrevermos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ com } (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ tem derivadas contínuas de todas as ordens em U .

2. (condição de regularidade) Para cada $q \in U$, temos que $\|X_u \times X_v\| \neq 0$.

Como consequência da condição de regularidade, podemos escolher, para cada ponto p de $V \cap S$ um vetor normal unitário da forma

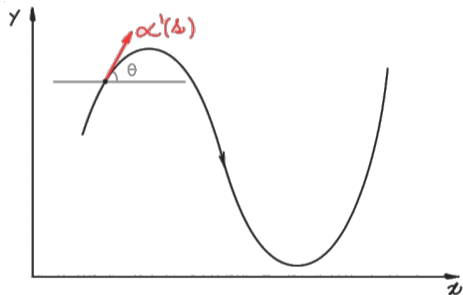
$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(p).$$

Noções de curvatura

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada plana tal que $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$.

Noções de curvatura

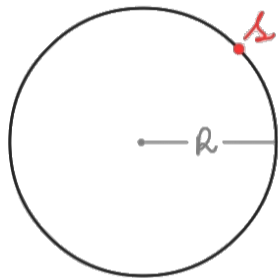
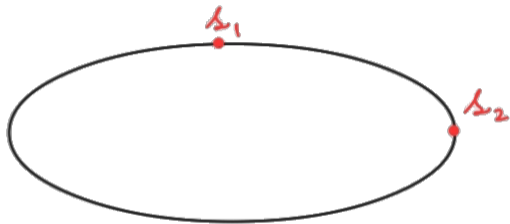
Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada plana tal que $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$. A curvatura de α em s é definida por



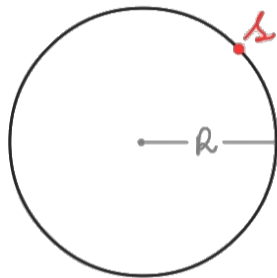
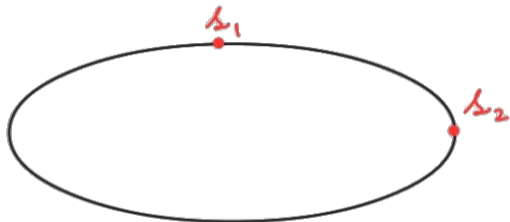
$$k_{\alpha}(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$$

onde $\theta(s)$ é o ângulo que o vetor tangente $\alpha'(s)$ faz com o eixo x .

Noções de curvatura

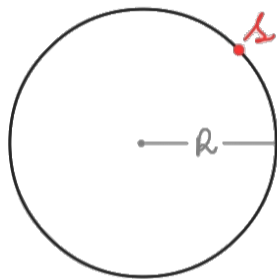
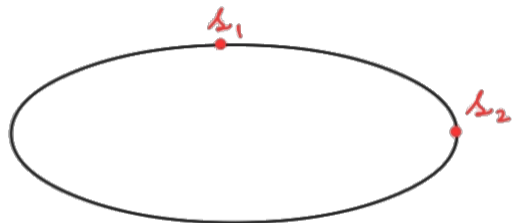


Noções de curvatura



1. Na elipse a curvatura $k(s_1) < k(s_2)$.

Noções de curvatura

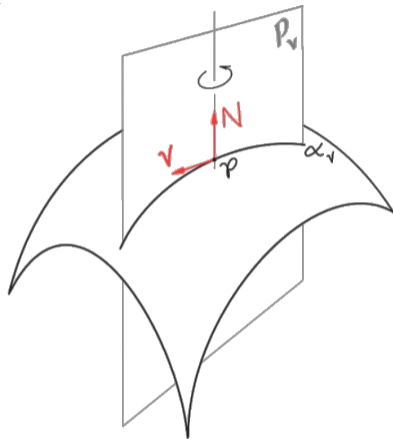


1. Na elipse a curvatura $k(s_1) < k(s_2)$.
2. No círculo a curvatura $k(s) = \frac{1}{R}$, para todo $s \in \alpha(I)$.

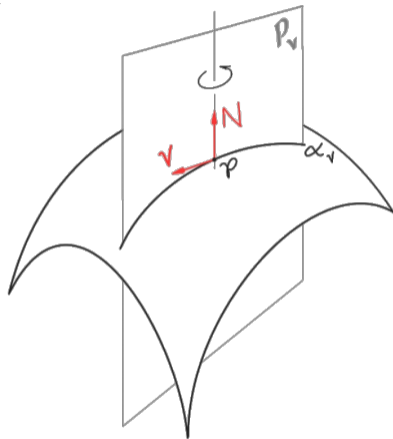
Noções de curvatura

Seja S uma superfície regular orientável. Considere $N(p)$ o vetor normal a S no ponto p e \mathbf{v} uma direção tangente a S em p . O plano $P_{\mathbf{v}}$, gerado por $N(p)$ e \mathbf{v} , intersecta a superfície em uma curva plana $\alpha_{\mathbf{v}}$ chamada secção normal de S em p na direção de \mathbf{v} .

Noções de curvatura



Noções de curvatura



A curvatura normal k_v de S em p na direção de \mathbf{v} é definida como a curvatura α_v , isto é,

$$k_v = k_{\alpha_v}$$

Noções de curvatura

Chamamos de curvatura principais os valores

- $k_1 = \min_{\|\mathbf{v}\|=1} k_v$
- $k_2 = \max_{\|\mathbf{v}\|=1} k_v$

Noções de curvatura

Chamamos de curvatura principais os valores

- $k_1 = \min_{\|\mathbf{v}\|=1} k_v$
- $k_2 = \max_{\|\mathbf{v}\|=1} k_v$

Conhecendo as curvaturas principais e o ângulo que o vetor \mathbf{v} faz com, digamos, a direção correspondente a k_1 , obtemos

$$k_v = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Noções de curvatura

Denominamos curvatura gaussiana, curvatura media, e vetor curvatura media, respectivamente, por

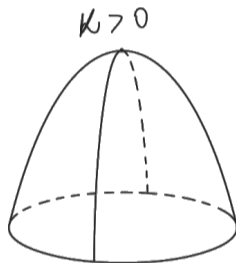
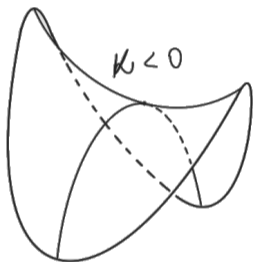
$$K = k_1 k_2, H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \text{ e } \mathbf{H} = HN.$$

Noções de curvatura

Um ponto p de uma superfície S é chamado de

1. Elíptico se $K > 0$.
2. Hiperbólico se $K < 0$.
3. Planar se $K = 0$ com $k_1 = k_2 = 0$.
4. Parabólico se $K = 0$ com ou $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$.

Noções de curvatura



Teorema 1.

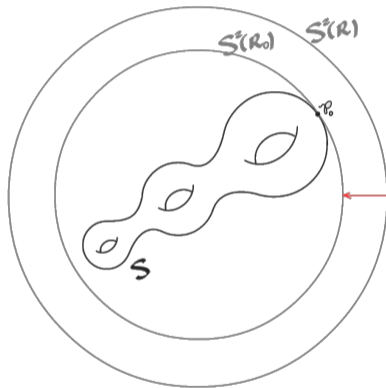
Não existe superfície compacta tal que $H = 0$, para todo $p \in S$.

Noções de curvatura

$H \equiv 0 \implies k_1 \equiv -k_2 \implies K = -(k_1)^2 \leq 0 \implies S$ é formada apenas por pontos hiperbólicos ou planares.

Noções de curvatura

$H \equiv 0 \implies k_1 \equiv -k_2 \implies K = -(k_1)^2 \leq 0 \implies S$ é formada apenas por pontos hiperbólicos ou planares.



Porém, existe $p_0 \in S$ tal que $K_S \geq K_{S^\epsilon(R_0)} = \frac{1}{R_0^2} \geq 0$.

O surgimento da teoria

Em 1760 Joseph-Louis Lagrange propôs o seguinte problema: provar que para cada curva fechada C sem auto intersecções no espaço tridimensional, existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira.

Definição de superfície mínima

Definição 1.

Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de mínima se sua curvatura média H é identicamente nula.

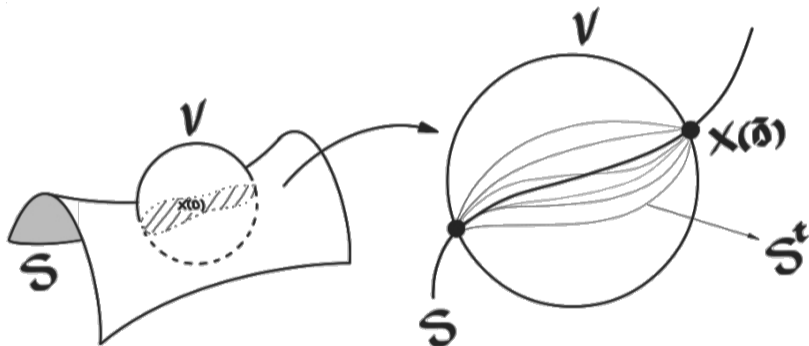
Primeira variação da área

Suponha que exista uma superfície regular S que seja solução para o problema proposto por Lagrange. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, uma parametrização de S . Vamos fazer uma perturbação da área de S em um domínio qualquer para verificar quais condições devem ser satisfeitas para que S seja um ponto crítico da área. Para isto, escolha um domínio limitado $D \subset U$ e uma função diferenciável $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\bar{D} = D \cup \partial D$ e $h(S \setminus X(D)) \equiv 0$. Seja $\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação normal de S em $X(\bar{D})$ determinada por h ,

Primeira variação da área

ou seja,

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(p),$$



Primeira variação da área

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(p),$$

onde $N : S \rightarrow S^2$ é a aplicação normal de Gauss com uma dada orientação. Para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, temos que $X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$ é uma parametrização para S^t . A área de S^t é dada por

$$A(t) = \int_{\bar{D}} \|X_u^t \times X_v^t\| dA.$$

Primeira variação da área

Assim, a variação da área em $t = 0$ é

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH \|X_u \times X_v\| dA. \quad (1)$$

Primeira variação da área

Assim, a variação da área em $t = 0$ é

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH \|X_u \times X_v\| dA. \quad (1)$$

Daí, segue de imediato o seguinte teorema.

Teorema 2.

Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e $D \subset U$ um domínio limitado. Então $X(\bar{D})$ é mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$ para todo D e para toda variação normal de $X(\bar{D})$.

Primeira variação da área

O significado geométrico da direção do vetor \mathbf{H} pode ser obtido a partir da equação (1). Basta tomar $h = H$, e teremos, para essa variação particular,

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \|X_u \times X_v\| dA < 0.$$

Isto significa que se deformarmos $X(\bar{D})$ na direção do vetor \mathbf{H} a área é inicialmente decrescente.

Primeira variação da área

Achar exemplos de superfícies com $H \equiv 0$ não é, em princípio, uma tarefa fácil. Mesmo para o caso mais simples de superfícies que são gráficos de uma função $f(x, y) = z$ diferenciável, a condição $H \equiv 0$ é equivalente à equação

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) \equiv 0. \quad (2)$$

Primeira variação da área

Achar exemplos de superfícies com $H \equiv 0$ não é, em princípio, uma tarefa fácil. Mesmo para o caso mais simples de superfícies que são gráficos de uma função $f(x, y) = z$ diferenciável, a condição $H \equiv 0$ é equivalente à equação

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) \equiv 0. \quad (2)$$

Lagrange conseguiu chegar apenas nas soluções triviais da equação 2, a família de planos

$$f(x, y) = ax + by + c, \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Problema de Plateau

As experiências feitas pelo físico belga J. Plateau com películas de sabão, por volta de 1843 à 1869, mostraram fisicamente a existência de superfícies mínimas (estáveis) para qualquer fronteira. Tornou-se então um desafio para os matemáticos obter uma prova dos resultados experimentais de Plateau, e a questão, admitidamente vaga e essencialmente proposta por Lagrange, veio a ser conhecida sob o nome de Problema de Plateau.

Catenoide

Se supormos que a superfície S , além de mínima, seja obtida através da revolução de uma curva da forma $\alpha(z) = (0, f(z), z)$, a equação 2 de Lagrange se reduz a equação

$$f(z)[f'(z)]^2 + f(z) - [f(z)]^2 f''(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Catenoide

Se supormos que a superfície S , além de mínima, seja obtida através da revolução de uma curva da forma $\alpha(z) = (0, f(z), z)$, a equação 2 de Lagrange se reduz a equação

$$f(z)[f'(z)]^2 + f(z) - [f(z)]^2 f''(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

cuja a solução é a curva geratriz de S , chamada de catenária

$$y = f(z) = \lambda \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right), \quad \text{onde } \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Catenoide

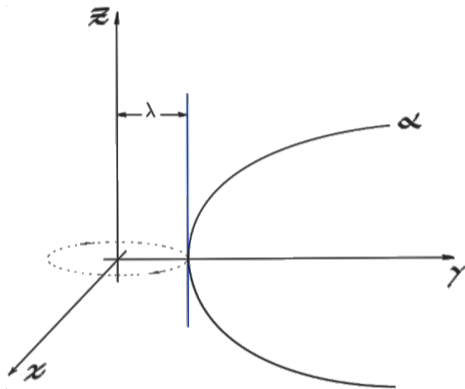


Figura: Catenária.

Catenoide

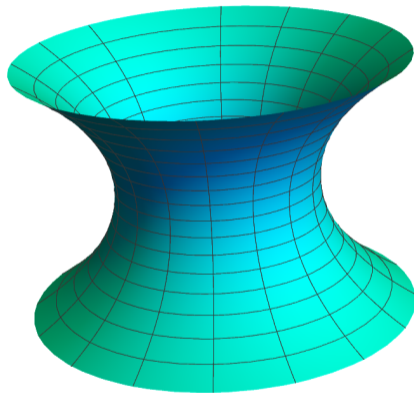


Figura: Catenoide.

Helicoide

Supondo que as curvas de nível $f(x, y) = \text{constante}$ são retas, obtemos como solução uma superfície chamada helicoide, que pode ser descrito da seguinte maneira. Considere a reta vertical $\alpha(t) = (0, 0, t)$ como a diretriz. Para cada ponto da curva α , vamos associar um um vetor $\mathbf{w}(t) = (\cos t, \text{sent}t, 0)$ que se encontra no plano xy . Daí, a superfície regrada S que obtemos é dada pela imagem da parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$X(t, u) = \alpha(t) + u\mathbf{w}(t) = (u \cos t, u \text{sent}t, t).$$

Helicoide

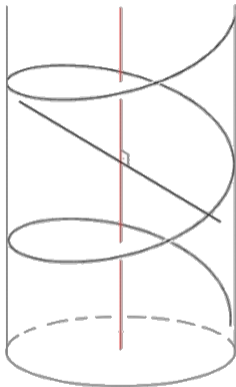


Figura: O helicoide como uma superfície regrada

Helicoide

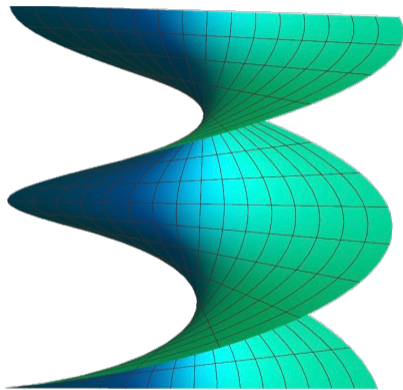
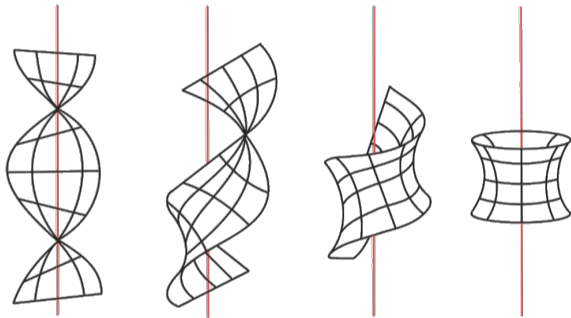


Figura: Helicoide.

Superfícies conjugadas



Superfície de Scherk

Em 1835, Heinrich Scherk conseguiu obter um novo exemplo. Ele introduziu, na equação (2), a condição que as variáveis podiam ser separadas, ou seja, ele considerou que $f(x, y) = g(x) + h(y)$.

Superfície de Scherk

Em 1835, Heinrich Scherk conseguiu obter um novo exemplo. Ele introduziu, na equação (2), a condição que as variáveis podiam ser separadas, ou seja, ele considerou que $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Daí, com essa condição, a equação (2), obtida por Lagrange, se torna a uma equação diferencial ordinária

$$g_{xx}(1 + h_y^2) + h_{yy}(1 + g_x^2) \equiv 0 \implies \frac{g_{xx}}{1 + g_x^2} = -\frac{h_{yy}}{1 + h_y^2} = \text{constante}.$$

Superfície de Scherk

Em 1835, Heinrich Scherk conseguiu obter um novo exemplo. Ele introduziu, na equação (2), a condição que as variáveis podiam ser separadas, ou seja, ele considerou que $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Daí, com essa condição, a equação (2), obtida por Lagrange, se torna a uma equação diferencial ordinária

$$g_{xx}(1 + h_y^2) + h_{yy}(1 + g_x^2) \equiv 0 \implies \frac{g_{xx}}{1 + g_x^2} = -\frac{h_{yy}}{1 + h_y^2} = \text{constante}.$$

Assim obtemos, a menos de dilatações e movimentos rígidos, as funções $g(x) = \ln(\cos x)$ e $h(y) = -\ln(\cos y)$. Com isso, a superfície que surge é chamada de superfície de Scherk que pode ser parametrizada como gráfico da função $f(x, y) = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$.

Superfície de Scherk

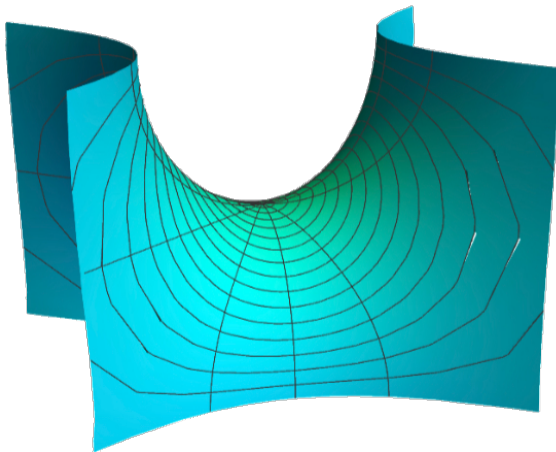


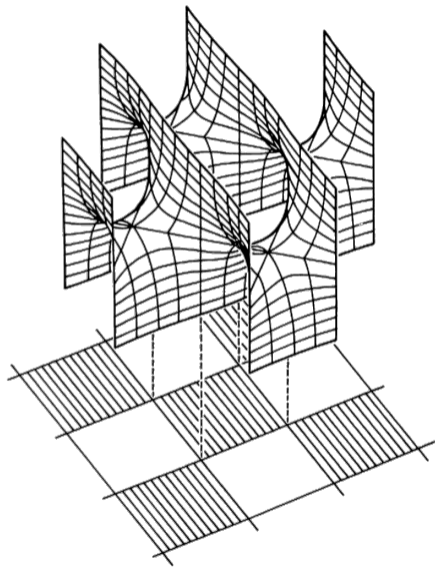
Figura: Superfície de Scherk.

Superfície de Scherk

$$X(x, y) = \left(x, y, \ln \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right) \right),$$

cujo domínio é $U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right) > 0 \right\}$, e pode ser visto como as casas pretas de um tabuleiro de xadrez, onde cada uma das casas é um quadrado de lado $\frac{\pi}{2}$. Em consequência desse fato, a superfície de Scherk é duplamente periódica.

Superfície de Scherk



Superfície de Enneper

Em 1864, Alfred Enneper obteve uma nova superfície mínima. Uma maneira simples de representar essa superfície, hoje chamada de superfície de Enneper, é através da imagem da aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \text{ onde } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Superfície de Enneper

Em 1864, Alfred Enneper obteve uma nova superfície mínima. Uma maneira simples de representar essa superfície, hoje chamada de superfície de Enneper, é através da imagem da aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \text{ onde } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Uma característica interessante da superfície de Enneper é que ela possui auto-intersecções.

Superfície de Enneper

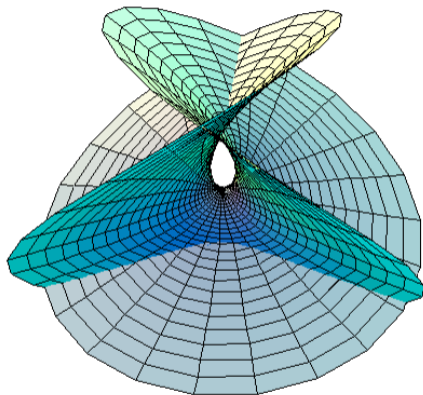


Figura: Superfície de Enneper.

Superfície de Enneper

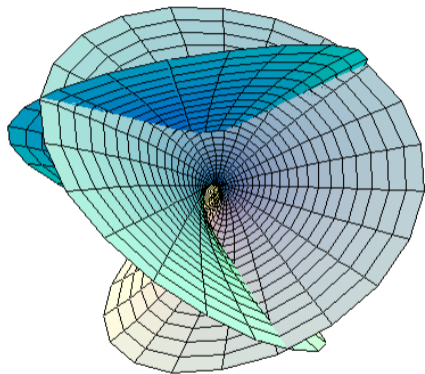


Figura: Superfície de Enneper.

A busca pelo 4º exemplo

Durante pouco mais de dois séculos, após os exemplos encontrados por Meusnier, perdurou a seguinte pergunta:

A busca pelo 4º exemplo

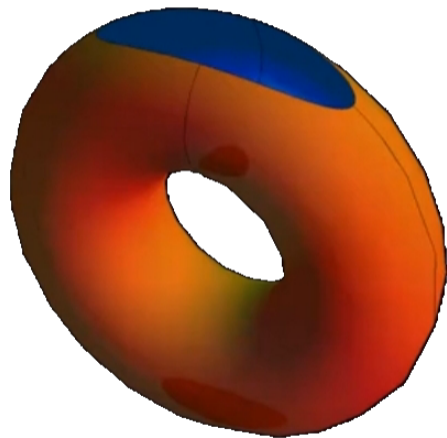
Durante pouco mais de dois séculos, após os exemplos encontrados por Meusnier, perdurou a seguinte pergunta:

- Seria o plano, o catenoide e o helicoides os únicos exemplos de superfície mínima completa, de topologia finita e sem auto-intersecções no espaço euclidiano?

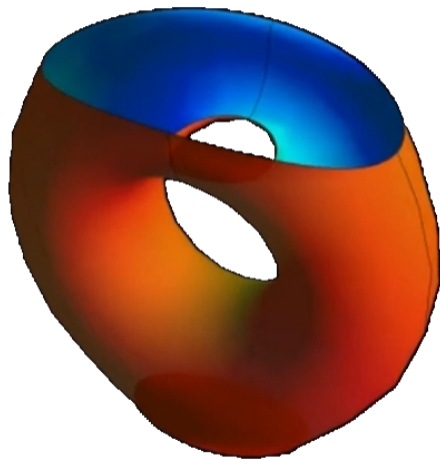
Superfície de Costa

Após a apresentação do catenoide e do helicoides, por Meusnier em 1776, apenas três exemplos de superfície mínima completa, de topologia finita e sem auto-intersecções em \mathbb{R}^3 eram conhecidos: O plano, o catenoide e o helicoides. A busca por um quarto exemplo durou mais de dois séculos. Em 1982, o brasileiro Celso José da Costa, em sua tese de doutorado pelo IMPA, obteve as equações de um exemplo de superfície mínima completa conformemente equivalente ao toro menos três pontos, onde dois dos fins da superfície são do tipo catenoide e o terceiro fim se aproxima assintoticamente de um plano.

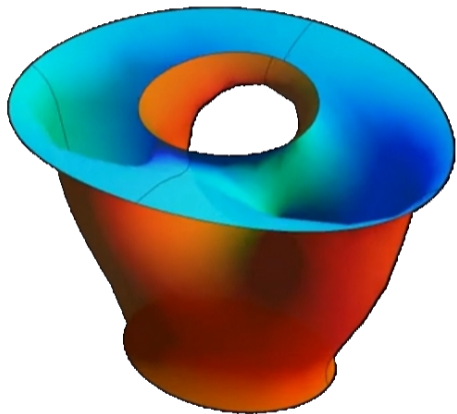
Superfície de Costa



Superfície de Costa



Superfície de Costa



Superfície de Costa

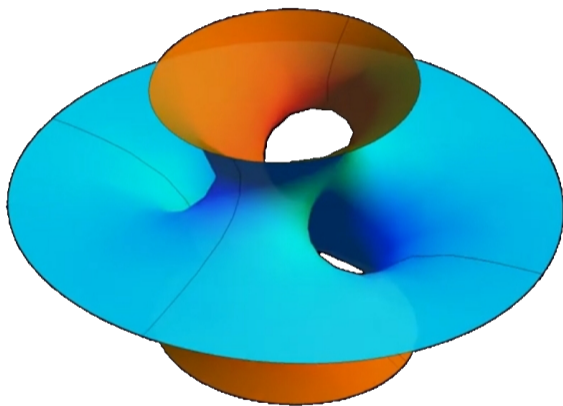


Figura: Superfície de Costa.

Referências bibliográficas

- DO CARMO, M, P. **Geometria diferencial das curvas e superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- DO CARMO, M, P. **Superfícies Mínimas (16° Colóquio Brasileiro de Matemática)**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1987.
- NITSCHKE, J, C, C. **Lectures on minimal surfaces**. 1.ed. Cambridge: Editora Cambridge University Press, 1989.
- TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2.ed. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

OBRIGADO!