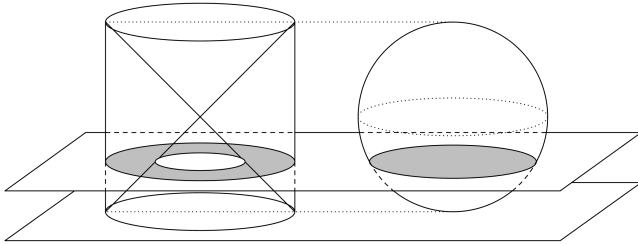


Questão 01 [2,00 pts]

Considere um cilindro sólido de altura $2R$, cujas bases são dois círculos de raio R , do qual são retirados dois cones sólidos de altura R e que têm por base as bases do cilindro, formando-se assim um sólido \mathcal{S} . Considere ainda uma esfera de raio R , e que, assim como o sólido \mathcal{S} , está sobre um plano.



- (a) Prove que, intersectando a esfera e o sólido \mathcal{S} por um plano paralelo ao plano que apoia estes sólidos, como na figura, obtém-se seções com mesma área.
- (b) Supondo conhecidas as expressões do volume do cone e do cilindro, prove que o volume de uma esfera de raio R é dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Questão 02 [2,00 pts]

Em um tetraedro $ABCD$, $\overline{AB} = x$, $\overline{CD} = y$ e as demais arestas medem z . Determine a distância entre as arestas AB e CD em função de x , y e z .

Questão 03 [2,00 pts]

Sobre o lado BC de um quadrado $ABCD$ marcam-se os pontos E e F tais que $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CF}{BC} = \frac{1}{4}$. Os segmentos AF e ED intersectam-se em P . Determine a que fração da área do quadrado $ABCD$ corresponde a área do triângulo BPE .

Questão 04 [2,00 pts]

Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. Determine o número de arestas e faces deste poliedro.

Questão 05 [2,00 pts]

- (a) Usando apenas a identidade fundamental da trigonometria e as fórmulas de arcos duplos prove que: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, para todo x real.
- (b) Sabendo que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$, calcule $\cos(x)$.