

**Questão 1** [ 2,0 pt ]

---

Sejam  $p$  e  $q$  dois números primos distintos.

- (a) Mostre que  $\sqrt{pq}$  é irracional.
- (b) Use o item (a) para provar que  $\sqrt{p} + \sqrt{q}$  é irracional.

**Questão 2** [ 2,0 pt ]

---

Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos arbitrários e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Prove que, se  $A, B \subset X$  então

- (a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (b)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .
- (c) Dê um exemplo para o qual a igualdade de conjuntos no item (b) acima não ocorre.

**Questão 3** [ 2,0 pt ]

---

João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R\$20,00 cada caixa. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R\$1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Considerando-se apenas valores inteiros de caixas e reais, quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

**Questão 4** [ 2,0 pt ]

---

Uma pessoa tomou 60 mg de uma certa medicação. A bula do remédio informava que a meia-vida do medicamento era de seis horas. Como o paciente não sabia o significado da palavra meia-vida, foi a um site de busca e encontrou a seguinte definição:

*Meia-vida*: tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica) atinja metade de seu valor inicial.

- (a) Após 12 horas da ingestão do remédio, qual é a quantidade do remédio ainda presente no organismo?
- (b) E após 3 horas?
- (c) Quanto tempo após a ingestão a quantidade de remédio no organismo é igual a 20 mg?

Caso julgue necessário, use os dados  $\sqrt{2} = 1,4$ ,  $\ln 3 = 1,1$  e  $\ln 2 = 0,7$ .

**Questão 5** [ 2,0 pt ]

---

- (a) Encontre uma expressão para  $\sin 3x$  como um polinômio de coeficientes inteiros em termos de  $\sin x$ .
- (b) Mostre que  $\sin 10^\circ$  é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros e use este fato para concluir que  $\sin 10^\circ$  é irracional.