

**Questão 01** [ 2,00 pts ]

---

Uma escola pretende formar uma comissão de 6 pessoas para organizar uma festa junina. Sabe-se que há 8 professores e 20 alunos que são candidatos a participar da comissão.

- (a) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor.
- (b) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor e dois alunos.
- (c) Um aluno resolveu o item (b) acima da seguinte maneira:

“Devemos primeiramente selecionar um professor dentre os oito ( $C_8^1$ ). Escolhido um professor, devemos, em seguida, escolher dois alunos dentre os vinte ( $C_{20}^2$ ). Finalmente, escolhidos um professor e dois alunos, devemos escolher 3 pessoas quaisquer das 25 que restaram para formar a comissão de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos ( $C_{25}^3$ ). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos é igual a  $C_8^1 \times C_{20}^2 \times C_{25}^3$ .”

A solução proposta por este aluno está correta? Caso não esteja, identifique e explique o erro deste aluno.

**Questão 02** [ 2,00 pts ]

---

Uma funcionária solicitou que seu superior fizesse uma carta de referências para um novo trabalho. Ela considera que tem probabilidade igual a 75% de conseguir o emprego se a carta for favorável à contratação e 10% se a carta não for favorável. Ela também estima que a probabilidade de a carta ser favorável é igual a 60%.

- (a) Com base nas informações acima, qual a probabilidade de ela ser contratada no emprego pretendido?
- (b) Supondo que ela foi contratada, qual a probabilidade de a carta de recomendação ter sido favorável?
- (c) E se ela não foi contratada, qual a probabilidade de a carta de recomendação não ter sido favorável?

**Questão 03** [ 2,00 pts ]

---

Pousados no chão de uma praça quadrada com 70 metros de lado, estão 50 pombos. Mostre que existem dois pombos cuja distância é inferior a 15 metros.

**Questão 04** [ 2,00 pts ]

---

- (a) Escrevendo todos os anagramas da palavra PROFMAT e distribuindo-os como se fosse num dicionário (ordem alfabética), teremos como primeira “palavra” AFMOPRT, como segunda AFMOPTR, e assim por diante. Que palavra ocupará a posição 2015 nessa lista?
- (b) Considere a palavra HOMOMORFISMO. Quantos anagramas podem ser escritos de modo que duas letras O nunca fiquem juntas?

**Questão 05** [ 2,00 pts ]

---

Sejam  $x, y$  e  $z$  números reais positivos.

- (a) Prove que  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ .
- (b) Prove que  $\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$ .
- (c) Use o item (b) para mostrar que se a equação  $t^3 - at^2 + bt - c = 0$ , em que  $a, b$  e  $c$  são números positivos, possui três raízes reais, então  $a^6 \geq 27b^3 \geq 729c^2$ .