

**Questão 1** [ 2,0 pt ]

---

Mostre que, para todo  $m > 0$ , a equação  $\sqrt{x} + m = x$  tem exatamente uma raiz.

**Questão 2** [ 2,0 pt ]

---

- (a) Seja  $p$  um número primo. Mostre que  $\log_{10} p$  é irracional.
- (b) Mais geralmente, dado  $n$  um número inteiro positivo, mostre que  $\log_{10} n$  é racional se, e somente se,  $n$  é uma potência de 10.

**Questão 3** [ 2,0 pt ]

---

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx$ . Determine as constantes reais  $a$  e  $b$  de modo que  $f^{-1}(\{3\}) = \{-1, \frac{3}{2}\}$  e, em seguida, determine o conjunto imagem de  $f$ .

**Questão 4** [ 2,0 pt ]

---

Seja  $p(x)$  um polinômio do sétimo grau tal que

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 10.$$

Sabendo que  $p(8) = 30$ , determine  $p(-3)$ .

**Questão 5** [ 2,0 pt ]

---

- (a) Mostre que, para qualquer número real  $x$ , vale a identidade

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 = 1.$$

- (b) Use o item anterior para mostrar que

$$\cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \text{ e } \operatorname{sen} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$