Pluricentro e O Problema Deliano

Criação e Desenvolvimento Teórico: Prof. Adolfo Braucks, 2024

Definições

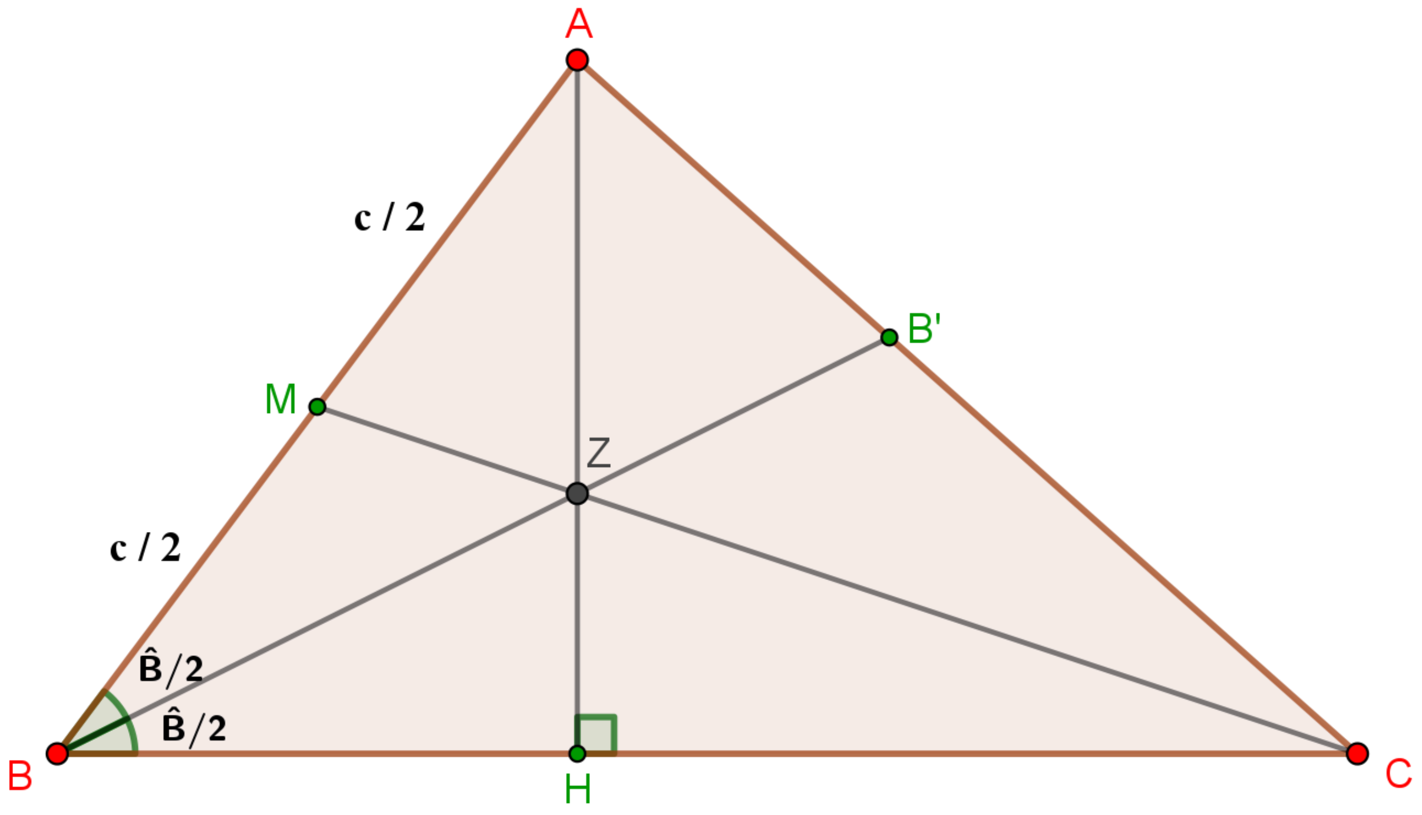
- Pluricentro: interseção da altura do vértice A, da bissetriz interna do ângulo $\widehat{B}$ e da mediana do lado BC (convenção), quando existe

  Notação: ponto **Z**

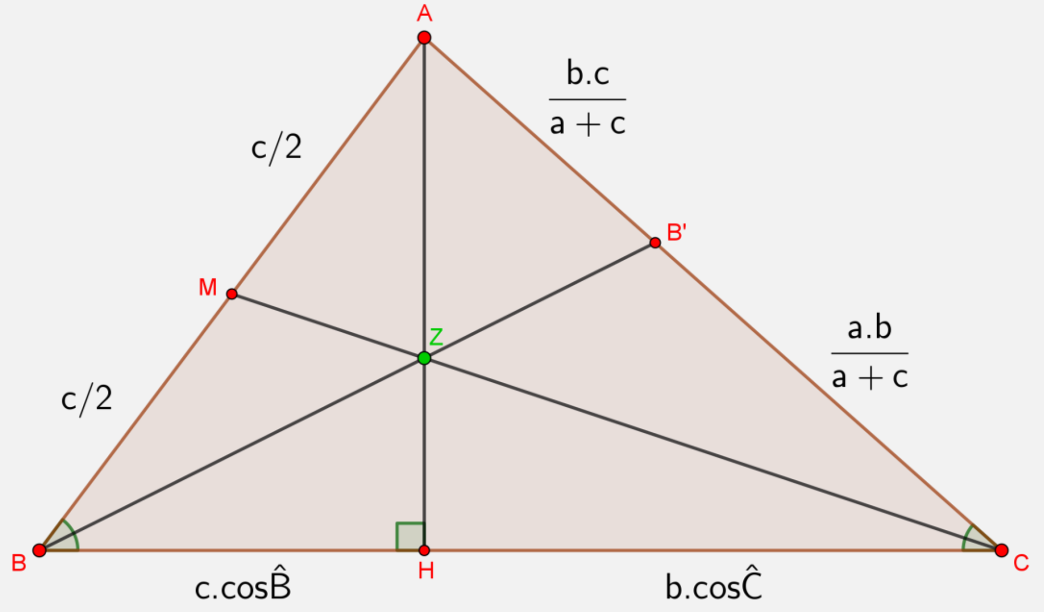
- Triângulo Pluricêntrico: é qualquer triângulo dotado de pluricentro

Observação: todo triângulo equilátero é trivialmente pluricêntrico, e por isso não os abordamos aqui; nosso interesse é apenas pelos triângulos escalenos eventualmente agraciados com pluricentro Z. Triângulos isósceles não equiláteros não podem ser pluricêntricos!

Exemplo de Triângulo com Pluricentro Z



Condição de Existência



- Aplicamos o Teorema de Ceva a um triângulo pluricêntrico ABC:
- $\frac{c}{2} \cdot c. \cos \hat{B} \cdot \frac{a.b}{a+c} = \frac{c}{2} \cdot b. \cos \hat{C} \cdot \frac{b.c}{a+c}$, ou seja, após simplificar:
- $a. \cos \hat{B} = b. \cos \hat{C}$

Condição de Existência

- Temos: $\frac{BH}{HC} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AM}{MB}$ = 1, isto é, $\frac{c\,.\cos\widehat{B}}{b\,.\cos\widehat{C}} \cdot \frac{(a\,.\,b)/(a+c)}{(b\,.\,c)/(a+c)} \cdot \frac{c/_2}{c/_2}$ = 1 , logo
  $a\,.\cos\widehat{B} = b\,.\cos\widehat{C}$ (1)

- Somando $c\,.\cos\widehat{B}$ a ambos os lados da igualdade dada por (1),
  $a\,.\cos\widehat{B} + c\,.\cos\widehat{B} = b\,.\cos\widehat{C} + c\,.\cos\widehat{B} = a \Rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{a}{a+c}$ (2)

Consequências da Condição de Existência

- Cálculo da medida **<u>b</u>** do lado CA em função da medida dos lados AB e BC, respectivamente **<u>c</u>** e **<u>a</u>** :

  Da lei dos cossenos, $b^2 = c^2 + a^2$ - 2.c.a.cos $\hat{B}$

  Mas, para todo triângulo pluricêntrico, vale (de (2)) cos $\hat{B} = \frac{a}{a+c}$

  Logo $b^2 = c^2 + a^2$ - 2.c.a.$\frac{a}{a+c} = c^2 + a^2$.(1 - 2.$\frac{c}{a+c}$)

  E então $b^2 = c^2 + a^2$.($\frac{a+c-2c}{a+c}$) $= c^2 + a^2$.($\frac{a-c}{a+c}$) (a = c ⇔ b = c)

  b^2 - $c^2 = a^2$.($\frac{a-c}{a+c}$) ⇒ $\frac{b-c}{a-c} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{a}{b+c}$ (posso dividir! Pois a ≠ c)

Consequências da Condição de Existência

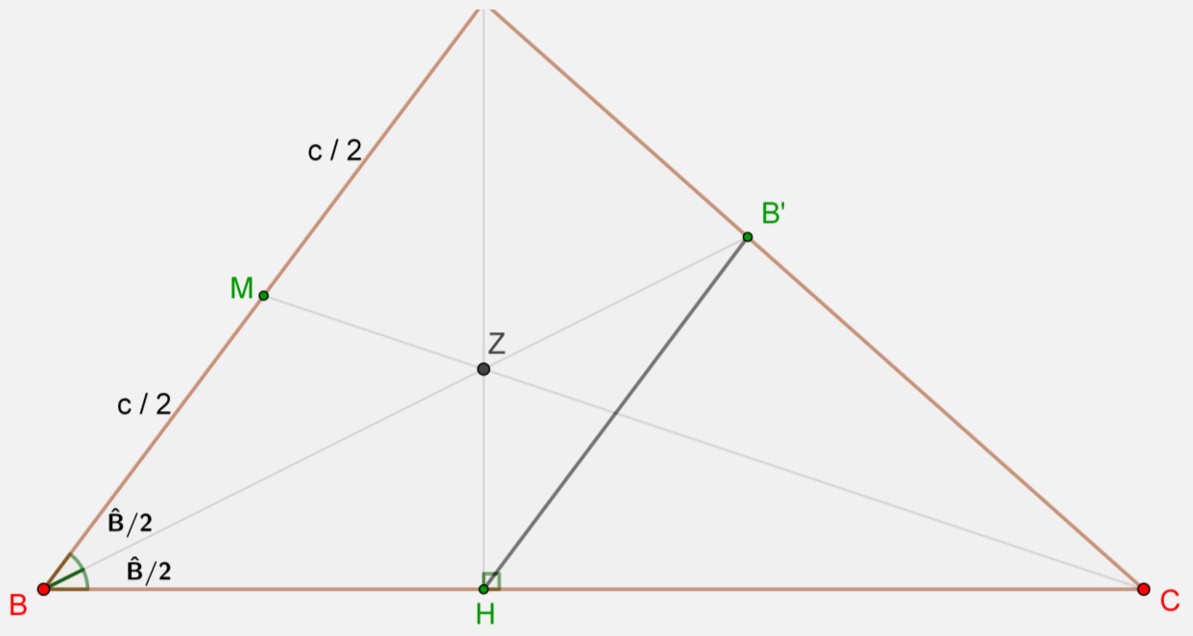
$\frac{b-c}{a-c} = \frac{a}{a+c} . \frac{a}{b+c}$ (e temos que: a $<$ a + c ; a $<$ b + c) (pois c é lado do triângulo, número real estritamente positivo, e 'o triângulo ABC existe')

Então $0 < \frac{b\ - c}{a\ - c} < 1$, logo:

- Se (b - c) e (a - c) são ambos positivos, b - c < a - c ⇒ a > b > c
- Se (b - c) e (a - c) são ambos negativos, b - c > a - c ⇒ a < b < c

Conclusão: o lado CA é **sempre o de medida intermediária**, em triângulos pluricêntricos em que a altura seja do vértice A, a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$ e a mediana do lado AB. Naturalmente temos também $\widehat{A} > \widehat{B} > \hat{C}$ ou $\widehat{A} < \widehat{B} < \hat{C}$

Teorema 1



- Em todo triângulo ABC, o segmento de reta com extremidades nos pés da altura do vértice **A** e da bissetriz do ângulo $\widehat{\mathbf{B}}$ é paralelo ao lado **AB** *se e somente se* as cevianas têm a mesma interseção com a mediana desse lado, isto é, SSS o triângulo é pluricêntrico.

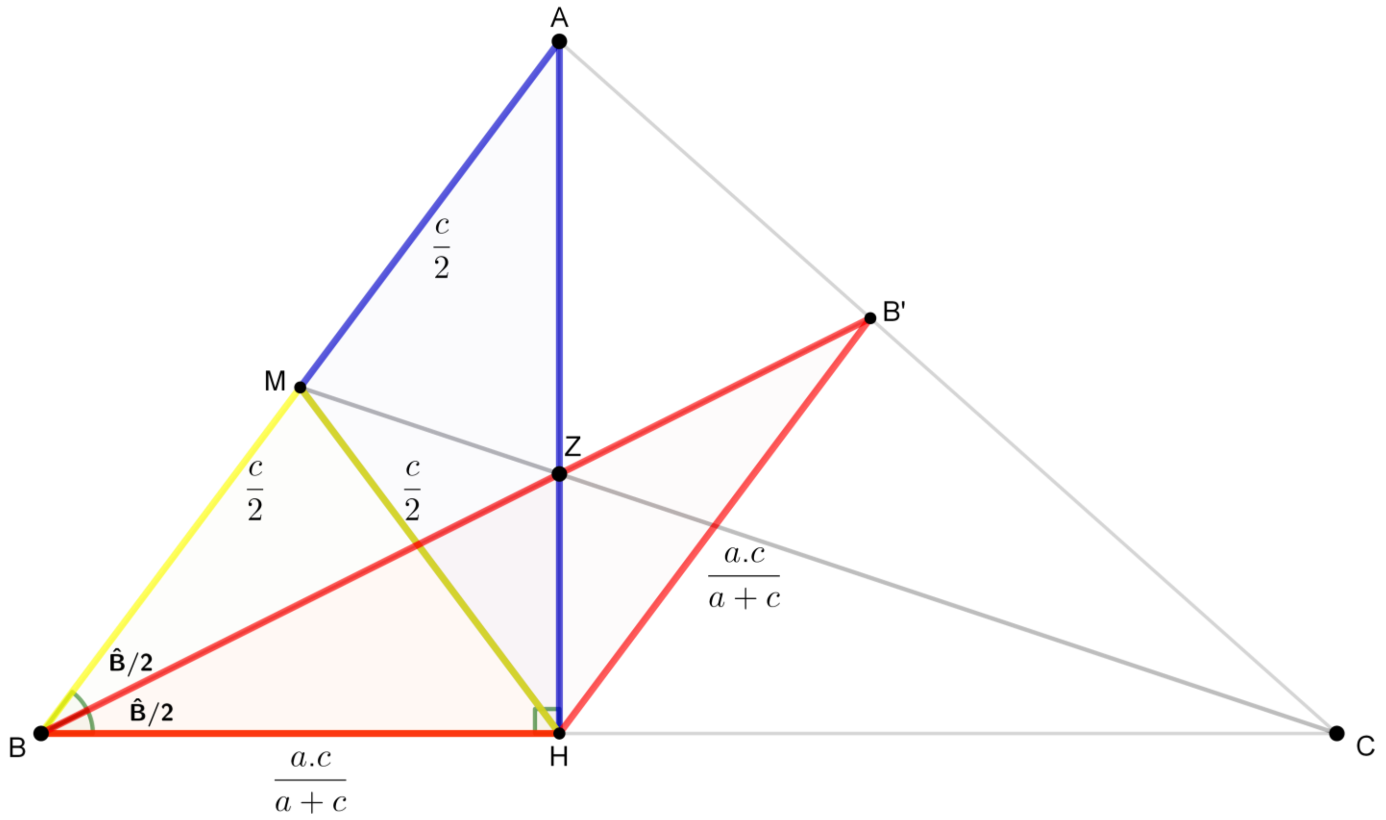
Demonstração

- Supondo que o triângulo ABC seja pluricêntrico, temos: HC $=$ BC - BH $=$
  $= a - c \,.\, \cos \widehat{B} = a - c \,.\, \dfrac{a}{a+c} = \dfrac{a.(a+c) - a.c}{a+c} = a \,.\, \dfrac{a}{a+c} = a \,.\, \cos \widehat{B}$
  Teorema da Bissetriz Interna: $\dfrac{B'C}{AB'} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow \dfrac{B'C}{AB' + B'C} = \dfrac{a}{c+a} \Rightarrow$ B´C $= b \,.\, \cos \widehat{B}$
  Logo: $\dfrac{B'C}{b} = \dfrac{HC}{a} = \cos \widehat{B} \Rightarrow$ B´H é paralelo ao lado AB ⇒ provamos a ida
- Supondo B´H paralelo ao lado AB, $\dfrac{HC}{BH} = \dfrac{B'C}{AB'}$ ⇒ CH.AB´= HB.B´C (I)
  Seja ceviana CN (N no lado AB), contendo Z, encontro da altura de A
  com a bissetriz de $\widehat{B}$. Do teorema de Ceva, BN.CH.AB´= NA.HB.B´C ⇒
  (de (I)) BN = NA ⇒ CN é mediana de AB ⇒ Z é pluricentro ⇒ provamos a volta

Corolário do Teorema 1

- Em todo triângulo pluricêntrico ABC, a altura AH é bissetriz do ângulo formado pelos segmentos de reta MH e HB', onde M é pé da mediana do lado AB e B' pé da bissetriz interna do ângulo $\widehat{ABC}$.
- Prova: sendo HB' paralelo ao lado AB, o ângulo $\widehat{AHB'}$ é congruente ao ângulo $\widehat{HAB}$ (são alternos internos). Por outro lado, o triângulo AHB, retângulo em H porque AH é altura e portanto perpendicular ao lado BC, tem em MH uma mediana, o que implica em que esse segmento é tal que MH = AM = MB. Deste modo, o triângulo AHM é isósceles e sendo assim o ângulo $\widehat{AHM}$ é congruente ao ângulo $\widehat{HAB}$. Logo $\widehat{AHB'} = \widehat{AHM}$, o que prova o corolário.

Triângulos Isósceles

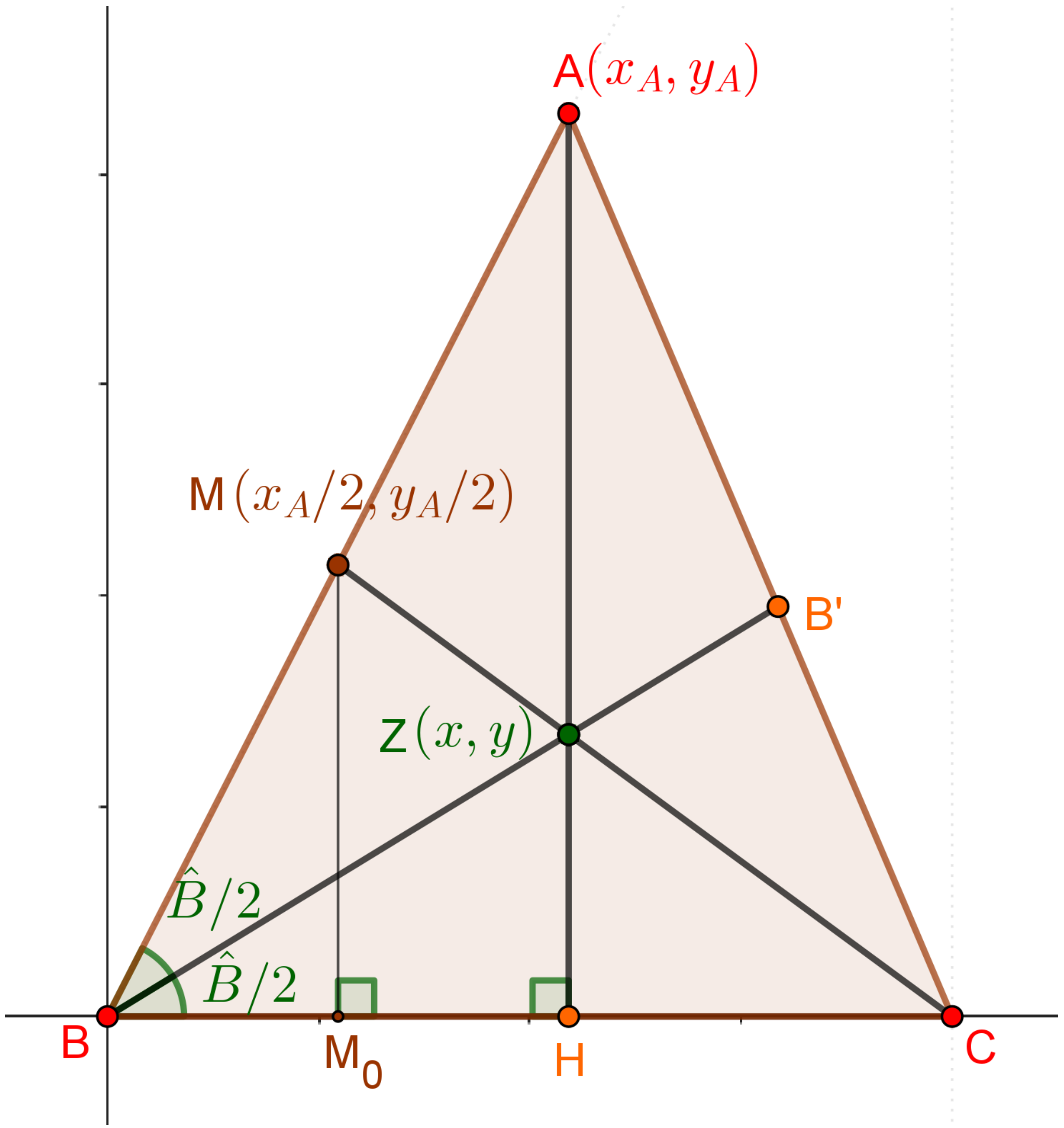


- É possível vislumbrar alguns triângulos isósceles quando se traça todos os segmentos de reta que contêm o pluricentro Z ou unem os pés das três cevianas cujo ponto comum é justamente ele.

O Pluricentro e a Cissóide de Díocles

- Outra interessante peculiaridade dos triângulos pluricêntricos é a curva percorrida pelo pluricentro, se fixamos os vértices B e C em um plano cartesiano (fazendo, assim, da medida do lado BC = a, uma constante), permitindo que o ângulo $\widehat{\mathrm{B}}$ varie livremente, no intervalo (0,90°). Recordemos que esse ângulo tem sempre valor intermediário, em um triângulo pluricêntrico, e que, da condição de existência de tais triângulos se pode escrever $\cos \widehat{\mathrm{B}} = \frac{a}{a + c}$, ou seja, c = a . $\frac{1 - \cos \widehat{\mathrm{B}}}{\cos \widehat{\mathrm{B}}}$. O Geogebra permite que se obtenha o rastro do ponto, utilizando a função de Controle Deslizante:

O Pluricentro e a Cissóide de Díocles



O Pluricentro e a Cissóide de Díocles

- Temos, na figura do slide anterior:

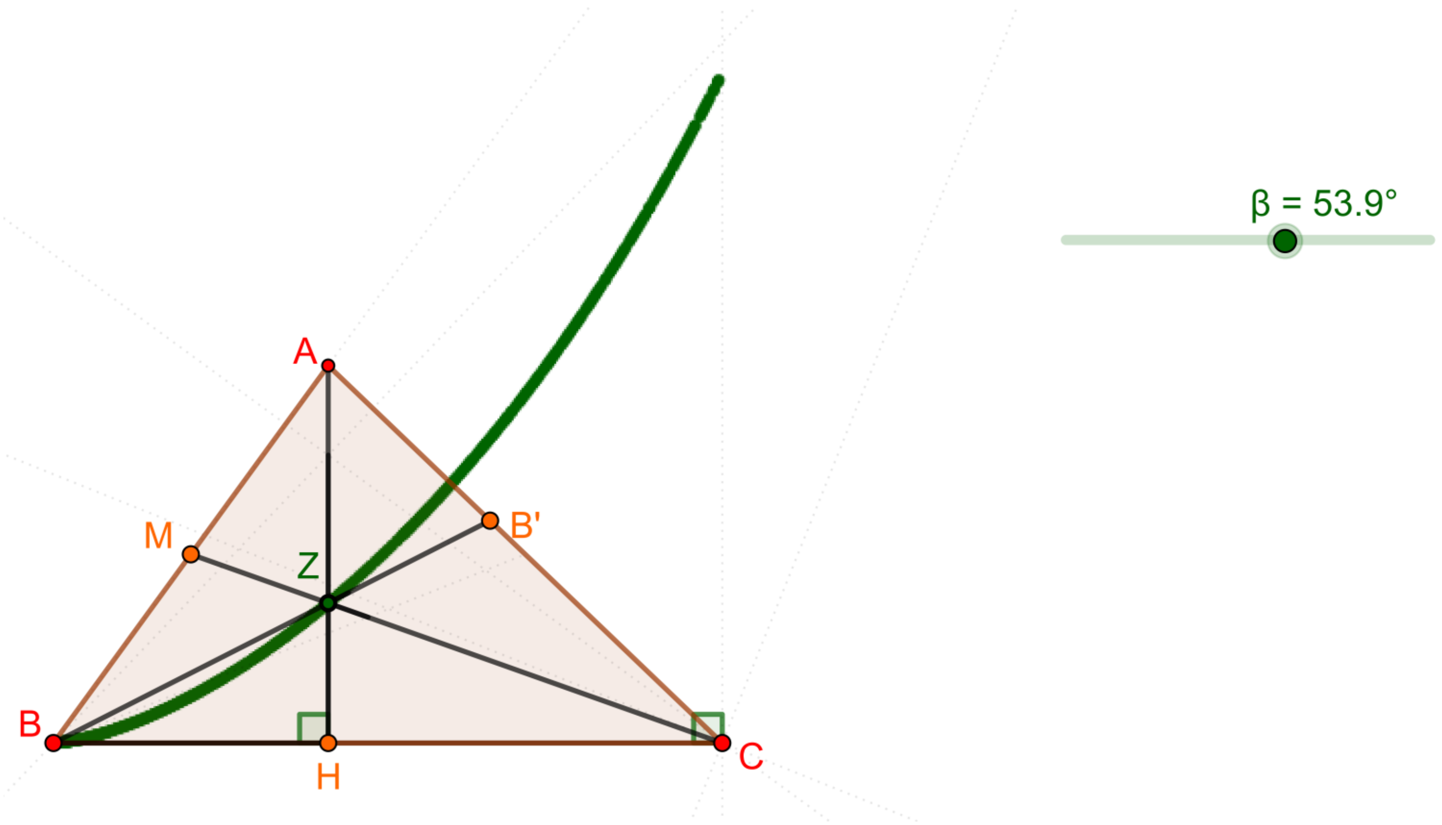
  $\frac{y}{y_A} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A{}^2} + x}$ (Teorema da Bissetriz Interna: bissetriz BZ no Δ ABH)

  $\frac{y}{y_A} = \frac{a - x}{2a - x}$ (Semelhança dos triângulos ZHC e MM_oC)

  Igualando os lados direitos, substituindo y_A pelo valor da segunda expressão e fazendo o desenvolvimento algébrico que é necessário, se chega ao que se segue:

$(2.a - x).\, y^2 = x^3$

O Pluricentro e a Cissóide de Díocles



- À medida em que se permite que varie o ângulo β , na verdade o ângulo interno $\widehat{B}$ do triângulo pluricêntrico, também variam os lados AB e AC e, por conseguinte, a posição do pluricentro Z, que percorre a curva verde

O Pluricentro e o Problema Deliano

- A curva descrita pelo pluricentro Z, que indica todas as posições possíveis desse ponto quando mudam as medidas dos lados AB e AC, obedecendo à condição de existência, cos $\widehat{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a + c}}$, tem o nome de "Cissóide de Díocles", homenagem a um grande geômetra grego, que estudava o famoso "Problema Deliano" ou "Problema da Duplicação do Cubo" e concluiu que, nessa curva, cuja expressão algébrica é, como vimos em um slide anterior, *(2.a - x)*. $y^2 = x^3$, o ponto do plano cartesiano cujas coordenadas cartesianas correspondam a um par ordenado (x, y), tal que se tenha x = 2.a – 2.y , satisfaz a $x^3 = 2.y^3$

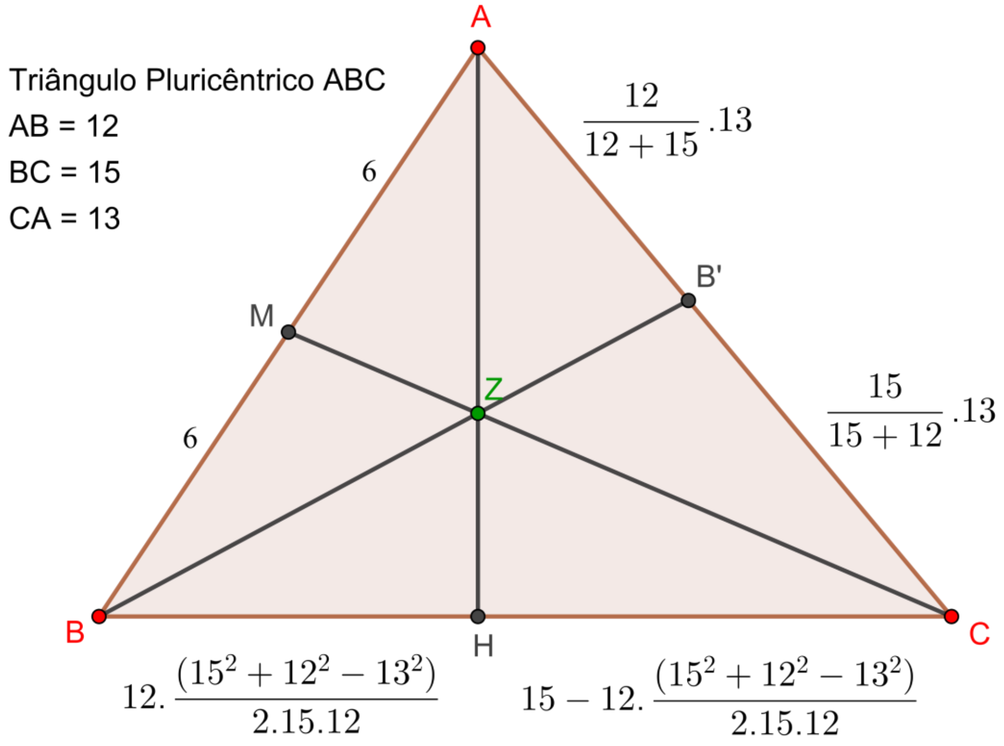
Triângulo Pluricêntrico com lados inteiros

- Programa de computador em Pascal permitiu que pudéssemos perscrutar a reta real em busca de triplas ordenadas (a, b, c) tais que todos os números fossem distintos e que, atribuindo valores inteiros aos lados a e c, também fosse inteiro o valor de b, em consonância com a expressão

  $$\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 . \frac{a - c}{a + c}}$$

- A pesquisa teve êxito para infinitas triplas, mas boa parte delas é múltipla daquela que se obtém com a = 15, c = 12 ⇒ b = 13
- Esse triângulo pluricêntrico é reproduzido a seguir:

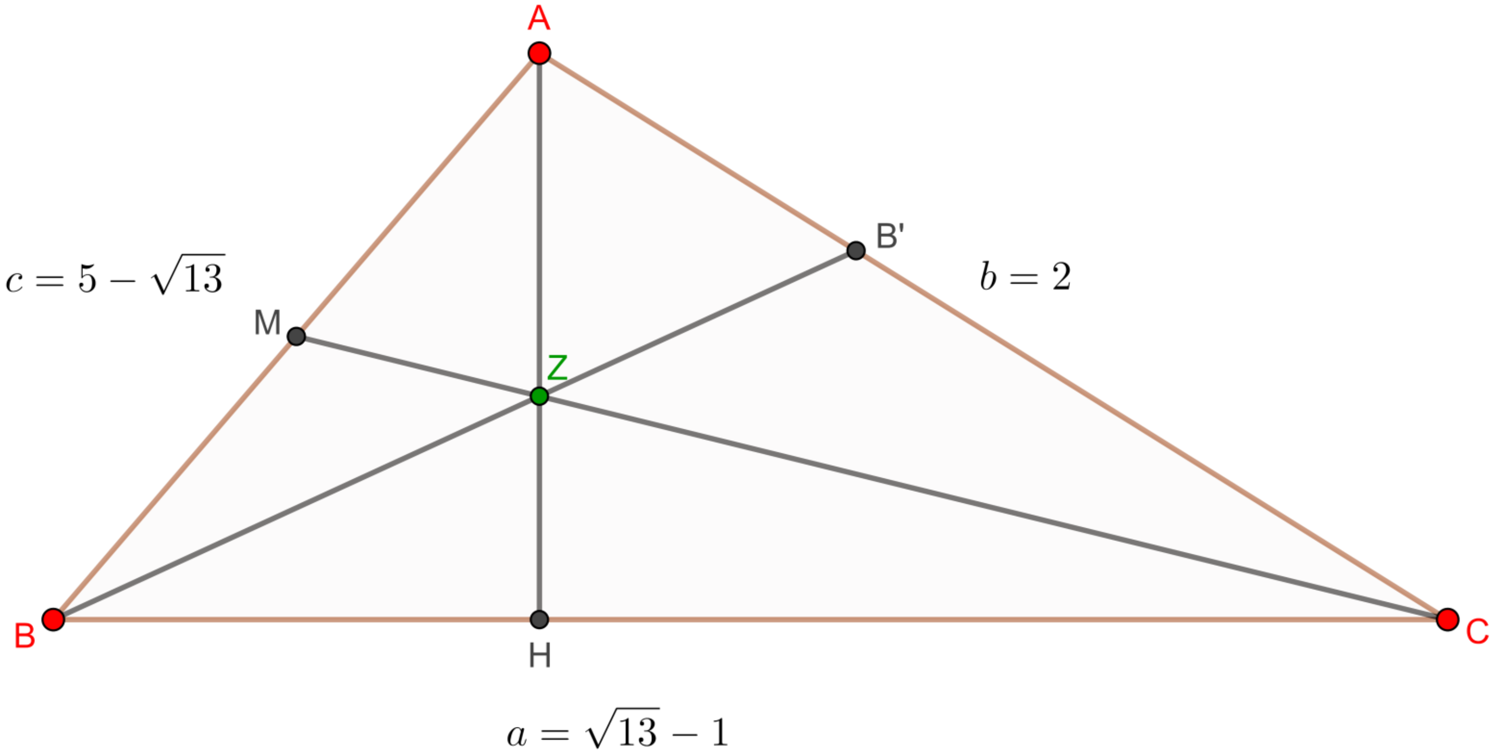
Triângulo Pluricêntrico com lados inteiros



Triângulo Pluricêntrico com lados em P. A.

- Também investigamos a possibilidade de que um triângulo ABC munido de pluricentro Z tenha os valores das medidas de seus lados formando uma Progressão Aritmética
- Como já se sabe que o lado AC, isto é, aquele oposto ao vértice relativo ao ângulo dividido ao meio pela bissetriz interna, optamos por chamar esse lado de b, e atribuímos aos outros dois lados os valores (b - r) e (b + r)
- Substituímos tais valores em $\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 . \frac{a - c}{a + c}}$ e o resultado é a figura a seguir

Triângulo Pluricêntrico com lados em P. A.



Triângulo Retângulo e Pluricêntrico

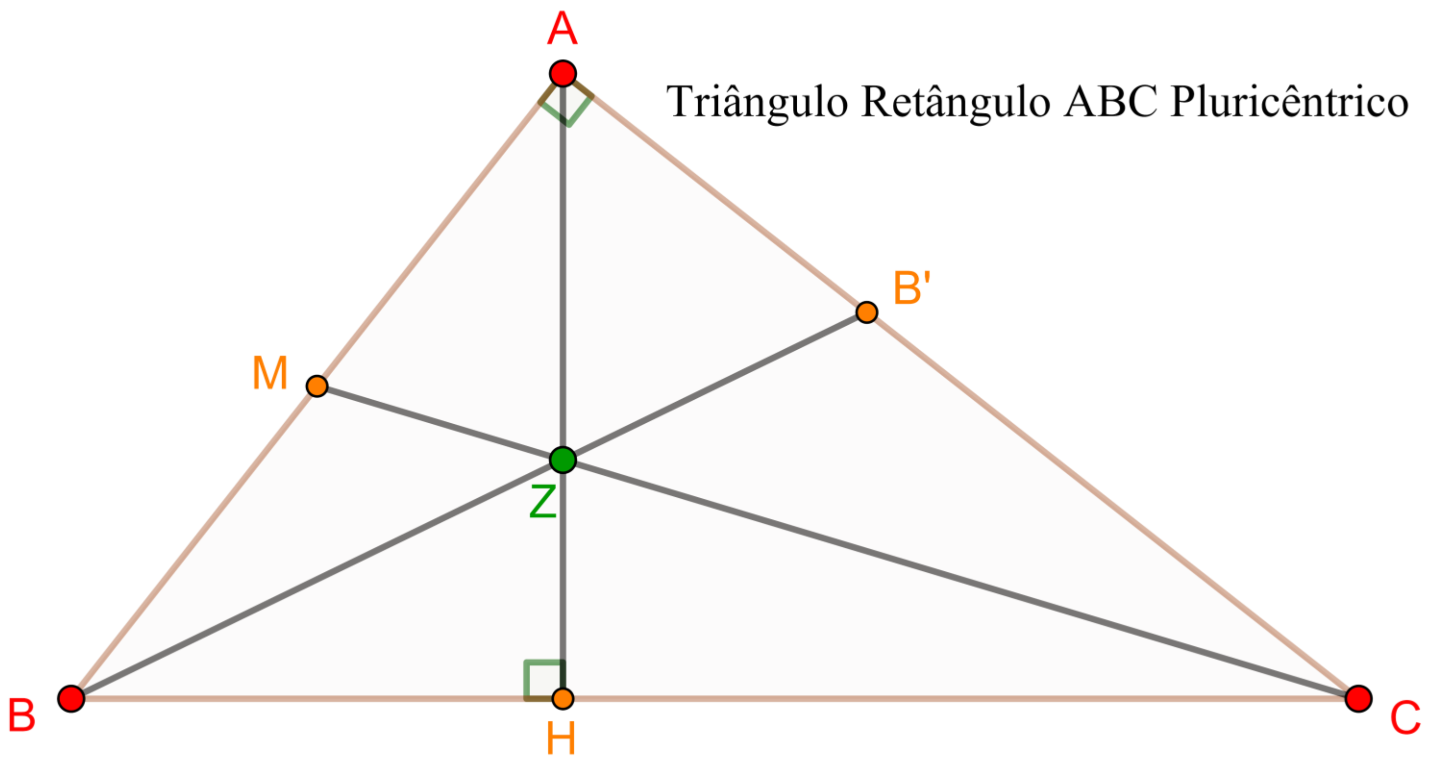
- Um triângulo ABC pluricêntrico pode ter Pluricentro?
- A resposta é: SIM! Observemos que, como as alturas que partem dos vértices que não correspondem aos maiores ângulos não estão totalmente contidas no interior desses polígonos, quando eles são retângulos ou obtusângulos, nosso cuidado em relação a isso é o de convencionar que nesses casos o maior ângulo (igual ou maior que 90°) é sempre o do vértice de onde sai a altura
- Temos: $\cos \widehat{B} = \frac{a}{a+c}$. Mas aqui $\cos \widehat{B} = \frac{c}{a}$. Logo $\frac{a+c}{a} = \frac{a}{c}$, então $\frac{a}{c}$ é o número igual ao seu inverso mais a unidade

Triângulo Retângulo e Pluricêntrico

- Tal número, uma das contantes mais conhecidas na Matemática e que aparece inclusive no estudo da sequência de Fibonacci, é conhecido como o “número de ouro”, e denotado por ϕ.
- Veja: 1,666... = 5/3 e 5/3 - 3/5 = (5^2 - 3^2) / (3.5) = 16/15 $>$ 1
- Por outro lado, 1,6 = 8/5 e 8/5 - 5/8 = (8^2 - 5^2) / (5.8) = 39/40 $<$ 1
- O número de ouro ϕ tem seu valor exato, $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$, revelado pela resolução da equação do segundo grau em $(\frac{a}{c})$

$(\frac{a}{c})^2$ - $(\frac{a}{c})$ - 1 = 0

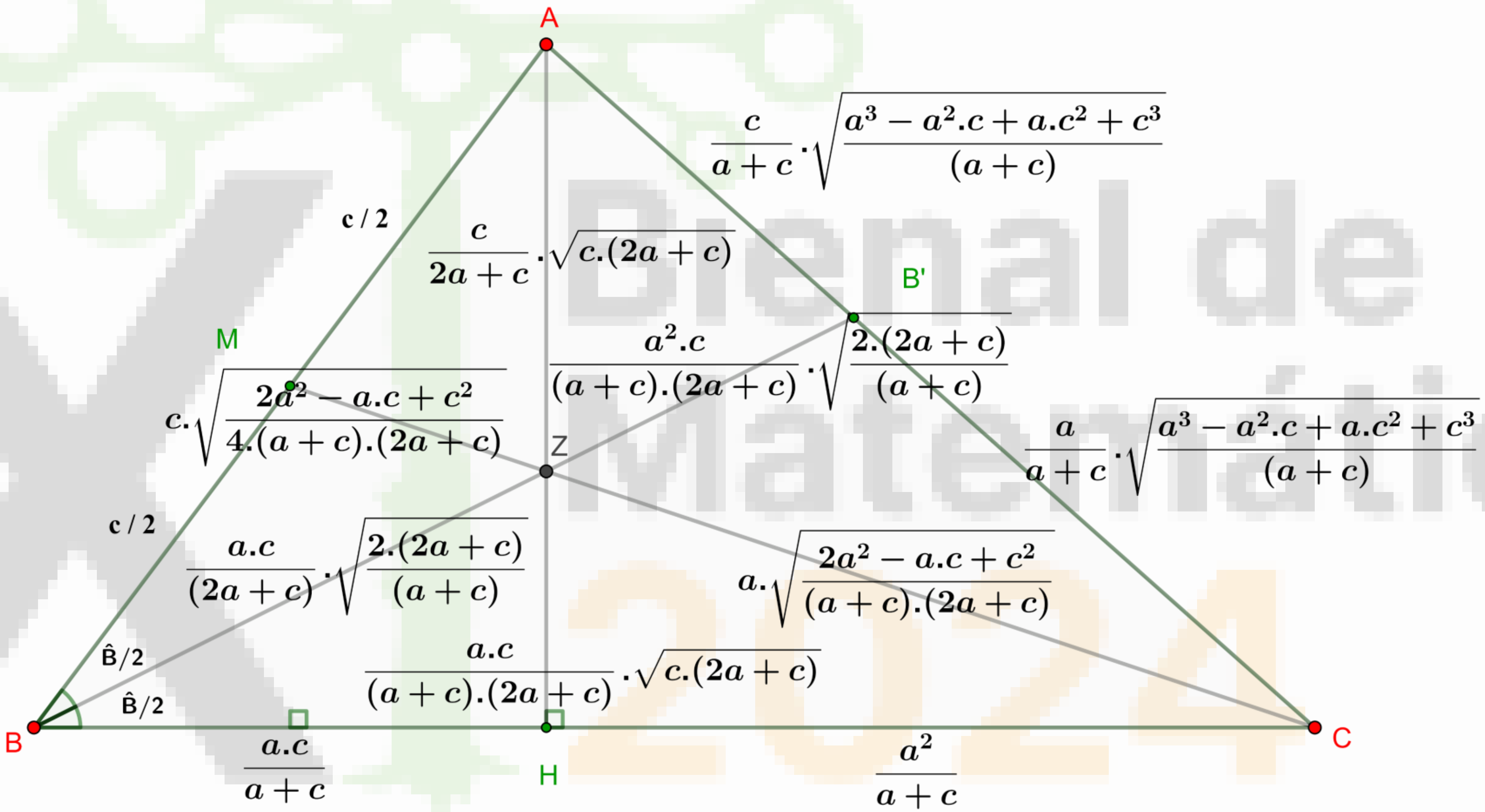
Triângulo Retângulo e Pluricêntrico



- Nota: $\dfrac{a}{a+c} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = a \cdot c \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \sqrt{\phi}$

$\therefore$ os lados do Δ ABC estão em P. G. de raiz $\sqrt{\phi}$

Todos os “valores” do Triângulo Pluricêntrico

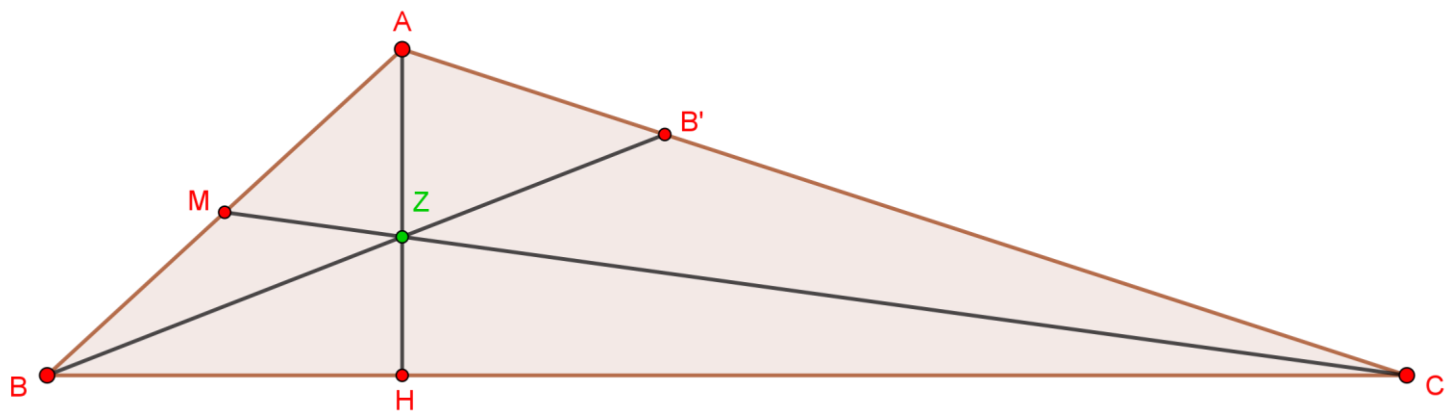


Áreas em que o Pluricentro divide o triângulo

- Vamos analisar as áreas em que a interseção de altura, bissetriz interna e mediana, cada uma delas relativa a um dos vértices de um triângulo ABC, divide esse triângulo, quando tal ponto existe, ou seja, quando se tem $\cos \widehat{B} = \frac{a}{a+c}$
- Nosso interesse é investigar as medidas das áreas de três triângulos, a saber [ZBC], [ZCA] e [ZAB], sendo Z o pluricentro e tendo em mente que, evidentemente, a soma dessas áreas é igual à área do triângulo original ABC, [ABC] (atenção à convenção)
- Esses três valores, divididos pela área total do polígono, fornecem o que se chama de "Coordenadas Baricêntricas" do Pluricentro

Áreas em que o Pluricentro divide o triângulo

- CM é mediana do lado AB, então AM = MB e daí [ZCA] = [AMC] - [AMZ] = = [CMB] - [MBZ] = [ZBC]
- BB’ é bissetriz do ângulo $\widehat{\mathrm{B}}$, então Z equidista de AB e BC, e sendo assim $\frac{[\mathrm{ZAB}]}{\mathrm{c}} = \frac{[\mathrm{ZBC}]}{\mathrm{a}}$
- $\frac{[\mathrm{ZAB}]}{\mathrm{c}} = \frac{[\mathrm{ZBC}]}{\mathrm{a}} = \frac{[\mathrm{ZCA}]}{\mathrm{a}} = \frac{[\mathrm{ABC}]}{2\mathrm{a} + \mathrm{c}}$



Coordenadas Baricêntricas do Pluricentro Z

- Vimos no slide anterior que o fato de que o pluricentro é ponto de encontro da altura do vértice A, da bissetriz interna do ângulo $\widehat{\mathrm{B}}$ e da mediana do lado AB implicam em que:

$$\frac{[\mathrm{ZAB}]}{\mathrm{c}} = \frac{[\mathrm{ZBC}]}{\mathrm{a}} = \frac{[\mathrm{ZCA}]}{\mathrm{a}} = \frac{[\mathrm{ABC}]}{2\mathrm{a}+\mathrm{c}}$$

- Assim, o ponto Z, pluricentro do triângulo ABC, quando existe, tem suas coordenadas baricêntricas dadas por

$$Z = \left(\frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{a}+\mathrm{c}}, \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{a}+\mathrm{c}}, \frac{\mathrm{c}}{2\mathrm{a}+\mathrm{c}}\right)$$

Bibliografia

- Geometria II, de A. C. Morgado, E. Wagner e M. Jorge, 2ª edição, Editora VestSeller, 1990

- Curso de Geometria "de accordo com o Programma de Admissão à Escola Polytechnica", de Timotheo Pereira, 2ª edição, Livraria de Francisco Alves, 1898