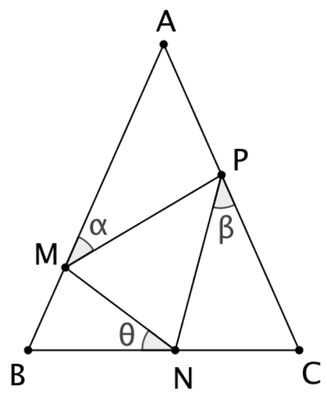
Questão 1. *(pontuação: 2)*

No triângulo isósceles ABC tem-se $AB = AC$. Os pontos M, N e P dos lados AB, BC e CA são tais que $PM = PN$. Sendo $P\hat{M}A = \alpha$, $N\hat{P}C = \beta$ e $M\hat{N}B = \theta$ mostre que

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Uma solução:



Sejam $A\hat{B}C = A\hat{C}B = x$ e $P\hat{M}N = P\hat{N}M = y$.
O ângulo $A\hat{M}N$ é externo do triângulo MBN. Logo, $\alpha + y = x + \theta$.
O ângulo $B\hat{N}P$ é externo do triângulo PNC. Logo, $\beta + x = y + \theta$.
Somando, temos $\alpha + \beta = 2\theta$, ou seja, $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$, cqd.

Questão 2. *(pontuação: 2)*

Considere o triângulo ABC, retângulo em A, sendo $BC = a$ e $AC = b$. Seja K_1 a circunferência de centro C que passa por A. A circunferência K_2 tem centro P sobre o lado BC, é tangente externamente à K_1 e é tangente ao lado AB.

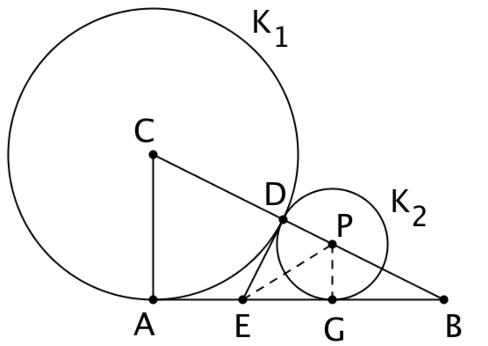
a) *(1,0)* Descreva como se pode determinar com régua e compasso o ponto P.

b) *(1,0)* Determine o raio da circunferência K_2 em função de a e b.

Obs.: os itens acima podem ser resolvidos de maneira independente.

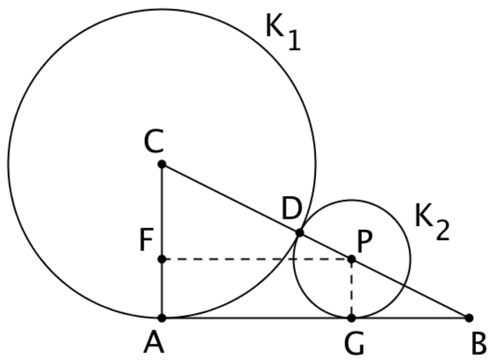
Uma solução:

a)



Seja D o ponto onde K_1 corta BC. A perpendicular a BC por D é tangente a K_1 e corta AB em E. A bissetriz do ângulo $D\hat{E}B$ corta BC em P. De fato, pela construção acima, P é equidistante das retas ED e EB. Logo, a circunferência de centro P que passa por D é tangente a K_1 e ao lado AB.

b)



Tracemos PG, perpendicular a AB e PF perpendicular a AC como na figura acima. Sejam $PD = PG = x$. Da semelhança dos triângulos CFP e CAB temos:

$$\frac{b-x}{b+x} = \frac{b}{a}$$

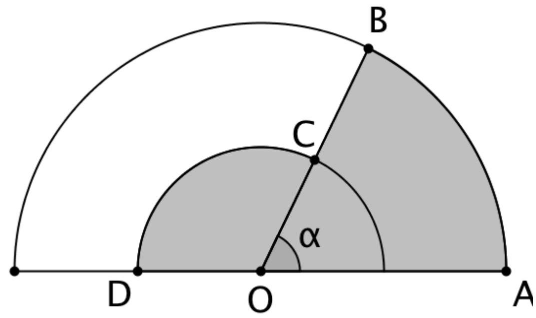
Assim,

$$x = \frac{b(a-b)}{a+b}$$

.

Questão 3. *(pontuação: 2)*

A figura a seguir mostra duas semicircunferências com mesmo centro O e com raios $OD = r$ e $OA = 2r$. Na semicircunferência maior foi assinalado um ponto B e ângulo $A\hat{O}B$ mede α radianos. O raio OB cortou a circunferência menor em C e a região R é a que está sombreada (delimitada pelo arco AB, segmento BC, arco CD e segmento DA) na figura.



a) *(1,0)* Calcule o perímetro de R em função de r e α.

b) *(1,0)* Calcule a área de R em função de r e α.

Uma solução:

a) O comprimento de um arco de circunferência é igual a medida do ângulo central em radianos multiplicada pelo raio. Assim o perímetro de R é:

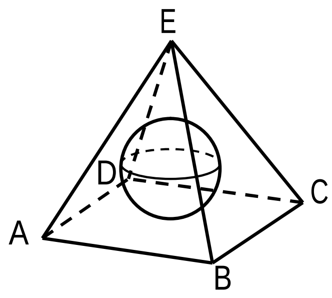
$$P = 3r + \alpha.2r + r + (\pi - \alpha)r = (\alpha + \pi + 4)r$$

b) A área de um setor de ângulo central α em radianos em um círculo de raio r é $\frac{\alpha r^2}{2}$. Assim a área da região R é:

$$A = \frac{\alpha(2r)^2}{2} + \frac{(\pi - \alpha)r^2}{2} = \frac{(3\alpha + \pi)r^2}{2}$$

Questão 4. *(pontuação: 2)*

A aresta da base de uma pirâmide reta de base quadrada mede 2 unidades e a esfera inscrita nessa pirâmide tem raio r $(0 < r < 1)$.

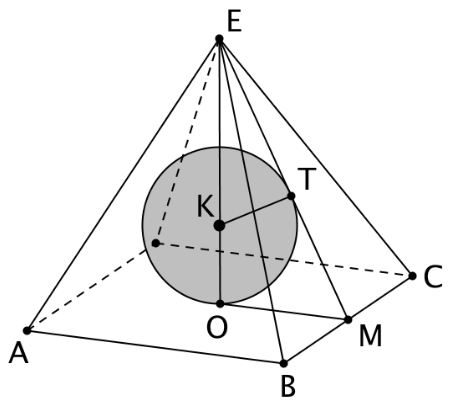


a) *(1,0)* Calcule o volume da pirâmide em função de r.

b) *(1,0)* Se, para cada valor de r ($0 < r < 1$), o volume da pirâmide é $V(r)$, faça um esboço do gráfico dessa função.

Uma solução:

a)



Seja O o centro da base $ABCD$ da pirâmide de vértice E como mostra a figura ao lado. Seja M o ponto médio da aresta BC. Seja K o ponto sobre a altura OE o centro da esfera inscrita na pirâmide. Assim, traçando KT perpendicular à face EBC temos $KO = KT = r$. Seja $h = OE$ a altura da pirâmide. Da semelhança dos triângulos ETK e EOM temos

$$\frac{KT}{OM} = \frac{KE}{EM}$$

ou seja,

$$\frac{r}{1} = \frac{h-r}{\sqrt{h^2+1}}$$

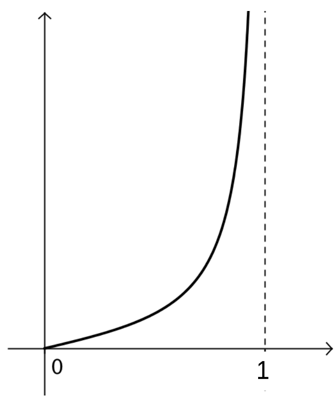
Dessa relação determinamos a altura da pirâmide $h = \frac{2r}{1-r^2}$.

O volume da pirâmide é

$$V = \frac{1}{3}.2^2.\frac{2r}{1-r^2} = \frac{8r}{3(1-r^2)}$$

.

b) A função que associa r e V é crescente. Quando r se aproxima de 0, temos que V se aproxima de 0. Porém, quando r se aproxima 1 temos que V tende a $+\infty$. Logo, o gráfico de $V(r)$ tem o seguinte aspecto:



Questão 5. *(pontuação: 2)*

Um copo de plástico rígido e espessura muito fina tem a forma de um tronco e cone com 8 cm de diâmetro na boca, 6 cm de diâmetro no fundo e 12 cm de altura.

a) *(1,0)* Determine um valor aproximado para o volume do copo (ou seja, o número inteiro de cm^3 que melhor aproxima o volume).

b) *(1,0)* Determine um valor aproximado para a área externa total do copo (ou seja, o número inteiro de cm^2 que melhor aproxima a área externa).

Uma solução:

a) Os raios das bases são 4 cm, e 3 cm e a fórmula do volume do tronco de cone fornece o resultado:

$$V = \frac{\pi h}{3}.(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi.12}{3}(16 + 9 + 12) \approx 3,14.4.37 \ \approx 465\,\mathrm{cm}^3$$

b) A geratriz do tronco de cone é igual a $\sqrt{12^2 + 1}$ que é aproximadamente igual a 12. Nesse copo, a altura é quase igual à geratriz.

A área do copo é a soma da área lateral com a área da base, isto é:

$$A = \pi(R + r)g + \pi r^2 \approx 3,14.[(4 + 3).12 + 3^2] \approx 292\,\mathrm{cm}^2$$