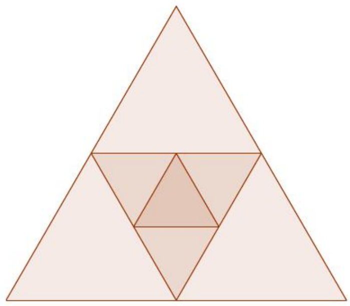
GABARITO

Questão 1.

Considere um triângulo equilátero de lado 3 e seja A_1 sua área. Ao ligar os pontos médios de cada lado, obtemos um segundo triângulo equilátero de área A_2 inscrito no primeiro. Para este segundo triângulo equilátero, ligamos os pontos médios de seus lados e obtemos um terceiro triângulo equilátero de área A_3 inscrito no segundo e assim sucessivamente, gerando uma sequência de áreas (A_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$

Usando o Princípio de Indução Finita, mostre que a fórmula $A_n = \dfrac{9\sqrt{3}}{4^n}$ é verdadeira para todo $n \geq 1$ natural.

Uma solução:



Usando do teorema de Pitágoras conseguimos obter a altura, h_1, do primeiro triângulo, a saber:

$$h_1^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} \Longrightarrow h_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, concluímos que a área do primeiro triângulo é dada por

$$A_1 = \frac{3.h_1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Acabamos de verificar, assim, a validade da fórmula $A_n = \dfrac{9\sqrt{3}}{4^n}$ para $n = 1$.

Agora, supondo que a fórmula seja válida para algum k, ou seja, que

$$A_k = \frac{9\sqrt{3}}{4^k}$$

devemos mostrar que ela é válida para $k + 1$. Como o triângulo inscrito tem área igual a $1/4$ da do triângulo obtido no estágio anterior, concluímos que

$$A_{k+1} = \frac{1}{4}A_k \overset{Hip.Ind.}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4^k} = \frac{9\sqrt{3}}{4^{k+1}}$$

Portanto, o Princípio de Indução Finita garante a validade da fórmula $A_n = \dfrac{9\sqrt{3}}{4^n}$ para todo natural $n \geq 1$.

Uma outra maneira, mais detalhada, de provar o passo indutivo é a seguinte:

Denotemos por h_k e L_k a altura e a medida do lado do triângulo da etapa k, respectivamente, e notemos que

$$(h_k)^2 = L_k^2 - \left(\frac{L_k}{2}\right)^2 \Longrightarrow h_k = \frac{\sqrt{3}L_k}{2}.$$

Logo $A_k = \dfrac{\sqrt{3}}{4}L_k^2$.

Na etapa $k+1$ teremos uma triângulo equilátero cuja medida do lado é metade da medida do lado do triângulo anterior. Além disso, a altura será

$$(h_{k+1})^2 = \left(\frac{L_k}{2}\right)^2 - \left(\frac{L_k}{4}\right)^2 \Longrightarrow h_{k+1} = \frac{\sqrt{3}L_k}{4}.$$

Portanto, a área do triângulo da etapa $k+1$ é

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= \frac{h_{k+1}\left(\frac{L_k}{2}\right)}{2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}L_k^2}{4} \\
&= \frac{1}{4} \cdot A_k \\
&\overset{Hip.Ind.}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4^k} \\
&= \frac{9\sqrt{3}}{4^{k+1}},
\end{aligned}$$

o que prova que a fórmula vale para $k+1$.

Por Indução, a fórmula $A_n = \dfrac{9\sqrt{3}}{4^n}$ vale para todo natural $n \geq 1$.

Questão 2.

A sequência (a_n), $n \geq 0$, é definida da seguinte maneira:

- $a_0 = 4$
- $a_1 = 6$
- $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 1$

a) Encontre a_7.

b) Encontre a soma dos primeiros 2013 termos da sequência.

Uma solução:

a) Basta fazer um cálculo direto: $a_7 = 6$. Na verdade a sequência é dada por 4, 6, 6/4, 1/4, 1/6, 4/6, 4, 6,... e vemos que ela se repete em ciclos de tamanho 6; os termos de índices $n = 6, 12, ..., 6k, ...\ k \in \mathbb{N}$ são todos iguais a 4; isto será usado no ítem b).

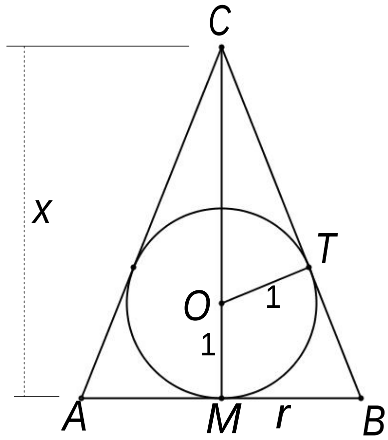
b) Para encontrarmos a soma, primeiramente observamos que a soma do seis primeiros termos $a_0 + a_1 + \ldots a_5$ é igual a $4+6+\frac{6}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{151}{12}$. Assim, até 2009 (incluindo-o) temos 335 blocos iguais a $\frac{151}{12}$. Portanto, a soma solicitada é igual a

$$335(\frac{151}{12})+4+6+\frac{6}{4}=\frac{50723}{12}.$$

Questão 3.

Um cone de revolução tem altura x e está circunscrito a uma esfera de raio 1. Calcule o volume desse cone em função de x.

Uma solução:



Sejam:

AB um diâmetro da base do cone,

M o centro da base,

C o vértice do cone,

O o centro da esfera inscrita no cone e

T o ponto de tangência da geratriz CB do cone com a esfera.

Temos $CM = x$ e $OM = OT = 1$.

Seja r o raio da base do cone. O comprimento de uma geratriz do cone é $CB = \sqrt{x^2 + r^2}$.

Como CM é perpendicular a AB e OT é perpendicular a CB, os triângulos CTO e CMB são semelhantes. Daí,

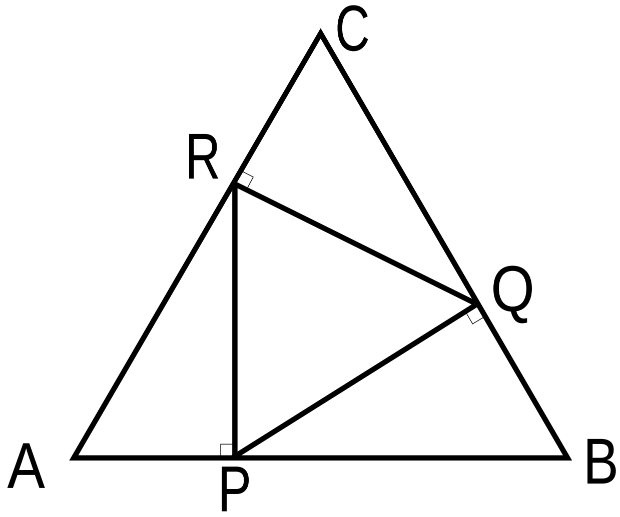
$$\frac{OC}{CB}=\frac{OT}{MB} \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{1}{r}$$

Elevando ao quadrado e aplicando a propriedade das proporções que permite obter nova fração equivalente às anteriores subtraindo-se numeradores e denominadores (ou fazendo os cálculos), temos:

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2+r^2} = \frac{1}{r^2} = \frac{x^2-2x}{x^2} = \frac{x-2}{x} \Rightarrow r^2 = \frac{x}{x-2}$$

O volume do cone é $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 x = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{x}{x-2} \cdot x = \dfrac{\pi x^2}{3(x-2)}$.

Questão 4. Na figura, temos um triângulo equilátero ABC e um segundo triângulo PQR cujos lados $\overline{RP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ são, respectivamente, perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ do triângulo ABC.



a) Mostre que o triângulo PQR é equilátero. Conclua que $AP = BQ = CR$.

b) Se o triângulo ABC tem área 1, encontre a área do triângulo PQR.

Uma solução:

a) Basta observar que cada um dos ângulos do triângulo menor PQR mede 60^o para concluir que ele é equilátero.

Para mostrar que $AP = BQ$ notamos que os triângulos PAR e QBP são congruentes, pois são semelhantes e acabamos de mostrar que $PR = BQ$. Analogamente $AP = CR$.

Logo $AP = BQ = CR$.

b) Primeiramente, notemos que APR é um triângulo retângulo 30^o-60^o-90^o, ou seja, é a metade de um triângulo equilátero. Logo, temos que $AR = 2AP$, e, consequentemente, $PB = AR = 2AP$, ou ainda, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{1}{2}$.

Se chamarmos L o comprimento do lado do triângulo ABC e l o lado do triângulo PQR, temos que $AP = \dfrac{1}{3}L$ e $AR = PB = \dfrac{2}{3}L$. Daí,

$$l^2 = (RP)^2 \overset{Pitágoras}{=} \frac{4}{9}L^2 - \frac{1}{9}L^2 = \frac{1}{3}L^2$$

e a razão entre as áreas dos triângulos PQR e ABC é $\dfrac{1}{3}$, logo o triângulo PQR tem área igual a $\dfrac{1}{3}$.

Questão 5.

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer.

a) A função composta $g \circ f$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

b) A função composta $f \circ g$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

Uma solução:

a) Seja $T > 0$ o período de f, então $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como

$$(g \circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

concluímos que $g \circ f$ é também periódica.

b) É falso. Considere, por exemplo, as funções $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x)$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

Então $f \circ g$ não é periódica.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ \\ 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

Se existisse $T > 0$ tal que $(f \circ g)(x+T) = (f \circ g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tomando $x = -T$, $(f \circ g)(0) = 1 = (f \circ g)(-T) = 0$, uma contadição.

Questão 6.

Considere a equação:

$$\frac{1}{2}|x||x-3| = 2|x - \frac{3}{2}|$$

a) Quais são as raízes dessa equação? Explique detalhadamente como as encontrou.

b) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \dfrac{1}{2}|x||x-3|$ e $g(x) = 2|x - \dfrac{3}{2}|$ e marque as raízes que você encontrou no ítem a).

Uma solução:

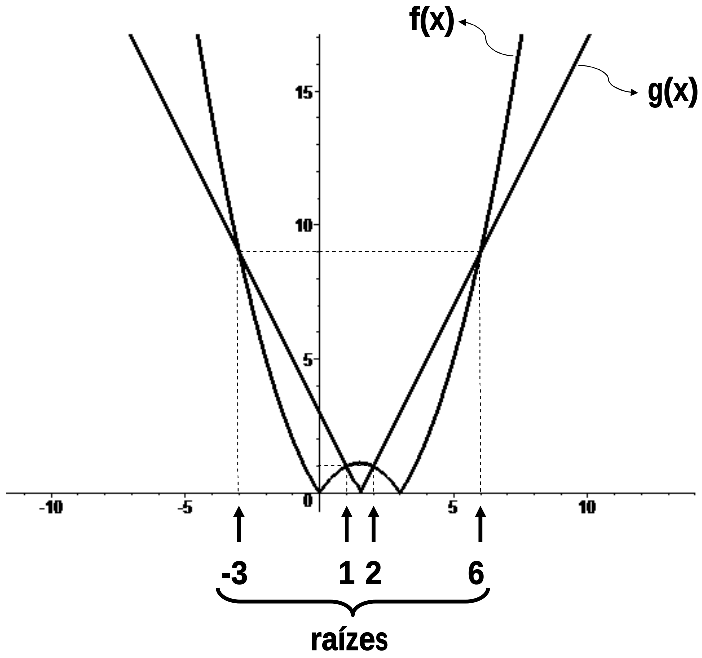
a) A equação é equivalente as igualdades:

$x^2 - 3x = 4x - 6$, ou $x^2 - 7x + 6 = 0$, cujas raízes são $x = 1$ e $x = 6$; e

$x^2 - 3x = -4x + 6$ ou $x^2 + x - 6 = 0$, cujas raízes são $x = -3$ e $x = 2$.

Logo, temos quatro raízes: -3, 1, 2 e 6.

b) Os gráficos das funções estão esboçados na figura abaixo:



Questão 7.

Determine todos os inteiros X que são soluções da congruência

$$X^{49} + X^{14} + X^{12} - 2X \equiv 0\,(mod 7)$$

Uma solução:

Se $X \equiv 0(mod 7)$, é claro que X é solução da congruência dada. Podemos então supor que 7 não divide X e procurar outras possíveis soluções. Neste caso, pelo Teorema de Fermat, sabemos que

$$X^6 \equiv 1(mod 7)$$

e que $X^7 \equiv X(mod 7)$. Concluímos que $X^{49} \equiv (X^7)^7 \equiv X^7 \equiv X(mod 7)$, $X^{14} \equiv (X^7)^2 \equiv X^2(mod 7)$ e $X^{12} \equiv (X^6)^2 \equiv 1(mod 7)$. Substituindo na congruência dada, temos:

$$X^{49} + X^{14} + X^{12} - 2X \equiv X^2 - X + 1(mod 7)$$

Analisando cada caso (exceto $X \equiv 0(mod 7)$ que já sabemos ser solução da congruência original), temos a tabela abaixo, na qual todas as congruências são módulo 7.

$$X \equiv 1 \Rightarrow X^2 - X + 1 \equiv 1$$

$$X \equiv 2 \Rightarrow X^2 - X + 1 \equiv 3$$

$$X \equiv 3 \Rightarrow X^2 - X + 1 \equiv 0$$

$$X \equiv 4 \Rightarrow X^2 - X + 1 \equiv 6$$

$$X \equiv 5 \Rightarrow X^2 - X + 1 \equiv 0$$

$$X \equiv 6 \Rightarrow X^2 - X + 1 \equiv 3$$

As soluções de $X^{49} + X^{14} + X^{12} - 2X \equiv 0\,(mod 7)$ são $X \equiv 0$, $X \equiv 3$ e $X \equiv 5$, ou seja, o conjunto solução é:

$$S = \{X : X = 7K,\, K \in \mathbb{Z}\} \cup \{X : X = 7K + 3,\, K \in \mathbb{Z}\} \cup \{X : X = 7K + 5,\, K \in \mathbb{Z}\}$$

Questão 8.

Encontre o menor natural k, $k > 2008$, tal que $1 + 2 + \cdots + k$ seja um múltiplo de 13. Justifique sua resposta.

Uma solução:

Sabemos que $1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Assim, para que a soma seja um múltiplo de 13, temos que ter que $k(k+1)$ é um múltiplo de 13 e já que 13 é um número primo, então ou k ou $k+1$ é um múltiplo de 13. Como queremos o menor valor de k para que isto aconteça, devemos ter que $k+1$ é um múltiplo de 13; assim $k+1 = 2015$ e portanto $k = 2014$.