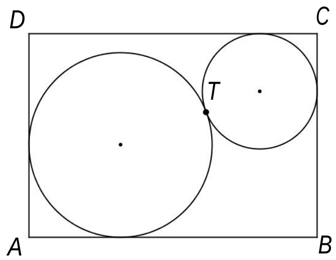
Questão 1. (pontuação: 1,5)

É dado um retângulo $ABCD$ tal que em seu interior estão duas circunferências tangentes exteriormente no ponto T, como mostra a figura abaixo. Uma delas é tangente aos lados AB e AD e a outra é tangente aos lados CB e CD.

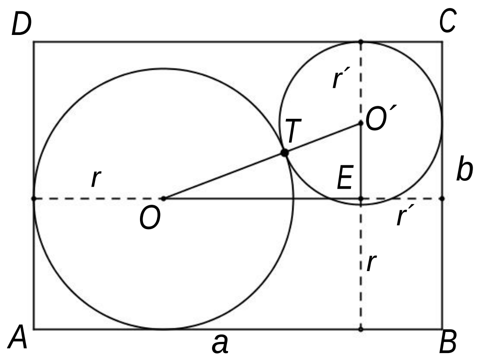


a) Mostre que a soma dos raios dessas circunferências é constante (só depende das medidas dos lados do retângulo).
b) Mostre que o ponto T pertence à diagonal AC do retângulo.

Uma solução:

a) No retângulo $ABCD$ consideremos $AB = a$ e $BC = b$. Sem perda de generalidade consideraremos $b \leq a$ e $a \leq 2b$, pois sem esta última condição as tangências indicadas não ocorreriam.

Sejam O e O' os centros das circunferências e r e r' os respectivos raios. Seja $s = r + r'$. Como a reta que contém os centros das circunferências passa pelo ponto de tangência então $OO' = OT + TO' = r + r' = s$.



A paralela a AB por O e a paralela a BC por O' cortam-se em E. Temos:

i) $r + OE + r' = a$, ou seja, $OE = a - s$

ii) $r + EO' + r' = b$, ou seja, $EO' = b - s$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OEO' temos:

$$s^2 = (a-s)^2 + (b-s)^2$$

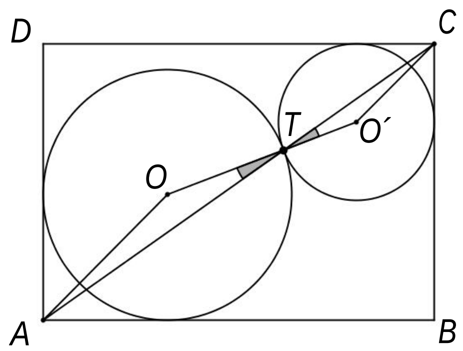
Desenvolvendo e simplificando encontramos $s^2 - (2a+2b)s + a^2 + b^2 = 0$.

Como claramente $s < a+b$, pois as circunferências estão no interior do retângulo, o valor de s que procuramos é a menor raiz da equação acima. Assim,

$$s = \frac{2a+2b-\sqrt{4a^2+8ab+4b^2-4(a^2+b^2)}}{2} = \frac{2a+2b-2\sqrt{2ab}}{2} = a+b-\sqrt{2ab},$$

o que comprova que o valor de $s = r + r'$ é constante e só depende das medidas dos lados do retângulo.

b) As retas AO e $O'C$ são paralelas ou cincidentes porque fazem 45º com os lados do retângulo. Se forem coincidentes, o resultado é óbvio. Senão traçamos os segmentos AT e TC e o segmento OO' (que passa por T). Os ângulos TOA e $TO'C$ são congruentes porque são alternos internos nessas paralelas em relação à transversal OO'.



Temos ainda que

$$\frac{OT}{O'T} = \frac{r}{r'} = \frac{r\sqrt{2}}{r'\sqrt{2}} = \frac{OA}{O'C}.$$

Como $\angle TOA = \angle TO'C$ e $\frac{OT}{O'T} = \frac{OA}{O'C}$ então os triângulos TOA e $TO'C$ são semelhantes. Assim, $\angle OTA = \angle O'TC$ e, portanto, os pontos A, T e C são colineares.

Questão 2. (pontuação: 1,0)

O poliedro representado na figura abaixo é tal que:

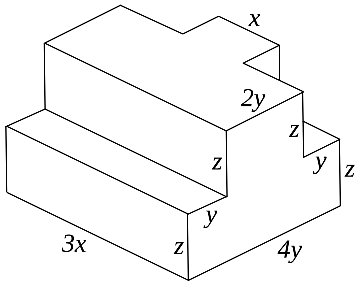
i) há exatamente um plano de simetria;

ii) em cada vértice, os planos das faces que se tocam são perpendiculares dois a dois, sendo possível decompor o sólido em três paralelepípedos;

iii) as dimensões nunca ultrapassam 19;

iv) os comprimentos das arestas são inteiros maiores do que 1;

v) o volume é igual a 1995.



a) Descreva o plano de simetria do poliedro.

b) Encontre os valores de x, y e z.

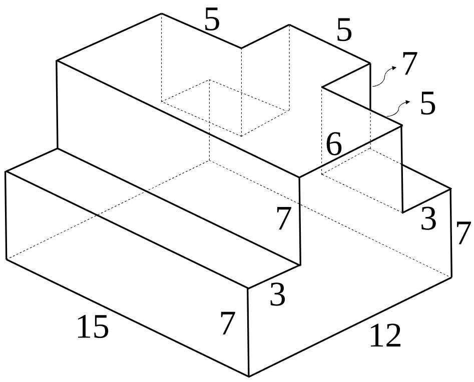
Uma solução:

a) O plano de simetria do poliedro é o plano perpendicular às arestas de comprimento $3x$, que passa pelos seus pontos médios.

b) Para calcular o volume do sólido, observamos que ele pode ser decomposto como união de três paralelepípedos, e

$$V = 12xyz + 6xyz + xyz = 19xyz$$

Daí, $19xyz = 1995$, $xyz = 105$ e as possibilidades para x, y e z são: 3, 5 e 7; como as dimensões não podem ultrapassar 19, x não poderá ser 7, y não poderá ser 5 ou 7. Deveremos ter, portanto, $z = 7$, $x = 5$ e $y = 3$, de modo que as dimensões são as indicadas na figura:



Questão 3. (pontuação: 1,5)

O objetivo desta questão é demonstrar que a função $f(x) = cos\sqrt{x}$, $x \geq 0$, não é periódica, ou seja, não existe nenhum número real positivo T tal que $cos\sqrt{x+T} = cos\sqrt{x}$ para todo $x \geq 0$.

a) Encontre todos os valores de $T \geq 0$ para os quais $f(T) = f(0)$ e, a seguir, encontre todos os valores de $T \geq 0$ para os quais $f(T) = f(2T)$.

b) Use o ítem a) para mostrar que $f(x)$ não é periódica.

Uma solução:

a) Se $f(T) = f(0)$, $T \geq 0$, então $cos\sqrt{T} = cos 0 = 1$ e

$$\sqrt{T} = 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow T = 4k^2\pi^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Reciprocamente se $T = 4k^2\pi^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, então $f(T) = f(0)$.
Por outro lado, se $f(T) = f(2T)$, $T \geq 0$, então $cos\sqrt{2T} = cos\sqrt{T}$ e

$$\sqrt{2T} = \sqrt{T} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}\,\text{tais que}\,\sqrt{T} + 2m\pi \geq 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{2T} = -\sqrt{T} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}\,\text{tais que} - \sqrt{T} + 2m\pi \geq 0$$

Logo

$$\sqrt{2T} - \sqrt{T} = 2m\pi \Rightarrow 2T - 2\sqrt{2}T + T = 4m^2\pi^2 \Rightarrow T = \frac{4m^2\pi^2}{3 - 2\sqrt{2}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

(para esses valores de T é imediato verificar que $\sqrt{T} + 2m\pi \geq 0$) ou

$$\sqrt{2T} + \sqrt{T} = 2m\pi \Rightarrow 2T + 2\sqrt{2}T + T = 4m^2\pi^2 \Rightarrow T = \frac{4m^2\pi^2}{3 + 2\sqrt{2}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

(para esses valores de T é imediato verificar que $-\sqrt{T} + 2m\pi \geq 0$).
Reciprocamente, se $T = \frac{4m^2\pi^2}{3-2\sqrt{2}}$ ou $T = \frac{4m^2\pi^2}{3+2\sqrt{2}}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, é imediato constatar que $f(T) = f(2T)$.

b) Para mostrar que f não é periódica, suponhamos o contrário, isto é, admitamos a existência de um número positivo T tal que

$$cos\sqrt{x + T} = cos\sqrt{x},$$

para todo $x \geq 0$.
Então,

$$cos\sqrt{2T} = cos\sqrt{T} = cos 0,$$

e, de a) (1), obtemos as igualdades $2T = 4k_1^2\pi^2$ e $T = 4k_2^2\pi^2$, com k_1 e k_2 inteiros positivos, logo

$$\sqrt{2} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q},$$

o que é impossível dado que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Questão 4. (pontuação: 1,0)
A derivada de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ é, por definição, o polinômio

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1.$$

Admita a regra da derivada do produto:

$$(p.q)'(x) = p'(x).q(x) + p(x).q'(x)$$

e prove que $a \in \mathbb{R}$ cumpre $p(a) = p'(a) = 0$ se, e somente se, $p(x) = (x - a)^2 s(x)$ para algum polinômio $s(x)$.

Uma solução:

($\Leftarrow$) Supondo $p(x) = (x-a)^2.s(x) = (x^2 - 2ax + a^2).s(x)$, vem que $p'(x) = 2(x-a).s(x) + (x-a)^2.s'(x)$, logo, $p(a) = p'(a) = 0$.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, supondo $p(a) = p'(a) = 0$, temos, pelo algoritmo da divisão, que $p(x) = (x-a)q(x)$ para algum polinômio quociente $q(x)$. Derivando esta última igualdade, vem

$$p'(x) = q(x) + (x-a).q'(x)$$

donde $q(a) = 0$, logo, novamente pelo algoritmo da divisão $q(x) = (x-a).s(x)$ para algum polinômio $s(x)$, e daí $p(x) = (x-a)^2.s(x)$

Questão 5. (pontuação: 1,5)

a) Maria tem 10 anéis idênticos e quer distribuí-los pelos 10 dedos de suas mãos. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isto? Suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos.

b) Suponha agora que os 10 anéis sejam todos distintos. De quantas maneiras Maria pode distribuí-los em seus dedos? Aqui também, suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos e que a ordem dos anéis nos dedos é relevante.

Uma solução:

a) Numeramos os dedos de Maria de 1 a 10. Para descrever como Maria colocou seus anéis, basta dizer quantos deles há em cada dedo; se x_i é o número de anéis no i-ésimo dedo, temos então $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 10$. O número de soluções inteiras não negativas dessa equação é $C^9_{10+9} = \frac{19!}{9!10!}$, que é a resposta a nosso problema.

Uma outra maneira de resolver o problema é denotar por A os anéis e por um traço, - , a separação dos anéis nos dedos. Assim, por exemplo A A A A A - - - - A - - - - A A A A -, indicará que 5 anéis foram colocados no dedo de número 1, um anel no dedo de número 5 e quatro anéis no dedo de número 9. Como existe uma correspondência biunívoca entre estes anagramas com 19 símbolos (são 10 A´s e 9 traços -) e as configurações dos anéis nas mãos, há, neste caso, $\frac{19!}{9!10!}$ maneiras diferentes da Maria colocar os 10 anéis.

b) Basta multiplicar o resultado encontado no ítem a) por 10!, pois quando os anéis são idênticos, a ordem em que aparecem não é importante e cada configuração com 10 A´s idênticos obtidas em a) gerará 10! configurações com anéis distintos, já que diferentes permutações dos anéis gerarão configurações distintas. A resposta é $10!\frac{19!}{9!10!} = \frac{19!}{9!}$.

Uma outra solução é a seguinte: Supomos os anéis numerados de 1 a 10. Para descrever como Maria coloca seus anéis, basta dizer, em cada dedo do primeiro ao décimo, a ordem em que eles aparecem da base do dedo até a ponta. Indicando a passagem de um dedo para o seguinte pelo símbolo -, vemos que uma descrição consiste de uma sequência formada pelos números de 1 a 10 e por nove traços -. Para construir uma dessas sequências, ordenamos primeiro os números, o que pode ser feito de maneiras 10! diferentes. Com isso, são criados 11 espaços entre os números (contam-se também os espaços à esquerda e à direita da sequência numérica), nos quais devemos distribuir os nove traços -. Estamos então buscando o número de soluções inteiras não negativas de $y_1 + y_2 + \cdots + y_{11} = 9$ (aqui y_i indica quantos traços serão colocados no i-ésimo espaço vazio), que é $\frac{19!}{9!10!}$. A resposta a nosso problema é então $10!\frac{19!}{9!10!} = \frac{19!}{9!}$.

Questão 6. (pontuação: 1,0)

Uma sequência (a_n) é tal que $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1} \qquad \text{para} \quad \text{todo} \qquad n \geq 1.$$

Mostre que os valores de a_n, para $n \geq 2$, são todos iguais.

Uma solução:

Basta proceder por indução finita para mostrar qu $a_n = \frac{1}{2}$ para todo $n \geq 2$.

Para $n = 2$, temos $a_2 = a_{1+1} = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$.

Admitamos agora que $a_j = \frac{1}{2}$, para $j = 2, \dots n$ e mostremos que $a_{n+1} = \frac{1}{2}$.

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{2}}{n+1} = \frac{1 + (n-1)\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Segue, então, pelo Princípio da Indução Finita, que $a_n = \frac{1}{2}$ para todo $n \geq 2$.

Questão 7. (pontuação: 1,5)
Seja $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e considere os conjuntos:

$$A = \{d \in \mathbb{N};\ d|n\} \quad \text{e} \quad B = \left\{\frac{n}{c};\ c \in A\right\}.$$

Denotemos por $S(n)$ a soma dos divisores naturais de n e por $S^*(n)$ a soma dos seus inversos.

a) Mostre que $A = B$ e com isto conclua que

$$S^*(n) = \frac{S(n)}{n}.$$

b) Mostre que n é um número perfeito se, e somente se,

$$S^*(n) = 2.$$

Uma solução:

a) Temos que

$$\begin{aligned} x \in A &\iff n = xc \text{ para algum } c \in A \\ &\iff x = \frac{n}{c} \text{ para algum } c \in A \\ &\iff x \in B. \end{aligned}$$

Seja $A = \{d_1, \dots, d_r\}$, $d_i \neq d_j$ para $i \neq j$, logo

$$S(n) = \sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x = \frac{n}{d_1} + \cdots + \frac{n}{d_r} = n\left(\frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_r}\right) = nS^*(n),$$

daí segue-se que

$$S^*(n) = \frac{S(n)}{n}.$$

b) Por definição, sabemos que n é perfeito se, e somente se, $S(n) = 2n$. O resultado segue imediatamente, pois, em virtude do item (a),

$$S(n) = 2n \iff S^*(n) = 2.$$

Questão 8. (pontuação: 1,0)

Mostre que se p é primo, $p > 3$, então p^2 deixa resto 1 na divisão por 24.

Uma solução:

Observe que como $p > 3$ é primo, então $p = 3q + r$ com $r = 1$ ou 2. Temos assim dois casos a considerar:

• Se $r = 1$, $p = 3q + 1$ e como $p - 1$ é par, q deve ser par; assim $q = 2k$ para algum k. Logo $p^2 = (3.2k + 1)^2 = 12k(3k + 1) + 1$; mas ou k é par ou $3k + 1$ é par, assim temos que $p^2 = 24m + 1$, para algum m, como queríamos mostrar.

• Se $r = 2$, $p = 3q + 2$ e, sendo p é ímpar, temos que q também será impar, digamos $q = 2k + 1$, para algum k. Substituindo, temos que $p^2 = (3q + 2)^2 = (6k + 5)^2 = 12k(3k + 5) + 24 + 1$, mas ou k é par ou $3k + 5$ é par, assim temos que $p^2 = 24m + 1$, para algum m, como queríamos mostrar.