COMUNICAÇÃO ORAL

Construções Geométricas com a *Desmos Geometry*

Anna Alice Castro Mendonça[1] Valdelírio da Silva e Silva[2]

Resumo: *Este trabalho apresenta as funções das ferramentas da Plataforma Desmos Geometry e disponibiliza uma biblioteca de construções. Com algumas ferramentas, é resolvido um belo problema, com objetivo de relacionar o pensamento crítico envolvido nas construções geométricas com a teoria da geometria euclidiana, e a fim de corroborar a importância da relação entre esses dois elementos tendo-se intuito de solidificar os conhecimentos de geometria. Pela facilidade que o Desmos Geometry possibilita nas construções, aquele trabalho que demanda habilidades com régua e compasso físicos não mais são exigidos, e uma concentração maior no problema pode ser devotada, habilitando o usuário a desvendar possibilidades de soluções de problemas, cujas resoluções podem ser armazenadas ou compartilhadas.*

Palavras-chave: *Construções Geométricas. Geometria Euclidiana Plana. Desmos. Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC).*

1 Motivação e Objetivo

As construções geométricas utilizando régua não graduada e compasso exigem sólido conhecimento das proposições de geometria e das propriedades das figuras [1], e talvez por isso não possuem mais espaço no desenvolvimento do ensino básico como um assunto em separado, como são de funções por exemplo. No entanto, alguns de seus conteúdos podem, ou mesmo deveriam, ser discutidos concomitantemente à exposição de partes do ensino da geometria euclidiana. Além de suscitarem fatos históricos da evolução matemática (como de contornar a falta de representatividade de números negativos e racionais na antiguidade da matemática grega), as construções geométricas realmente realçam a importância dos teoremas e corolários relacionados à geometria, pois diante de um problema, mesmo que ele seja de solução intuitiva, temos necessidade de dar uma

[1]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: annaalicemendonca16@gmail.com
[2]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: valdel@ufpa.br

justificativa. E na impossibilidade disso, recorremos aos conceitos e propriedades, não só da geometria, como os da álgebra que ocorrem nas operações/construções geométricas no tratamento de expressões algébricas [2].

Todo esse arcabouço de conhecimento e ações de aprendizagem nas construções são levadas pela restrição de realizá-las mediante uso somente da régua não graduada e compasso apenas, o que pode demandar tempo na aquisição de destreza na manipulação desses materiais. No entanto, sob utilização de softwares simulando as ações corriqueiras das construções, o usuário foca, depois de conhecimento prévio relativamente pequeno de como usar as ferramentas, nas ideias para a resolução do problema. Diferentemente de um espaço físico necessário para a construção, os softwares possibilitam criar, apagar, editar ou mesmo gerar várias páginas com as tentativas/resoluções de construções geométricas.

Neste trabalho objetivamos apresentar a *Calculadora de Geometria do Desmos* para mostrar as ferramentas de construção geométrica, usando também duas outras partes da calculadora gráfica inserida no software e compomos uma *biblioteca* de construções (Tangente, Perpendicular, Mediatriz, Bissetriz, Triângulo Qualquer, Arco Capaz, Baricentro, Circuncentro, Ortocentro, Incentro, Aplicação de Arco Capaz, Expressão Algébrica do 2° grau) que podem ser usadas por outros professores ou alunos, com finalidade não apenas de dispor dos diversos botões e comandos equivalentes de ações, mas de despertar e provocar uso dessas ferramentas para auxiliar na construção do conhecimento da geometria euclidiana associando-a com a de construções geométricas.

2 As ferramentas da janela e três belos problemas

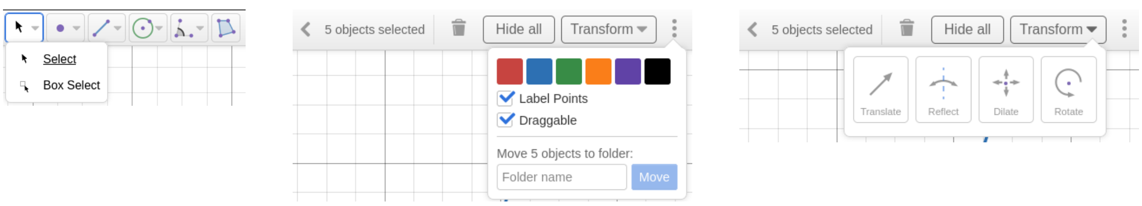
2.1 A Barra de Ferramentas

A *Barra de Ferramentas* possui 6 botões: Um cursor (); Ponto; Linha; Círculo; Ângulo; e Polígono. Abaixo apresentamos de forma mais detalhada as funções de cada um desses recursos:

Cursor(): Habilita selecionar um elemento (`Select`) ou vários (`Box Select`) para edição (figura 1a). Após seleção as modificações de apresentação, acionadas na escolha dos três pontinhos verticais (⋮), dependem das particularidades do que foi selecionado. Pontos podem ou não ser rotulados (com `Label`), ou deixar ou não de serem arrastáveis (com `Dragabble`), por exemplo. Mas um recurso comum é o de escolha de cor e indexação a uma pasta, que facilita organização (figura 1b).

Fig. 1: Cursor de Seleção/Edição

(a) Tipos de seleção **(b)** Edição de apresentação **(c)** Transformação Matemática

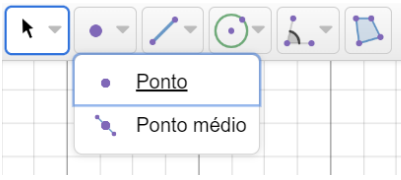


Fonte: capturada no *Desmos Geometry*

A edição também permite deletar a seleção (🗑); escondê-las (`Hide all`) a fim de que as construções subsequentes, apesar de ainda ficarem indexadas, não sejam apresentadas; ou realizar transformações matemáticas (`Transform`) de translação, reflexão, dilatação ou rotação (figura 1c).

Ponto: Essa função nos permite marcar um ponto em qualquer lugar da janela gráfica, podendo também encontrar o ponto médio de um segmento de reta (figura 2). Pra encontrar o ponto médio, é necessário escolher a opção `Ponto médio`. Em seguida clique no segmento que se deseja encontrar o ponto médio, o qual imediatamente será demarcado.

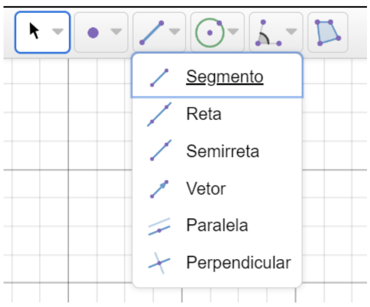
Fig. 2: Objetos relacionados a ponto



Fonte: capturada em *Desmos Geometry*

Linha: Essa função possibilita a construção de um segmento qualquer, uma reta, uma semi–reta e um vetor. Para fazer isso marca–se um ponto qualquer na Janela gráfica, arrastando o cursor até um certo ponto, dando origem a um dos quatro elementos citados anteriormente. Além disso, a função oferece a possibilidade de construir uma reta paralela ou perpendicular a outra (figura 3). Tendo selecionado uma das duas opções, escolhemos a reta que será a base, e em seguida clicamos em um ponto qualquer dessa reta, mostrando sua paralela ou sua perpendicular.

Fig. 3: Objetos relacionados a linha

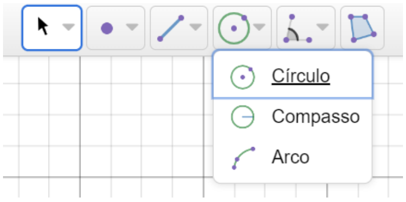


Fonte: capturada em *Desmos Geometry*

Círculo: Nessa função podemos encontrar ferramentas para construir um círculo, usar compasso e criar um arco (figura 4). Para construir o círculo basta selecionar a opção `Círculo`, fixar seu centro em algum lugar na janela gráfica e levar o cursor até um outro ponto. Essa distância será o raio da circunferência.

Para construir um arco, primeiro seleciona-se a opção `Arco`, e depois na janela de geometria, marcamos três pontos, que originarão a figura desejada. Além disso, a ferramenta possui a função `Compasso`, que atua como o compasso físico. Ela é usada para realizar cópias de segmentos. Para ela, primeiro escolhemos o segmento que desejamos copiar e em seguida selecionar um ponto para o qual será uma das extremidades, configurando-se tal ponto como centro da circunferência, que terá qualquer outro ponto dela na mesma distância do segmento original.

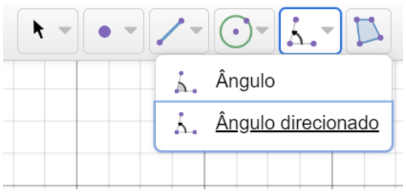
Fig. 4: Objetos relacionados ao círculo



Fonte: capturada em *Desmos Geometry*

Ângulo: Essa ferramenta traz consigo duas funções, que são `Ângulo` e `Ângulo Direcionado` (figura 5). Para descobrir o valor de um ângulo, é necessário ter um ângulo já pronto. Tendo isso, a próxima etapa é marcar os seus pontos, sempre lembrando que o seu vértice deve ser o segundo marcado, de modo que ele fique entre os outros dois pontos. Por outro lado, a função `Ângulo Direcionado`, permite que a demarcação de um ângulo seja feita sem o auxílio de uma figura.

Fig. 5: Objetos relacionados ao ângulo

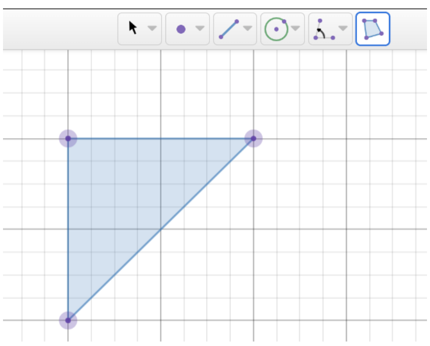


Fonte: capturada em *Desmos Geometry*

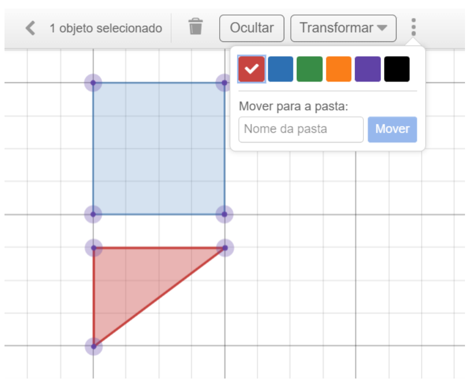
Polígono: A última opção da barra de ferramentas do *Desmos Geometry* nos permite construir um polígono (ilustrada na figura 6a). Para isso, você clica em vários pontos da tela dando forma ao polígono, e finaliza-o concidindo o último ponto com o primeiro. Além disso, há uma variedade de cores que podem preencher a figura desenhada, igual ao exposto no primeiro recurso (figura 1b). Para customizar um polígono, basta clicar com o cursor ( ) na parte colorida da figura. Feito isso, aparecerá uma outra barra de ferramentas, e nela, clicando nos três pontinhos do canto superior (⋮), aparecerão todas as opções de cores e de endereçamento para uma pasta da janela Lista de Expressões (figura 6).

Fig. 6: Polígono

(a) Recurso de Construção



(b) Recurso de customização



Fonte: capturada em *Desmos Geometry*

2.2 Janela de Expressões

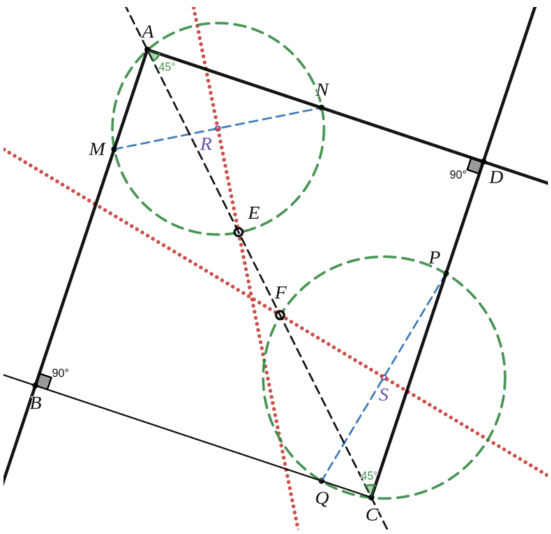
Qualquer elemento inserido na janela gráfica possui um símbolo que pode ser manuseado algebricamente pela barra lateral de expressões, e por ela acessar as configurações para edição. A manipulação algébrica para composição e transformações sobre os elementos é feita com comandos específicos (`segment`, `angle`, `arc`, `line`, `ray`, `intersection`, `circle`, etc). Na verdade, toda uma construção pode ser feita somente pela janela de expressões! O tutorial mais completo que conhecemos está disponível em Desmos Studio Geometry User Guide, mas a biblioteca deste trabalho tem a maioria dos comandos dentro de suas construções.

Com finalidade de ilustar as funcionalidades do *Desmos Geometry* apresentamos nas subseções a seguir três problemas de construções geométricas

2.3 Determinação de um quadrado dados ponto em cada lado

Sejam os pontos M, N, P e Q com cada um deles pertencente a um lado de um quadrado (ver figura 7). Construa o quadrado! [1]

Fig. 7: Problema de determinação de um quadrado com 4 pontos, um de cada lado.



Fonte: autoria própria, disponível em Quadrado (4 pontos dados)!

Já que um quadrado tem seus ângulos internos retos, então deveremos pensar que a partir de dois pontos precisamos construir um desses ângulos. Da geometria euclidiana plana sabemos que num arco de circunferência, o ângulo central tem a mesma medida que a medida do arco correspondente; enquanto o ângulo inscrito (aquele cujo vértice está na circunferência) é metade do arco correspondente. Com isso, podemos construir os segmentos MN e PQ, determinar seus pontos-médios R e S, e sobre eles traçar circuferências com R e S sendo centros e raios as distâncias deles até M (ou N), e até P (ou Q), conforme ilustra a figura (7). Observemos que qualquer ponto no arco acima de M e N forma com eles um ângulo reto, mas o vértice do quadrado deve ser tal que sua diagonal formará um ângulo de 45° com qualquer lado. Daí aparecem as necessidades de traçar nos pontos R e S perpendiculares a MN e PQ. As interseções de cada uma dessas retas com cada uma das circunferências, determinarão nelas arcos de 90° definidos por $\widehat{NRE}$ e

$P\widehat{S}F$, e consequentemente, a reta que contém E e F determinará nas circunferência dois dos vértices do quadrado. Os passos seguintes compreendem apenas às construções das semi-retas $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CD}$, cujas interseções determinarão os demais vértices! Com a ferramenta ângulo podemos medir todos os ângulos em questão e verificar a validade da construção!

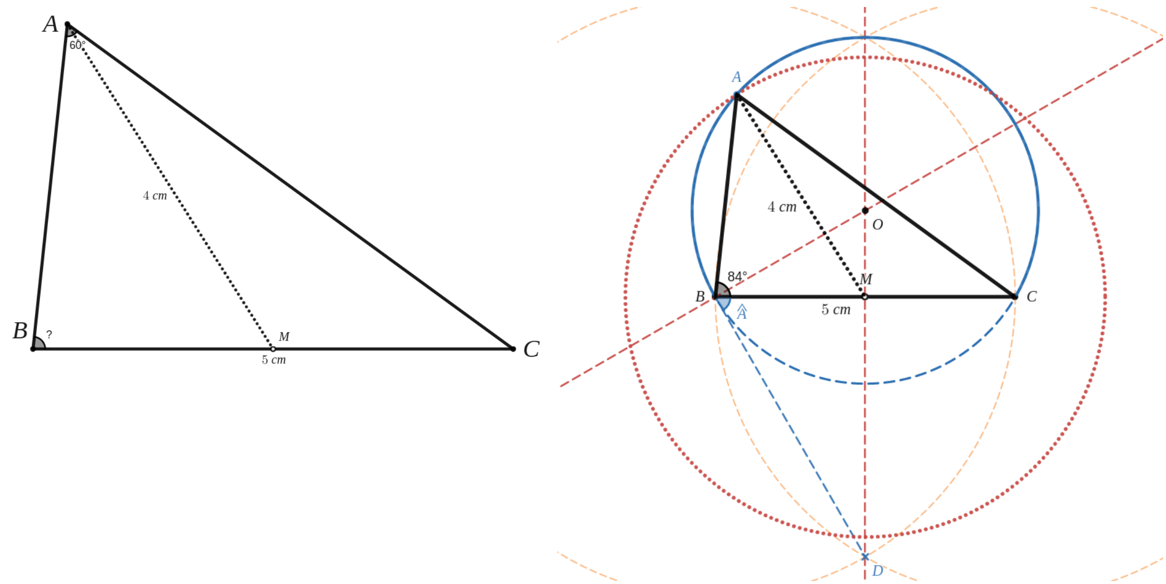
2.4 Problema envolvendo arco capaz

Bem distinto das construções geométricas que se objetivam em consolidar diretamente as proposições da geometria plana, o arco capaz, apesar de se justificar na teoria, é um elemento usado primordialmente para problemas em construções. Para exemplificar seu uso, consideremos um problema que leva em conta unidade de medida. Isso é possível no *Desmos Geometry* porque podemos fazer uso de um *grid* na sua janela gráfica.

Num triângulo ABC o lado BC mede 5 cm, o ângulo Â mede 60° e a mediana AM mede 4 cm. Se $\overline{AC} < \overline{AB}$, quanto mede o ângulo interno em B? (figura 8a)

Fig. 8: Problema de determinação de um ângulo interno.

(a) O problema **(b)** Solução do problema



Fonte: autoria própria. Disponível em Aplicação Arco Capaz

Notemos que não é possível dizer onde fica o vértice A! Só sabemos, além de $\overline{BC} = 5$ cm, a distância de A até o ponto-médio do segmento BC e o seu ângulo interno. Aí que entra a necessidade de uso do arco capaz; pois ele é um arco, passando nos extremos do segmento, que em qualquer ponto dele tem o ângulo sempre com a mesma medida. O que vai determinar o vértice A solução do problema será a interseção do arco capaz com o arco de circunferência de raio medindo $\overline{AM}$. A construção do arco capaz com régua e compasso segue a etapa de primeiramente criar uma semi-reta (aqui $\overrightarrow{BD}$) com a abertura do ângulo (Â), abaixo do segmento conhecido (BC), e em seguida traçar a perpendicular dessa semi-reta, passando no vértice (B). Essa perpendicular então, ao intersectar a mediatriz do segmento conhecido determinará o centro do arco capaz! A figura (8b) tem a solução do nosso problema, seguindo a ideia descrita aqui!

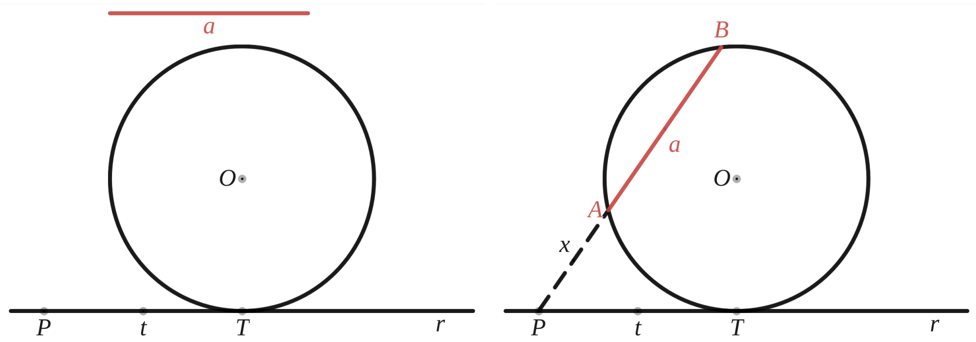
Na solução apresentada, o ângulo $\hat{A}$ foi obtido construindo vértices de um triângulo equilátero para se obter $60°$ entre BC e semi-reta $\overrightarrow{BD}$. No *Desmos Geometry* temos opcionalmente a ferramenta `Ângulo Direcionado` para fazer isso.

2.5 Problema com expressão algébrica

Consideremos o belo problema de, *Dados um segmento de comprimento a, uma circunferência $\mathcal{C}$ e uma reta r tangente a $\mathcal{C}$ num ponto T e que também contém o ponto P, cuja distância $PT = t$; determinar pontos A e B em $\mathcal{C}$ tal que o segmento PAB seja secante a $\mathcal{C}$ mas com $\overline{AB} = a$.* Veja a figura 9a abaixo!

Fig. 9: Problema com expressão algébrica.

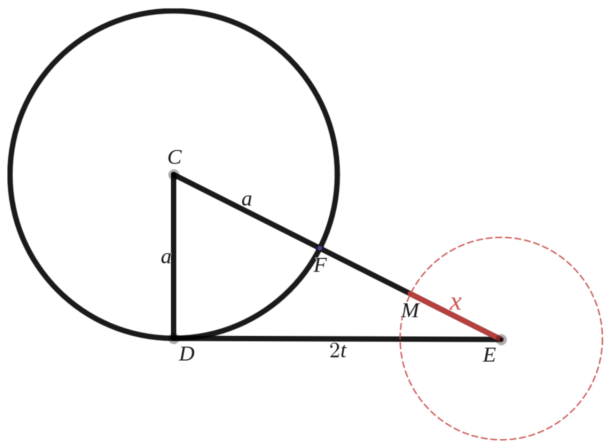
(a) Hipóteses **(b)** Objeto solução



Fonte: autoria própria.

Esse problema, assim como muitos em construções geométricas, tem solução aparecendo quando o visualizamos já resolvido (figura 9b)! Estamos a procura da medida do segmento $x = \overline{PA}$, que geometricamente seria a medida do raio da circunferência de centro em P. Da geometria plana sabemos da chamada "Potência de Ponto", que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$, ou seja, $x \cdot (x + a) = t^2$, do que resulta na equação $x^2 + ax - t^2 = 0$, e cuja única solução positiva é $x = \frac{-a+\sqrt{a^2+4t^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2+(2t)^2}-a}{2}$. O radical $\sqrt{a^2 + (2t)^2}$ pode ser interpretado como sendo a medida da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos medindo a e $2t$. O primeiro passo então é tomado pela construção de um triângulo retângulo com tais catetos. Em seguida, sobre a hipotenusa subtraí-la por a e depois tomar a metade da medida resultante para se obter x. Isso equivale à construção de dado o segmento de comprimento a, digamos CD (acompanhe pela figura 10); criar em sua extremidade D o segmento DE perpendicular e de comprimento $2t$ (esses comprimentos são copiados com a ferramenta compasso); construir a hiponetusa como sendo o segmento das extremidades livres CE e dele retirar o comprimento a a partir de C, que se obtém F simplesmente pela interseção do círculo de centro em C e raio a, conforme ilustra a figura 10 abaixo. A metade de $\overline{EF}$ é $x = \overline{EM}$, sendo tal medida podendo ser tida pelo *Desmos* usando o ponto-médio. Depois disso usamos a ferramenta compasso, a qual primeiro exige escolher o comprimento que será raio (comprimento $\overline{EM}$) e em seguida o ponto que será o centro, que em nosso caso é o ponto P da hipótese do problema. O ponto A nada mais será que a demarcação pela ferramenta ponto sobre a interseção desse último círculo com a circunferência $\mathcal{C}$. Traçando uma linha de P passando por A obteremos o ponto B como interseção com $\mathcal{C}$, e cuja configuração será nossa solução ilustrada em (9b).

Fig. 10: Determinação da medida x



Fonte: autoria própria. Disponível em Expressão Algébrica do 2° grau

3 Considerações finais

O uso do *Desmos Geometry* como ferramenta educacional no ensino da geometria euclidiana oferece uma série de benefícios significativos que contribuem para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e de pensamento crítico entre os alunos. Ao longo deste texto, apresentamos três problemas geométricos que, embora não triviais, ilustram claramente como essa plataforma pode facilitar a compreensão e a resolução de construções geométricas complexas.

O *Desmos Geometry* permite uma visualização clara e precisa das construções geométricas, possibilitando que os alunos observem e manipulem figuras em tempo real. Essa interatividade é crucial para o entendimento dos conceitos abstratos da geometria, permitindo que os estudantes experimentem e descubram propriedades e relações geométricas por conta própria.

A ferramenta promove uma abordagem ativa de aprendizado, onde os alunos não são apenas receptores passivos de informações, mas participantes ativos no processo de descoberta. Ao interagir com os problemas e tentar diversas construções, os alunos desenvolvem habilidades de resolução de problemas e ganham confiança em suas capacidades matemáticas.

Embora o *Desmos Geometry* seja uma ferramenta moderna, ele complementa de maneira eficaz o currículo tradicional de geometria euclidiana. As construções clássicas, que tradicionalmente são realizadas com régua e compasso, podem ser reproduzidas digitalmente, permitindo uma transição suave entre métodos tradicionais e tecnológicos. Isso facilita a integração do software nas aulas, sem necessidade de uma reformulação completa do conteúdo.

Uma das grandes vantagens do *Desmos Geometry* é a capacidade de fornecer feedback imediato. Quando os alunos realizam construções e resolvem problemas, eles podem imediatamente ver os resultados de suas ações e corrigir erros em tempo real. Isso promove um aprendizado mais eficaz e personalizado, onde cada aluno pode progredir no seu próprio ritmo.

As construções por meio do *Desmos* são feitas, assim como as que são feitas manualmente. Possuem o mesmo desenvolvimento e os mesmos argumentos. Porém, por serem feitas com o auxílio da tecnologia, as figuras são construídas com boa precisão e mais rapidamente. Podemos elencar algumas caracterísitcas para ajudar na decisão de usá-lo ou não no ensino da geometria por meio de construções geométricas:

- Fazer, desfazer e esconder elementos das construções possibilita realizar testes ou dar destaques em etapas;
- Avaliações sobre que condições as construções são válidas são realizadas facilmente;
- As medidas de segmentos e ângulos são obtidas sem muito esforço;
- Cada construção pode gerar um link, permitindo compartilhamento, acompanhamento e correção do docente, ou simplesmente armazenamento para edição e evolução de construções;
- Qualquer elemento inserido na janela gráfica possui um símbolo que pode ser manuseado algebricamente pela barra lateral de expressões, e por ela acessar as configurações para edição de cor, espessura, transparência e tipo de linha, marcador de pontos e criação de legenda (aceitando incluse sintaxe LaTeX).
- Uma desvantagem, mas que é inerente da representação de números reais no computador, é o aparecimento de medidas não exatas; como por exemplo de um ângulo reto apresentar em tela uma casa decimal acima ou abaixo.
- Acompanhamos a bastante tempo a plataforma *Desmos* e percebemos que se o *Desmos Geometry* tivesse ligação com a *Classroom* poderíamos ter acesso ao seu painel de *Controle do Professor*, facilitando o acompanhamento e curadoria docente, assim como também permitir criar atividades com páginas interativas usando a *Computacion Layer* (Camada de Computação), possibilitando haver direcionamento sequencial de conteúdos em qualquer etapa do ensino de construções geométricas.

Em suma, o *Desmos Geometry* se destaca como uma ferramenta poderosa no ensino da geometria euclidiana, oferecendo uma rica combinação de visualização, interatividade e integração curricular. Ao facilitar a compreensão de conceitos geométricos e estimular uma abordagem ativa e exploratória do aprendizado, essa ferramenta contribui significativamente para a formação de estudantes mais engajados e proficientes em matemática. A incorporação do *Desmos Geometry* nas práticas pedagógicas de ensino de geometria representa um avanço importante, alinhando-se às necessidades educacionais contemporâneas e preparando os alunos para os desafios futuros.

Bibliografia

[1] Eduardo Wagner. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP: PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2016. 1, 5

[2] Eliane Quelho Frota Rezende and Maria Lúcia Bontorim de Queiroz. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2016. 2